ФІЗІКА

УДК 539.12

Антон Васильевич Бурый*[1]*, Алина Валентиновна Ивашкевич*[2]*,
***Елена Михайловна Овсиюк*[3]*, Виктор Михайлович Редьков*[4]**
[1]*аспирант 1-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики*
Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси
[2]*аспирант 2-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики*
Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси
[3]*канд. физ.-мат. наук, зав. каф. теоретической физики и прикладной информатики*
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина
[4]*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник*
центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси
***Oleg Buryy*[1]*, Alina Ivashkevich*[2]*, Elena Ovsiyuk*[3]*, Victor Red'kov*[4]**
[1, 2]*Graduate Student of B. I. Stepanov Institute of Physics*
of the National Academy of Sciences of Belarus
[3]*PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor,*
Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics
of the Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin
[4]*PhD (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center*
Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: [1]anton.buryy.97@mail.ru; [2]ivashkevich.alina@yandex.by;
[3]e.ovsiyuk@mail.ru; [4]v.redkov@ifanbel.bas-net.by

СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРА СПИРАЛЬНОСТИ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОЛЕ СО СПИНОМ 2

Для описания массивной и безмассовой частиц со спином 2 в подходе Паули – Фирца используется симметричный тензор Φ_{ab} второго ранга. В работе решена задача о нахождении всех собственных состояний оператора спиральности для симметричного тензора. Независимые компоненты симметричного тензора описываются 10-мерной функцией, соответственно, задача сводится к анализу уравнения на собственные значения в 10-мерном пространстве. Найден набор собственных значений: $\sigma = 0$ с кратностью 4, $\sigma = \pm i$ с кратностью 2, $\sigma = \pm 2i$ с кратностью 1; получены явные представления для 10 соответствующих собственных векторов. В случае массивной частицы 5 независимых решений исходной системы уравнений Паули – Фирца в виде плоских волн разложены в линейные комбинации по спиральным решениям. В случае безмассовой частицы два физических независимых решения, не содержащих калибровочных компонент, также разложены по спиральным состояниям.

Ключевые слова: *гравитон, спин 2, симметричный тензор, плоские волны, собственные состояния оператора спиральности, спиральный базис, массивная и безмассовая частицы.*

Eigenvalue States of the Helicity Operator for Symmetric Tensor Describing the Spin 2 Field

For describing the massive and massless spin 2 particles within the Pauli – Fierz approach a symmetric 2-rank tensor Φ_{ab} is applied. When classifying solutions of equation for particles with spin 2, a substantial role is played by the helicity operator. In the present paper, the task of finding all eigenvalues states of this operator for 2-rank symmetric tensor is solved. The eigenvalue problem reduces to analysis of the algebraic system for 10 independent components of the tensor Φ_{ab} First, we find solution of this task in Cartesian basis; there arise the following eigenvalues: $\sigma = 0$ with degeneracy multiplicity 4, $\sigma = \pm i$ with degeneracy multiplicity 2, $\sigma = \pm 2i$ with degeneracy multiplicity 1. In explicit form, there are found corresponding eigenvectors. These results are transformed to the cyclic basis, when the third projection of the spin operator is diagonal. Solutions of the primary Pauli – Fierz equations in the form of plane waves are classified with the help of the helicity operator. In particular, the helicity structure of the gauge solutions in the massless case is established.

Key words: *graviton, spin 2, symmetrical tensor, plane waves, eigenstates of the helicity operator, helicity basis, massive and massless particles.*

Введение

Наиболее известным в теории поля со спином 2, массивного и безмассового [1–25], является подход Паули – Фирца [1; 2], он основан на системе уравнений 2-го порядка для симметричного спинора 2 ранга относительно группы Лоренца. Альтернативный и развитый значительно позже подход Федорова – Редже [7; 15] основан на общей теории релятивистских волновых уравнений 1-го порядка, он основан на сложном 30-компонентном представлении группы Лоренца, которое состоит из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга, тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. В его основе лежит лагранжев формализм, и все свойства симметрии тензоров вместе со всеми условиями связи на них содержатся в исходном лагранжиане [6; 14; 21; 22; 25].

Описания массивной и безмассовой частиц существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия [1; 2], которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные степени свободы по самому своему определению не должны давать вклада в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля, это приводит к необходимости выделять в безмассовом случае калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные решения. В массивном случае возникают известные трудности полях [16–20] при рассмотрении частицы со спином 2 в присутствии внешних электромагнитных полей, они выражаются в том, что возникают аномальные решения, которые можно рассматривать как относящиеся к частицам, двигающимся в пространстве со скоростями большими, чем скорость света. Новых трудностей в теории поля со спином 2 можно ожидать при учете внешних гравитационных полей, описываемых в рамках общей теории относительности на языке неевклидовой геометрии пространства-времени. Здесь особенно существенным является выбор исходного формализма в пространстве Минковского, который затем обобщается на общековариантный случай с учетом требований общей теории относительности. Это касается как возникновения новых аномальных решений в массивном случае, так и проблем с калибровочными степенями свободы.

В настоящей работе решена задача о нахождении всех собственных состояний этого оператора. Независимые компоненты симметричного тензора описываются 10-мерной функцией, соответственно, задача сводится к анализу уравнения на собственные значения в 10-мерном пространстве. Сначала она решена в декартовом базисе, найдены следующие собственные значения: $\sigma = 0$ с кратностью 4, $\sigma = \pm i$ с кратностью 2, $\sigma = \pm 2i$ с кратностью 1; в явном виде найдены 10-мерные представления для соответствующих собственных векторов. Результаты преобразованы к циклическому базису, когда матрица третьей проекции спина для частицы со спином 2 диагональна. Решения исходной системы уравнений Паули – Фирца в виде плоских волн могут быть определенным образом классифицированы с использованием диагонализации оператора спиральности.

1. Генераторы для симметричного тензора 2-го ранга

Найдем явный вид оператора спина для симметричного тензора 2-го ранга. Известно, что для 4-вектора все 6 генераторов описываются формулой

$$(j^{mn})_a^{\ b} = \delta_a^m g^{nb} - \delta_a^n g^{mb}. \tag{1.1}$$

Будем использовать конечные преобразования Лоренца, которые порождают эти генераторы. Тензор второго ранга f_{ab} преобразуется по закону

$$f'_{ab} = L_a^{\ k} L_b^{\ l} f_{kl} \quad \Rightarrow \quad f' = Lf\tilde{L}, \tag{1.2}$$

транспонирование матриц обозначается символом ~.

