УДК 513.82

Александр Андреевич Юдов[1], Елена Вячеславовна Кисилюк[2]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Aleksandr Yudov[1], Elena Kisilyuk[2]
[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
at the Brest State A. S. Pushkin University
[2]Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Informatics
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА $^1R_6$

В ходе исследования классифицированы однородные редуктивные пространства с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства $^1R_6$ и все их редуктивные дополнения.

Ключевые слова: *группа, подгруппа, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, коммутатор, редуктивное однородное пространство, редуктивное дополнение.*

Differential Geometry of Homogeneous Spaces with a Structure Group – the Lie Group of Motions of the Space $^1R_6$

The study classified homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the space $^1R_6$ and all their reductive complements.

Key words: *group, subgroup, homogeneous space, Lie group, Lie algebra, commutator, reductive homogeneous space, reductive complement.*

Введение

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности, с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства $^1R_6$.

Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства $^1R_6$.

Определение 1. Однородное пространство H / G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли *H* распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i} , \tag{1}$$

причем подпространство *m* инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Рассмотрим однородное пространство H/G_2, где G_2 – подгруппа Ли группы Ли H вращений шестимерного Лоренцового пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{G_2} = \{i_7\}$, где

$$i_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению пятнадцати случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \psi \end{pmatrix}.$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов $X_1 \dots X_{14}$, определяющих инвариантные подпространства m, причем базис в алгебре $\overline{H}$ выберем следующим образом: $i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}$. Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, \dots, X_{14}\}$ задаются векторами:

$$\begin{gathered} X_1 = i_8 + \lambda i_{21}, X_2 = i_9 + \mu i_{21}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{21}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{21}, X_5 = i_{12} + s i_{21}, \\ X_6 = i_{13} + t i_{21}, X_7 = i_{14} + p i_{21}, X_8 = i_{15} + q i_{21}, X_9 = i_7 + r i_{21},\ X_{10} = i_{16} + \\ + \varepsilon i_{21}, X_{11} = i_{17} + \omega i_{21}, X_{12} = i_{18} + \rho i_{21}, X_{13} = i_{19} + \varphi i_{21}, X_{14} = i_{20} + \psi i_{21}. \end{gathered} \quad (2)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} &[a, X_1] = [a, i_8] + \lambda[a, i_{21}] = i_{12} \\ &[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{21}] = i_{13} \\ &[a, X_3] = [a, i_{10}] + \nu[a, i_{21}] = i_{14} \\ &[a, X_4] = [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{21}] = i_{15} \\ &[a, X_5] = [a, i_{12}] + s[a, i_{21}] = i_8 \\ &[a, X_6] = [a, i_{13}] + t[a, i_{21}] = i_9 \\ &[a, X_7] = [a, i_{14}] + p[a, i_{21}] = i_{10} \\ &[a, X_8] = [a, i_{15}] + q[a, i_{21}] = i_{11} \\ &[a, X_9] = [a, i_7] + r[a, i_{21}] = 0 \\ &[a, X_{10}] = [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{21}] = 0 \\ &[a, X_{11}] = [a, i_{17}] + \omega[a, i_{21}] = 0 \\ &[a, X_{12}] = [a, i_{18}] + \rho[a, i_{21}] = 0 \\ &[a, X_{13}] = [a, i_{19}] + \varphi[a, i_{21}] = 0 \\ &[a, X_{14}] = [a, i_{20}] + \psi[a, i_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{gathered}\alpha_1(i_8+\lambda i_{21})+\beta_1(i_9+\mu i_{21})+\gamma_1(i_{10}+\nu i_{21})+\delta_1(i_{11}+\sigma i_{21})+\omega_1(i_{12}+\\ +s i_{21})+\varepsilon_1(i_{13}+t i_{21})+\theta_1(i_{14}+p i_{21})+\varphi_1(i_{15}+q i_{21})+\psi_1(i_7+\\ +r i_{21})+\rho_1(i_{16}+\varepsilon i_{21})+p_1(i_{17}+\omega i_{21})+q_1(i_{18}+\rho i_{21})+r_1(i_{19}+\varphi i_{21})+\\ +f_1(i_{20}+\psi i_{21})=\alpha_1 i_8+\beta_1 i_9+\gamma_1 i_{10}+\delta_1 i_{11}+\omega_1 i_{12}+\varepsilon_1 i_{13}+\theta_1 i_{14}+\varphi_1 i_{15}+\\ +\psi_1 i_7+\rho_1 i_{16}+p_1 i_{17}+q_1 i_{18}+r_1 i_{19}+f_1 i_{20}+i_{21}(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1+\sigma\delta_1+\\ +s\omega_1+t\varepsilon_1+p\theta_1+q\varphi_1+r\psi_1+\varepsilon\rho_1+\omega p_1+\rho q_1+\varphi r_1+\psi f_1).\end{gathered} \tag{4}$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\begin{gathered}\omega_1=1, \alpha_1=0, \beta_1=0, \gamma_1=0, \delta_1=0, \varepsilon_1=0, \theta_1=0, \varphi_1=0, \psi_1=0, \rho_1=0, p_1=0,\ q_1=\\ =0,\ r_1=0, f_1=0, (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1+\sigma\delta_1+s\omega_1+t\varepsilon_1+p\theta_1+q\varphi_1+r\psi_1+\varepsilon\rho_1+\\ +\omega p_1+\rho q_1+\varphi r_1+\psi f_1)=0.\end{gathered}$$