Рассматриваем преобразование в плоскости (1–2):

$$(L^{(12)})_a{}^k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & +\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрицу преобразованного тензора представляем в виде (записываем его компоненты по столбцам)

$$f'_{ab} = \begin{vmatrix} f_{00} & \cos\gamma\, f_{01} - \sin\gamma\, f_{02} \\ \cos\gamma\, f_{10} - \sin\gamma\, f_{20} & \cos^2\gamma\, f_{11} - \sin\gamma\cos\gamma\left(f_{12} + f_{21}\right) + \sin^2\gamma\, f_{22} \\ \sin\gamma\, f_{10} + \cos\gamma\, f_{20} & \cos^2\gamma\, f_{21} - \sin\gamma\cos\gamma\left(f_{11} - f_{22}\right) - \sin^2\gamma\, f_{12} \\ f_{30} & \cos\gamma\, f_{31} - \sin\gamma\, f_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \sin\gamma\, f_{01} + \cos\gamma\, f_{02} & f_{03} \\ \cos^2\gamma\, f_{12} + \sin\gamma\cos\gamma\left(f_{11} - f_{22}\right) - \sin^2\gamma\, f_{21} & \cos\gamma\, f_{13} - \sin\gamma\, f_{23} \\ \cos^2\gamma\, f_{22} + \sin\gamma\cos\gamma\left(f_{12} + f_{21}\right) + \sin^2\gamma\, f_{11} & \sin\gamma\, f_{13} + \cos\gamma\, f_{23} \\ \sin\gamma\, f_{31} + \cos\gamma\, f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Учитывая симметрию тензора, оставляем только 10 независимых величин, вводя для них специальные обозначения:

$$\begin{gathered} f_0 = f_{00}, \quad f_1 = f_{11}, \quad f_2 = f_{22}, \quad f_3 = f_{33}, \\ d_1 = f_{01}, \quad d_2 = f_{02}, \quad d_3 = f_{03}; \quad c_1 = f_{23}, \quad c_2 = f_{31}, \quad c_3 = f_{12}\,. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Рассматривая бесконечно малое преобразование $\gamma \to 0,$ получаем

$$f'_{ab} = \begin{vmatrix} f_0 & d_1 - \gamma d_2 & \gamma\, d_1 + d_2 & d_3 \\ d_1 - \gamma\, d_2 & f_1 - 2\gamma c_3 & c_3 + \gamma(f_1 - f_2) & c_2 - \gamma c_1 \\ \gamma\, d_1 + d_2 & c_3 + \gamma(f_1 - f_2) & f_2 + 2\gamma c_3 & \gamma\, c_2 + c_1 \\ d_3 & c_2 - \gamma\, c_1 & +\gamma\, c_2 + c_1 & f_3 \end{vmatrix}.$$

В 10-мерном представлении имеем соотношение, которое определяет генератор $S_3 = J^{12}$:

$$\Phi' = I + \gamma J^{12}, \quad \begin{vmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ f'_0 \end{vmatrix} = I + \gamma \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{vmatrix}.$$

Аналогично, исходя из преобразования в плоскости (2–3), найдем генератор $S_1 = J^{23}$:

$$(L^{(23)})_a^{\ k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & 0 & +\sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix},$$

$$\Phi' = I + \gamma J^{23}, \qquad \begin{vmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ f'_0 \end{vmatrix} = I + \gamma \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{vmatrix}.$$

Наконец, находим генератор $S_2 = J^{31}$:

$$(L^{(31)})_a^{\ k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{vmatrix},$$

$$\Phi' = I + \gamma J^{31}, \qquad \begin{vmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ f'_0 \end{vmatrix} = I + \gamma \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{vmatrix}.$$

Использованные преобразования Лоренца над 4-вектором порождают генераторы

$$L^{(12)} \Rightarrow j^{12} = s_3, \quad L^{(23)} \Rightarrow j^{23} = s_1, \quad L^{(31)} \Rightarrow j^{31} = s_2;$$

они подчиняются коммутационным соотношениям

$$s_1 s_2 - s_2 s_1 = +s_3, \quad s_2 s_3 - s_3 s_2 = +s_1, \quad s_3 s_1 - s_1 s_3 = +s_2. \tag{1.4}$$

Убеждаемся, что такие же коммутационные соотношения выполняются и для 10-мерных генераторов в пространстве симметричного тензора.

2. Собственные состояния оператора спиральности

При классификации решений уравнения для частицы со спином 2, например, в виде плоских волн или при рассмотрении частицы во внешнем однородном магнитном поле существенную роль играет оператор спиральности для симметричного тензора второго ранга. Этот оператор определяется равенством

$$\Sigma = i\left(S_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + S_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + S_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \tag{2.1}$$

Исследуем задачу о построении собственных векторов для этого оператора. Будем иметь в виду решения в виде плоских волн $\Phi = e^{-ik_0 x^0 - ik_n x^n} f$. Тогда уравнение на собственные значения для оператора спиральности имеет вид

$$\left(k_1 S_1 + k_2 S_2 + k_3 S_3 \right) \Phi = \sigma \Phi. \tag{2.2}$$

Последнее уравнение можно привести к безразмерной форме:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\vec{k}^2}} \Rightarrow \sigma, \quad \left(n_1 S_1 + n_2 S_2 + n_3 S_3 \right) \Phi = \sigma \Phi, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \tag{2.3}$$

С учетом выражений для компонент оператора спина S_1, S_2, S_3 это уравнение записываем в виде

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2n_1 & 0 & +2n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & +2n_1 & -2n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +n_1 & -n_1 & 0 & +n_3 & -n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & 0 & +n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_3 & n_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +n_3 & 0 & -n_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & +n_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{vmatrix}
= \sigma
\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Замечаем, что уравнение, определяемое последней строкой, сводится к следующему:

$$0 = \sigma f_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0, \quad f_0 - \text{любое}; \quad \sigma \neq 0, \quad f_0 = 0. \tag{2.5}$$

Рассматриваем подсистему из 9 уравнений из (2.4), определитель матрицы 9×9 приравниваем к нулю:

$$\det\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & -2n_1 & 0 & +2n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & +2n_1 & -2n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +n_1 & -n_1 & -\sigma & +n_3 & -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & -\sigma & +n_1 & 0 & 0 & 0 \\ +n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & -\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & -n_3 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +n_3 & -\sigma & -n_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & +n_1 & -\sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3\left(\sigma^2+1\right)^2\left(\sigma^2+4\right).$$

Следовательно, имеем собственные значения

$$\sigma = 0 \ \text{(кратность 3)}; \quad \sigma = \pm i \ \text{(кратность 2)}; \quad \sigma = \pm 2i \ \text{(кратность 1)}. \tag{2.6}$$

Замечаем, что система из 9 уравнений распадается на две несвязанные подсистемы: 9 = 6 + 3. Сначала рассматриваем подсистему из 6 уравнений:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 \\ 0 & -\sigma & 0 & -2n_1 & 0 & 2n_3 \\ 0 & 0 & -\sigma & 2n_1 & -2n_2 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_1 & -\sigma & n_3 & -n_2 \\ -n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & -\sigma & n_1 \\ n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & -\sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \det = \sigma^2\left(1+\sigma^2\right)\left(4+\sigma^2\right). \tag{2.7}$$

Исследуем случай $\sigma = 0$. При этом ранг матрицы равен 4, отбрасываем уравнения, отвечающие нижней и верхней строкам. Свободными параметрами выбираем f_1, c_3. Получаем неоднородную систему с ненулевым определителем:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2n_1 & -2n_2 \\ n_1 & -n_1 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & -n_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2n_3c_3 \\ 0 \\ n_2c_3 \\ n_2 f_1 - n_1c_3 \end{vmatrix},$$

решение имеет вид

$$\sigma = 0, \quad \begin{vmatrix} f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = c_3 \begin{vmatrix} \dfrac{n_2}{n_1} - \dfrac{n_1}{n_2} \\ \dfrac{n_3^2 - n_1^2}{n_1 n_2} \\ \dfrac{n_3}{n_1} \\ \dfrac{n_3}{n_2} \end{vmatrix} + f_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{2.8}$$

Исследуем систему 6 уравнений (2.7) при $\sigma = +i$:

$$\begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 \\ 0 & -i & 0 & -2n_1 & 0 & 2n_3 \\ 0 & 0 & -i & 2n_1 & -2n_2 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_1 & -i & n_3 & -n_2 \\ -n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & -i & n_1 \\ n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы равен 5. Отбрасываем уравнение, отвечающее нижней строке. Пусть c_3 – свободный параметр, решение имеет вид

$$\sigma = +i, \quad \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\left(3n_2^2 - 1\right)n_1^2 - 4n_2^2 - n_3^2 + 1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -2c_3\left(-4n_2n_1^3 + 4in_3n_1^2 + n_2\left(2n_2^2 + 2n_3^2 + 1\right)n_1 + in_3\left(n_2^2 + n_3^2 - 1\right)\right) \\ -2c_3\left(2n_2n_1^3 - in_3n_1^2 + n_2\left(-4n_2^2 + 2n_3^2 + 1\right)n_1 - in_3\left(4n_2^2 + n_3^2 - 1\right)\right) \\ 2c_3\left(4n_1n_2n_3^2 + 3i\left(n_1^2 - n_2^2\right)n_3 - 2n_1n_2\left(n_1^2 + n_2^2 - 1\right)\right) \\ ic_3\left(2n_2n_3^2 + 3in_1\left(1 - 4n_2^2\right)n_3 + n_2\left(2n_1^2 - 4n_2^2 + 1\right)\right) \\ c_3\left(4in_1^3 + 12n_2n_3n_1^2 - i\left(2n_2^2 + 2n_3^2 + 1\right)n_1 - 3n_2n_3\right) \end{vmatrix}. \qquad (2.9)$$

Знаменатель можно преобразовать так:

$$4\left(3n_2^2 - 1\right)n_1^2 - 4n_2^2 - n_3^2 + 1 = 3(4n_1^2n_2^2 - n_1^2 - n_2^2) = A.$$

Решение со спиральностью $\sigma = -i$ следует из найденного заменой $i \to -i$. Замечаем, что выражения для комбинаций

$$\Psi_+ = \psi_{\sigma=+i} + \psi_{\sigma=-i}, \quad \Psi_- = \psi_{\sigma=+i} - \psi_{\sigma=-i}$$

будут иметь более простой вид (вещественный и чисто мнимый):

$$\Psi_+ = \frac{c_3}{A}\begin{vmatrix} 4n_1n_2\left(4n_1^2 - 2n_2^2 - 2n_3^2 - 1\right) \\ -4n_1n_2\left(2n_1^2 - 4n_2^2 + 2n_3^2 + 1\right) \\ -8n_1n_2\left(n_1^2 + n_2^2 - 2n_3^2 - 1\right) \\ 6n_1n_3\left(4n_2^2 - 1\right) \\ 6n_2n_3\left(4n_1^2 - 1\right) \end{vmatrix}, \quad \Psi_- = \frac{i\,c_3}{A}\begin{vmatrix} 4n_3\left(4n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1\right) \\ -4n_3\left(4n_2^2 + n_1^2 + n_3^2 - 1\right) \\ 12n_3\left(n_1^2 - n_2^2\right) \\ 2n_2\left(2n_1^2 - 4n_2^2 + 2n_3^2 + 1\right) \\ 2n_1\left(4n_1^2 - 2n_2^2 - 2n_3^2 - 1\right) \end{vmatrix}. \qquad (2.10)$$

После упрощения получаем

$$\Psi_+ = \frac{c_3}{A}\begin{vmatrix} 12n_1n_2(2n_1^2-1) \\ -12n_1n_2(1-n_2^2) \\ 24n_1n_2n_3^2 \\ 6n_1n_3\left(4n_2^2-1\right) \\ 6n_2n_3\left(4n_1^2-1\right) \end{vmatrix}, \quad \Psi_- = \frac{i\,c_3}{A}\begin{vmatrix} 12n_1^2n_3 \\ -12n_2^2n_3 \\ 12n_3\left(n_1^2-n_2^2\right) \\ 6n_2(1-2n_2^2) \\ 6n_1(2n_1^2-1) \end{vmatrix}. \qquad (2.11)$$

Аналогично исследуем систему 6 уравнений (2.7) при $\sigma=+2i$. Ранг матрицы равен 5. Отбрасываем уравнение, отвечающее нижней строке. Пусть c_3 – свободный параметр, решение имеет вид

$$\sigma=+2i, \quad \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\left(3n_2^2-4\right)n_1^2-4n_2^2-n_3^2+4}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} c_3\left(2n_2n_1^3-4in_3n_1^2-n_2\left(n_2^2+n_3^2+2\right)n_1-in_3\left(n_2^2+n_3^2-4\right)\right) \\ -c_3\left(n_2n_1^3-in_3n_1^2+n_2\left(-2n_2^2+n_3^2+2\right)n_1-in_3\left(4n_2^2+n_3^2-4\right)\right) \\ -c_3\left(-2n_1n_2n_3^2-3i\left(n_1^2-n_2^2\right)n_3+n_1n_2\left(n_1^2+n_2^2-4\right)\right) \\ ic_3\left(n_2n_3^2-3in_1\left(n_2^2-1\right)n_3+n_2\left(n_1^2-2n_2^2+2\right)\right) \\ c_3\left(2in_1^3+3n_2n_3n_1^2-i\left(n_2^2+n_3^2+2\right)n_1-3n_2n_3\right) \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

Знаменатель можно преобразовать так:

$$\left(3n_2^2-4\right)n_1^2-4n_2^2-n_3^2+4=3(n_1^2n_2^2+n_3^2)=B.$$

Решение со спиральностью $\sigma=-2i$ следует из найденного заменой $i\to-i$. Выражения для комбинаций

$$\Phi_+=\psi_{\sigma=+2i}+\psi_{\sigma=-2i}, \quad \Phi_-=\psi_{\sigma=+2i}-\psi_{\sigma=-2i}$$

будут иметь более простой вид:

$$\psi_+ = \frac{c_3}{B}\begin{vmatrix} 2n_1n_2\left(2n_1^2-n_2^2-n_3^2-2\right) \\ -2n_1n_2\left(n_1^2-2n_2^2+n_3^2+2\right) \\ -2n_1n_2\left(n_1^2+n_2^2-2\left(n_3^2+2\right)\right) \\ 6n_1n_3\left(n_2^2-1\right) \\ 6n_2n_3\left(n_1^2-1\right) \end{vmatrix}, \quad \psi_- = \frac{i\,c_3}{B}\begin{vmatrix} 2n_3\left(4n_1^2+n_2^2+n_3^2-4\right) \\ -2n_3\left(n_1^2+4n_2^2+n_3^2-4\right) \\ 6n_3\left(n_1^2-n_2^2\right) \\ 2n_2\left(n_1^2-2n_2^2+n_3^2+2\right) \\ 2n_1\left(2n_1^2-n_2^2-n_3^2-2\right) \end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

После упрощения получаем

$$\psi_+ = \frac{c_3}{B}\begin{vmatrix} 6n_1n_2(n_1^2-1) \\ -6n_1n_2(1-n_2^2) \\ 6n_1n_2(n_3^2+1) \\ 6n_1n_3\left(n_2^2-1\right) \\ 6n_2n_3\left(n_1^2-1\right) \end{vmatrix}, \quad \psi_- = \frac{i\,c_3}{B}\begin{vmatrix} 6n_3(n_1^2-1) \\ -6n_3(n_2^2-1) \\ 6n_3\left(n_1^2-n_2^2\right) \\ 6n_2(1-n_2^2) \\ 6n_1(n_1^2-1) \end{vmatrix}. \tag{2.14}$$

Теперь рассмотрим подсистему из трех уравнений:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & -n_3 & n_2 \\ n_3 & -\sigma & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & -\sigma \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \det = -\sigma\left(1+\sigma^2\right). \tag{2.15}$$

Сначала исследуем случай $\sigma = 0$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ранг матрицы равен 2. Отбрасываем уравнение, соответствующее нижней строке, свободной переменной выбираем d_3. Решение имеет вид

$$\sigma = 0, \quad d_1 = \frac{n_1}{n_3}d_3, \quad d_2 = \frac{n_2}{n_3}d_3. \tag{2.16}$$

Теперь исследуем случай $\sigma = +i$:

$$\begin{vmatrix} -i & -n_3 & n_2 \\ n_3 & -i & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & -i \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг равен 2, отбрасываем уравнение, соответствующее нижней строке, свободной переменной выбираем d_3. Решение имеет вид

$$\sigma = +i, \quad \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} = \frac{d_3}{n_3^2-1}\begin{vmatrix} in_2 + n_1n_3 \\ n_2n_3 - in_1 \end{vmatrix}. \tag{2.17}$$

Решение со спиральностью $\sigma = -i$ следует из найденного заменой $i \to -i$. Более простые решения задаются равенствами

$$\Psi_+ = d_3\begin{vmatrix} \dfrac{2n_1n_3}{n_3^2-1} \\ \dfrac{2n_2n_3}{n_3^2-1} \end{vmatrix}, \quad \Psi_- = \frac{i\,d_3}{n_3^2-1}\begin{vmatrix} 2n_2 \\ -2n_1 \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Соберем результаты о структуре собственных состояний оператора спиральности вместе

$$
\begin{array}{llll}
6: & \sigma = 0, & f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0,\ \vec{d} = 0,\ f_1 = 0,\ c_3 - \text{любое}; \\
6: & \sigma = 0, & f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0,\ \vec{d} = 0,\ f_1 - \text{любое},\ c_3 = 0; \\
6: & \sigma = \pm i, & f_1, f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0,\ \vec{d} = 0,\ c_3 - \text{любое}; \\
6: & \sigma = \pm 2i, & f_1, f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0,\ \vec{d} = 0,\ c_3 - \text{любое}; \\
3: & \sigma = 0, & d_1, d_2, & f_0 = 0,\ \vec{f} = 0,\ \vec{c} = 0,\ d_3 - \text{любое}; \\
3: & \sigma = \pm i, & d_1, d_2, & f_0 = 0,\ \vec{f} = 0,\ \vec{c} = 0,\ d_3 - \text{любое}; \\
1: & \sigma = 0, & f_0, & \vec{f} = 0,\ \vec{c} = 0,\ \vec{d} = 0,\ f_0 - \text{любое}.
\end{array} \tag{2.19}
$$

3. Классификация решений и оператор спиральности

Будем следить за известными пятью независимыми решениями уравнений Паули – Фирца для массивной частицы [26] (выбираем нормировочные множители из соображений простоты; используем обозначение $n_j = k_j/k,\ k_0/k = E, E > 0$):

$$
\Phi_1 = \begin{vmatrix} 2En_1n_2 \\ 0 \\ E(E^2 - n_1n_2) \\ n_2(E^2 + n_1^2) \\ n_1(E^2 - n_1^2) \end{vmatrix},\quad
\Phi_2 = \begin{vmatrix} 2En_1n_2 \\ 0 \\ E(E^2 - n_2^2) \\ n_2(E^2 - n_2^2) \\ n_1(E^2 + n_2^2) \end{vmatrix},\quad
\Phi_3 = \begin{vmatrix} 2En_1n_2 \\ -2En_2n_3 \\ E(E^2 + n_3^2) \\ n_2(E^2 - n_3^2) \\ n_1(E^2 + n_3^2) \end{vmatrix},
$$
$$
\Phi_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ -2En_2^2 \\ 0 \\ -2n_2^2n_3 \\ 2n_1n_2n_3 \end{vmatrix},\quad
\Phi_5 = \begin{vmatrix} 0 \\ 2E^2n_2 \\ -2E^2n_3 \\ 0 \\ -2En_1n_3 \end{vmatrix}. \tag{3.1}
$$

К аналогичной форме приводим выражения и для спиральных решений:

$$
\sigma = 0,\quad \Psi_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},\quad
\Psi_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\quad
\Psi_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ n_2^2 - n_1^2 \\ n_3^2 - n_1^2 \\ n_2n_3 \\ n_1n_3 \\ n_1n_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\quad
\Psi_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 0 \end{vmatrix}; \tag{3.2}
$$

$\sigma = \pm i,$

$$\Psi_5=\begin{vmatrix} 12n_1n_2(2n_1^2-1) \\ -12n_1n_2(1-n_2^2) \\ 24n_1n_2n_3^2 \\ 6n_1n_3\left(4n_2^2-1\right) \\ 6n_2n_3\left(4n_1^2-1\right) \\ 3(4n_1^2n_2^2-n_1^2-n_2^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\quad \Psi_6=\begin{vmatrix} i12n_1^2n_3 \\ -i12n_2^2n_3 \\ i12n_3(n_1^2-n_2^2) \\ i6n_2(1-2n_2^2) \\ i6n_1(2n_1^2-1) \\ 3(4n_1^2n_2^2-n_1^2-n_2^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\quad \Psi_7=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2n_1n_3 \\ 2n_2n_3 \\ n_3^2-1 \\ 0 \end{vmatrix},\quad \Psi_8=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2n_2i \\ -2n_1i \\ n_3^2-1 \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad (3.3)$$

$$\sigma=\pm 2i,\quad \Psi_9=\begin{vmatrix} 6n_1n_2(n_1^2-1) \\ -6n_1n_2(1-n_2^2) \\ 6n_1n_2(n_3^2+1) \\ 6n_1n_3\left(n_2^2-1\right) \\ 6n_2n_3\left(n_1^2-1\right) \\ 3(n_1^2n_2^2+n_3^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},\qquad \Psi_{10}=\begin{vmatrix} i6n_3(n_1^2-1) \\ -i6n_3(n_2^2-1) \\ i6n_3\left(n_1^2-n_2^2\right) \\ i6n_2(1-n_2^2) \\ i6n_1(n_1^2-1) \\ 3(n_1^2n_2^2+n_3^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \qquad (3.4)$$

Должны существовать линейные разложения пяти известных решений по спиральным:

$$\begin{gathered} x_1\Psi_1+x_2\Psi_2+x_3\Psi_3+x_4\Psi_4+x_5\Psi_5+x_6\Psi_6+x_7\Psi_7+x_8\Psi_8+x_9\Psi_9+x_{10}\Psi_{10}=\Phi_1, \\ x_1\Psi_1+x_2\Psi_2+x_3\Psi_3+x_4\Psi_4+x_5\Psi_5+x_6\Psi_6+x_7\Psi_7+x_8\Psi_8+x_9\Psi_9+x_{10}\Psi_{10}=\Phi_2, \\ x_1\Psi_1+x_2\Psi_2+x_3\Psi_3+x_4\Psi_4+x_5\Psi_5+x_6\Psi_6+x_7\Psi_7+x_8\Psi_8+x_9\Psi_9+x_{10}\Psi_{10}=\Phi_3, \\ x_1\Psi_1+x_2\Psi_2+x_3\Psi_3+x_4\Psi_4+x_5\Psi_5+x_6\Psi_6+x_7\Psi_7+x_8\Psi_8+x_9\Psi_9+x_{10}\Psi_{10}=\Phi_4, \\ x_1\Psi_1+x_2\Psi_2+x_3\Psi_3+x_4\Psi_4+x_5\Psi_5+x_6\Psi_6+x_7\Psi_7+x_8\Psi_8+x_9\Psi_9+x_{10}\Psi_{10}=\Phi_5. \end{gathered} \qquad (3.5)$$

Каждое из этих пяти разложений дает десятимерную линейную неоднородную систему уравнений (используем матричную запись):

$$AX=\Phi_s,\quad s=1,2,3,4,5;\quad X=\{x_i\},\quad i=1,\dots,10; \qquad (3.6)$$

столбцы матрицы A совпадают со спиральными решениями Ψ_j. В общем случае матрица A оказывается очень громоздкой, поэтому исследуем более простые случаи.

Пусть $n_1 = 0$, при этом разложение для Φ_1 определяется соотношениями

$$X_{(1)} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{iE^2 n_3\left(n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ -\dfrac{E^3}{3} \\ 0 \\ -\dfrac{iE^2\left(n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ -\dfrac{iE^2}{2} \\ \dfrac{E^3}{3} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Phi_1 = x_4\Psi_4 + x_5\Psi_5 + x_7\Psi_7 + x_8\Psi_8 + x_9\Psi_9. \tag{3.7}$$

Аналогично находим остальные четыре решения:

$$X_{(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{in_3\left(n_3^2-1\right)\left(E^2+n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ -\dfrac{1}{3}E\left(E^2+n_3^2-1\right) \\ 0 \\ -\dfrac{i\left(n_3^2-1\right)\left(E^2+n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ -\dfrac{1}{2}i\left(E^2+n_3^2-1\right) \\ \dfrac{1}{3}E\left(E^2+n_3^2-1\right) \\ 0 \end{vmatrix}, X_{(3)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{in_3\left(E^2-n_3^2\right)\left(n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ -\dfrac{E^3}{3} \\ 0 \\ \dfrac{i\left(n_3^2-1\right)\left(n_3^2-E^2\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ -\dfrac{1}{2}i\left(E^2-n_3^2\right) \\ \dfrac{1}{3}\left(E^3+E\right) \\ 0 \end{vmatrix}, X_{(4)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{in_3^2\left(n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ \dfrac{En_3}{6} \\ 0 \\ \dfrac{in_3\left(n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ \dfrac{in_3}{2} \\ -\dfrac{E\left(n_3^2-1\right)}{6n_3} \\ 0 \end{vmatrix}, X_{(5)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{En_3}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{E\left(n_3^2+1\right)}{6n_3} \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим случай $n_2 = 0$, здесь имеем следующие пять решений:

$$X_{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{in_3\left(n_3^2-1\right)\left(E^2+n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ -\frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \frac{i\left(n_3^2-1\right)\left(E^2+n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ \frac{1}{2}i\left(E^2+n_3^2-1\right) \\ \frac{E^3}{3} \\ 0 \end{vmatrix}, X_{(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{iE^2n_3\left(n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ -\frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \frac{iE^2\left(n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ \frac{iE^2}{2} \\ \frac{E^3}{3} \\ 0 \end{vmatrix}, X_{(3)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{in_3\left(n_3^2-1\right)\left(E^2+n_3^2\right)}{n_3^2+1} \\ -\frac{1}{3}E\left(E^2+n_3^2\right) \\ 0 \\ \frac{i\left(n_3^2-1\right)\left(E^2+n_3^2\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ \frac{1}{2}i\left(E^2+n_3^2\right) \\ \frac{1}{3}E\left(E^2+n_3^2\right) \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$X_{(4)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{in_3^2\left(n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ -\frac{En_3}{6} \\ 0 \\ \frac{in_3\left(n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ \frac{in_3}{2} \\ \frac{E\left(n_3^2-1\right)}{6n_3} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad X_{(5)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{in_3^2\left(n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ \frac{En_3}{3} \\ 0 \\ -\frac{in_3\left(n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ -\frac{in_3}{2} \\ -\frac{En_3}{3} \\ 0 \end{vmatrix}. \qquad (3.8)$$

Пусть теперь $n_3 = 0$, в этом случае имеем решения:

$$X_{(1)} = \left| \begin{array}{c} 2En_2\sqrt{1-n_2^2} \\ 2n_2\sqrt{1-n_2^2}\left(\dfrac{\left(n_2^6-7n_2^4+7n_2^2-2\right)\left(E^3-En_2\sqrt{1-n_2^2}\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}+E\left(\dfrac{2n_2^6+n_2^4+4n_2^2-4}{2\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)}-1\right)\right) \\ \dfrac{En_2\sqrt{1-n_2^2}\left(-6E^2+n_2\left(n_2\left(10E^2+2n_2\left(n_2\left(-E^2+n_2\left(n_2+\sqrt{1-n_2^2}\right)-4\right)-5\sqrt{1-n_2^2}\right)+7\right)+6\sqrt{1-n_2^2}\right)-2\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ 2E^2n_2\sqrt{1-n_2^2} \\ -\dfrac{E\left(n_2\left(n_2\left(n_2^4-5n_2^2-4\sqrt{1-n_2^2}n_2+4E^2+4\right)+2\sqrt{1-n_2^2}\right)-2E^2\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2}i\left(E^2+\left(1-2E^2\right)n_2^2-1\right) \\ \dfrac{1}{2}i\left(E^2+\left(1-2E^2\right)n_2^2-1\right) \\ \dfrac{E\left(n_2\left(n_2\left(2E^2-2n_2\left(n_2\left(-E^2+n_2\sqrt{1-n_2^2}+2\right)+\sqrt{1-n_2^2}\right)+3\right)+2\sqrt{1-n_2^2}\right)-2E^2\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \end{array} \right|,$$

$$X_{(2)} = \left| \begin{array}{c} 2En_2\sqrt{1-n_2^2} \\ \dfrac{En_2\sqrt{1-n_2^2}\left(-2n_2^8+2\left(E^2+2\right)n_2^6+\left(1-14E^2\right)n_2^4+\left(14E^2-1\right)n_2^2-4E^2\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ \dfrac{En_2\sqrt{1-n_2^2}\left(2n_2^6-2\left(E^2+2\right)n_2^4+\left(10E^2+1\right)n_2^2-6E^2+1\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ 2E^2n_2\sqrt{1-n_2^2} \\ \dfrac{E\left(-n_2^6+2n_2^4+\left(1-4E^2\right)n_2^2+2E^2\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2}i\left(E^2+\left(1-2E^2\right)n_2^2\right) \\ \dfrac{1}{2}i\left(E^2+\left(1-2E^2\right)n_2^2\right) \\ \dfrac{E\left(-2E^2+n_2^2\left(2E^2+2n_2^2\left(E^2+n_2^2-3\right)+1\right)+1\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \end{array} \right|,$$

$$X_{(3)} = \left| \begin{matrix} 2En_2\sqrt{1-n_2^2} \\ \dfrac{En_2\sqrt{1-n_2^2}\left(n_2^2\left(14E^2+2n_2^2\left(2n_2^4+\left(E^2-4\right)n_2^2-7E^2+4\right)-3\right)-4E^2\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ \dfrac{En_2\sqrt{1-n_2^2}\left(-6E^2+2n_2^2\left(5E^2-n_2^2\left(E^2+n_2^2-1\right)-1\right)+1\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ 2E^2n_2\sqrt{1-n_2^2} \\ -\dfrac{E\left(2n_2^2-1\right)\left(-n_2^4+n_2^2+2E^2\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2}iE^2\left(2n_2^2-1\right) \\ \dfrac{1}{2}iE^2\left(1-2n_2^2\right) \\ \dfrac{E\left(-2E^2+2n_2^2\left(-2n_2^4+\left(E^2+4\right)n_2^2+E^2-1\right)-1\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \end{matrix} \right|,$$

$$X_{(4)} = \left| \begin{matrix} 0 \\ -\dfrac{iEn_2^2\left(n_2^8-8n_2^6+14n_2^4-9n_2^2+2\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ \dfrac{iEn_2^2\left(n_2^6-6n_2^4+8n_2^2-3\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ 0 \\ \dfrac{iEn_2\left(1-2n_2^2\right)\sqrt{1-n_2^2}}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{iEn_2\sqrt{1-n_2^2}\left(n_2^4+n_2^2-1\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ \dfrac{E}{6n_2\sqrt{1-n_2^2}} \end{matrix} \right|, \quad X_{(5)} = \left| \begin{matrix} 0 \\ -\dfrac{iEn_2^2\left(n_2^2-1\right)^2\left(n_2^6-7n_2^4+7n_2^2-2\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ \dfrac{iEn_2^2\left(n_2^2-1\right)^2\left(n_2^4-5n_2^2+3\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ 0 \\ -\dfrac{iE\sqrt{1-n_2^2}\left(2n_2^5-3n_2^3+n_2\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ \dfrac{En_2\sqrt{1-n_2^2}}{6-12n_2^2} \\ -n_2\sqrt{1-n_2^2} \\ 0 \\ \dfrac{iEn_2\sqrt{1-n_2^2}\left(n_2^6-2n_2^2+1\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ -\dfrac{En_2}{6\sqrt{1-n_2^2}} \end{matrix} \right|. \qquad (3.9)$$

Теперь обращаемся к случаю безмассовой частицы. Здесь физическими решениями, не содержащими калибровочных компонент, являются только два [25]:

$$\Phi_1^{phys} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_1 \\ -n_2 \\ 0 \\ -n_2 n_3 \\ n_1 n_3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Phi_2^{phys} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_2 \\ -n_3 \\ 0 \\ -n_1 n_3 \\ n_1 n_2 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

Эти решения должны раскладываться по спиральным, как и в массивном случае. Также рассматриваем три простых случая.

При $n_1 = 0$ находим следующие решения:

$$\Phi_1^{phys}, \quad X_{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{in_3^2\left(n_3^2-1\right)}{n_3^2+1} \\ \dfrac{n_3}{6} \\ 0 \\ \dfrac{in_3\left(n_3^2-1\right)}{2\left(n_3^2+1\right)} \\ \dfrac{in_3}{2} \\ -\dfrac{n_3^2-1}{6n_3} \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \Phi_2^{phys}, \quad X_{(2)} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{n_3}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{n_3^2+1}{6n_3} \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

При $n_2 = 0$ имеем разложения

$$\Phi_1^{phys},\quad X_{(1)}=\begin{vmatrix} 0\\ n_3-\dfrac{1}{n_3}\\ \dfrac{n_3^2-1}{n_3^3}\\ n_3\left(1-\dfrac{2}{n_3^2+1}\right)\\ \dfrac{i\left(n_3^2-1\right)^2}{6n_3^2}\\ \dfrac{1}{6}\\ \dfrac{1}{n_3^2+1}-1\\ 0\\ -\dfrac{i\left(n_3^2-1\right)^2}{6n_3^2}\\ \dfrac{1}{6}\left(-2+\dfrac{3}{n_3^2}-\dfrac{1}{n_3^4}\right)\end{vmatrix},\quad \Phi_2^{phys},\quad X_{(2)}=\begin{vmatrix} 0\\ \dfrac{1}{n_3}-n_3\\ \dfrac{1}{n_3^3}-\dfrac{1}{n_3}\\ 0\\ \dfrac{n_3}{3}-\dfrac{i\left(n_3^2-1\right)^2}{6n_3^2}\\ -\dfrac{1}{6}\\ 0\\ 0\\ \dfrac{i\left(n_3^2-1\right)^2}{6n_3^2}-\dfrac{n_3}{3}\\ \dfrac{1}{6}\left(2-\dfrac{3}{n_3^2}+\dfrac{1}{n_3^4}\right)\end{vmatrix}. \qquad (3.12)$$

При $n_3=0$ имеем разложения

$$X_{(1)}=\begin{vmatrix} 0\\ \dfrac{in_2\left(n_2^2-1\right)^2\left(n_2^6-7n_2^4+7n_2^2-2\right)\sqrt{1-n_3^2}}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}\\ -\dfrac{in_2\left(n_2^2-1\right)^2\left(n_2^4-5n_2^2+3\right)\sqrt{1-n_3^2}}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}\\ -\sqrt{1-n_2^2}\,n_3\sqrt{1-n_3^2}\\ -\dfrac{i\left(1-n_2^2\right)^{3/2}\left(2n_2^2-1\right)\sqrt{1-n_3^2}}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)}\\ \dfrac{\sqrt{1-n_2^2}\sqrt{1-n_3^2}}{12n_2^2-6}\\ -\dfrac{1}{2}in_2n_3\sqrt{1-n_3^2}\\ \dfrac{1}{2}in_2n_3\sqrt{1-n_3^2}\\ \dfrac{i\left(1-n_2^2\right)^{3/2}\left(n_2^4+n_2^2-1\right)\sqrt{1-n_3^2}}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)}\\ \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{6\sqrt{1-n_2^2}}\end{vmatrix}$$

$$X_{(2)} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -\dfrac{in_2\left(n_2^6-7n_2^4+7n_2^2-2\right)\left(\left(n_2^2-1\right)^2\sqrt{1-n_3^2}-2i\sqrt{1-n_2^2}\,n_3\right)}{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1} \\ \dfrac{in_2\left(n_2^6-6n_2^4+8n_2^2-3\right)\left(2in_3-\left(1-n_2^2\right)^{3/2}\sqrt{1-n_3^2}\right)}{\sqrt{1-n_2^2}\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ 0 \\ \dfrac{\left(2n_2^2-1\right)\left(i\sqrt{1-n_3^2}\left(1-n_2^2\right)^{3/2}+2n_3\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ \dfrac{\sqrt{1-n_2^2}\sqrt{1-n_3^2}}{6-12n_2^2} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{i\left(n_2^4+n_2^2-1\right)\left(2in_3-\left(1-n_2^2\right)^{3/2}\sqrt{1-n_3^2}\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \\ -\dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{6\sqrt{1-n_2^2}} \end{array} \right|. \qquad (3.13)$$

Заключение

Решена задача о нахождении всех собственных состояний оператора спиральности для симметричного тензора 2-го ранга, описывающего поле со спином 2. Независимые компоненты симметричного тензора описываются 10-мерной функцией, соответственно, задача сводится к анализу уравнения на собственные значения в 10-мерном пространстве. Найден набор собственных значений: $\sigma = 0$ с кратностью 4, $\sigma = \pm i$ с кратностью 2, $\sigma = \pm 2i$ с кратностью 1; получены явные представления для 10 соответствующих собственных векторов. В случае массивной частицы 5 независимых решений исходной системы уравнений Паули – Фирца в виде плоских волн разложены в линейные комбинации по спиральным решениям. В случае безмассовой частицы два физических независимых решения, не содержащих калибровочных компонент, также разложены по спиральным состояниям.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. De Broglie, L. Sur l’interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1941. – Vol. 212. – P. 657–659.

4. Pauli, W. Relativistic field theories of elementary particles / W. Pauli // Rev. Mod. Phys. – 1941. – Vol. 13. – P. 203–232.

5. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

6. Фрадкин, Э. Е. К теории частиц с высшими спинами / Э. Е. Фрадкин // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.

7. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.

8. Крылов, Б. В. Уравнения первого порядка для гравитона / Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // Докл. АН БССР. – 1967. – Т. 11. – С. 681–684.

9. Богуш, А. А. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 / А. А. Богуш, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1968. – № 1. – С. 74–81.

10. Федоров, Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.

11. Крылов, Б. В. О системах уравнений первого порядка для гравитона / Б. В. Крылов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1972. – № 6. – С. 82–89.

12. Федоров, Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля в вакууме / Ф. И. Федоров, А. А. Кирилов // Acta Physica Polonica. B. – 1976. – Vol. 7, № 3.

13. Кисель, В. В. О релятивистских волновых уравнениях для массивной частицы со спином 2 / В. В. Кисель // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1986. – № 5. – С. 94–99.

14. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитным и мезонным полями / В. Я. Файнберг // Тр. Физ. ин-та им. П. Н. Лебедева АН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

15. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, nr 2. – P. 325–326.

16. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field / H. A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.

17. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces / H. A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1962. – Vol. 25. – P. 486–496.

18. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. (N. Y.). – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 121–145.

19. Jonson, K. The impossibility of a consistent theory of a charged higher spin Fermi fields / K. Jonson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 126–145.

20. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188, nr 5. – P. 2218–2222.

21. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.

22. Loide, R. K. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations / R. K. Loide // J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19, nr 5. – P. 827–829.

23. Vasiliev, M. A. More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions / M. A. Vasiliev // Phys. Lett. B. – 1992. – Vol. 285. – P. 225–234.

24. Buchbinder, I. L. On consistent equations for massive spine-2 field coupled to gravity in string theory / I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, V. D. Pershin // Phys. Lett. B. – 1999. – Vol. 466. – P. 216–226.

25. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

26. Структура плоских волн для поля со спином 2, массивный и безмассовый случаи / А. В. Бурый [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 1–11.

REFERENCES

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. De Broglie, L. Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1941. – Vol. 212. – P. 657–659.

4. Pauli, W. Relativistic field theories of elementary particles / W. Pauli // Rev. Mod. Phys. – 1941. – Vol. 13. – P. 203–232.

5. Giel'fand, I. M. Obshchije rieliativistski invariantnyje uravnienija i bieskoniechnomiernyje priedstavlienija gruppy Lorenca / I. M. Giel'fand, A. M. Yaglom // Zhurn. ekspierim. i tieoriet. fiziki. – 1948. – T. 18, vyp. 8. – S. 703–733.

6. Fradkin, E. S. K tieorii chastic s vysshimi spinami / E. S. Fradkin // Zhurn. ekspierimient. i tieoriet. fiziki. – 1950. – T. 20, vyp. 1. – S. 27–38.

7. Fiodorov, F. I. K tieorii chasticy so spinom 2 / F. I. Fiedorov // Uchion. zap. BGU. Sier. fiz.-mat. – 1951. – Vyp. 12. – S. 156–173.

8. Krylov, B. V. Uravnienija piervogo poriadka dlia gravitona / B. V. Krylov, F. I. Fiodorov // Dokl. AN BSSR. – 1967. – T. 11. – S. 681–684.

9. Bogush, A. A. O matricakh uravnienij dlia chastic so spinom 2 / A. A. Bogush, B. V. Krylov, F. I. Fiodorov // Vies. AN BSSR. Sier. fiz.-mat. navuk. – 1968. – № 1. – S. 74–81.

10. Fiodorov, F. I. Uravnienija piervogo poriadka dlia gravitacionnogo polia / F. I. Fiodorov // Dokl. AN SSSR. – 1968. – T. 179, № 4. – S. 802–805.

11. Krylov, B. V. O sistiemakh uravnienij piervogo poriadka dlia gravitona / B. V. Krylov // Vies. AN BSSR. Sier. fiz.-mat. navuk. – 1972. – № 6. – S. 82–89.

12. Fiodorov, F. I. Uravnienija piervogo poriadka dlia gravitacionnogo polia v vakuumie / F. I. Fiodorov, A. A. Kirilov // Acta Physica Polonica. B. – 1976. – Vol. 7, № 3.

13. Kisiel', V. V. O rieliativistskikh volnovykh uravnienijakh dlia massivnoj chasticy so spinom 2 / V. V. Kisiel' // Vies. AN BSSR. Sier. fiz.-mat. navuk. – 1986. – № 5. – S. 94–99.

14. Fajnberg, V. Ya. K tieorii vzaimodiejstvija chastic s vysshymi spinami s eliektromagnitnym i mizonnym poliami / V. Ya. Fajnberg // Tr. Fiz. in-ta im. P. N. Liebiedieva Akad. nauk SSSR. – 1955. – T. 6. – S. 269–332.

15. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, nr 2. – P. 325–326.

16. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field / H. A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.

17. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces / H. A. Buchdahl // Nuovo Cim. – 1962. – Vol. 25. – P. 486–496.

18. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. (N. Y.). – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 121–145.

19. Jonson, K. The impossibility of a consistent theory of a charged higher spin Fermi fields / K. Jonson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 126–145.

20. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188, nr 5. – P. 2218–2222.

21. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.

22. Loide, R. K. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations / R. K. Loide // J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19, nr 5. – P. 827–829.

23. Vasiliev, M. A. More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions / M. A. Vasiliev // Phys. Lett. B. – 1992. – Vol. 285. – P. 225–234.

24. Buchbinder, I. L. On consistent equations for massive spine-2 field coupled to gravity in string theory / I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, V. D. Pershin // Phys. Lett. B. – 1999. – Vol. 466. – P. 216–226.

25. Plietiukhov, V. A. Rieliativistskije volnovyje uravnienija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietiukhov, V. M. Ried’kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielarus. navuka, 2015. – 328 s.

26. Structura ploskikh voln dlia polia so spinom 2, massivnyj i biezmassovyj sluchai / A. V. Buryj [i dr.] // Probliemy fiziki, informatiki i tiekhniki. – 2021. – № 2 (47). – S. 1–11.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 16.02.2021