Отсюда следует: $s=0$.

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3), получим:

$$\begin{gathered}\varepsilon_2=1, \alpha_2=0, \beta_2=0, \gamma_2=0, \delta_2=0, \omega_2=0, \theta_2=0, \varphi_2=0, \psi_2=0, \rho_2=0, p_2=0,\\ q_2=0,\ r_2=0, f_2=0, (\lambda\alpha_2+\mu\beta_2+\nu\gamma_2+\sigma\delta_2+s\omega_2+t\varepsilon_2+p\theta_2+q\varphi_2+r\psi_2+\varepsilon\rho_2+\\ +\omega p_2+\rho q_2+\varphi r_2+\psi f_2)=0.\end{gathered}$$

Отсюда следует: $t=0$.

Аналогично, сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\theta_3=1, p=0.$$

Сравнивая формулу (4) с четвертой формулой (3), получим:

$$\varphi_4=1, q=0.$$

Сравнивая формулу (4) с пятой формулой (3), получим:

$$\alpha_5=1, \lambda=0.$$

Сравнивая формулу (4) с шестой формулой (3), получим:

$$\beta_6=1, \mu=0.$$

Сравнивая формулу (4) с седьмой формулой (3), получим:

$$\gamma_7=1, \nu=0.$$

Сравнивая формулу (4) с восьмой формулой (3), получим:

$$\delta_8=1, \sigma=0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 1^0 система инвариантности имеет вид:

$$s=0, t=0, p=0, q=0, \lambda=0, \mu=0, \nu=0, \sigma=0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\begin{gathered}\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7+r i_{21}, i_{16}+\varepsilon i_{21}, i_{17}+\omega i_{21}, i_{18}+\rho i_{21}, i_{19}+\varphi i_{21}, i_{20}+\\ +\psi i_{21}\}.\end{gathered}$$

Из условия прямой суммы следует, что $r\neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде:

$$\begin{gathered}\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7+r i_{21}, i_{16}+\varepsilon i_{21}, i_{17}+\omega i_{21}, i_{18}+\rho i_{21}, i_{19}+\varphi i_{21}, i_{20}+\\ +\psi i_{21}\}.\end{gathered}$$

Аналогично рассматриваются случаи $2^0 - 15^0$.

$$2^0\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mu&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\vartheta&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\sigma&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&s&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&t&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&p&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&q&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&r&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&\varepsilon&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&\omega&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&\rho&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\varphi&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_8 + \lambda i_{20}, X_2 = i_9 + \mu i_{20}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{20}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{20}, X_5 = i_{12} + \\ + s i_{20}, X_6 = i_{13} + t i_{20}, X_7 = i_{14} + p i_{20}, X_8 = i_{15} + q i_{20}, X_9 = i_7 + i_{20}, X_{10} = \\ = i_{16} + \varepsilon i_{20}, X_{11} = i_{17} + \omega i_{20}, X_{12} = i_{18} + \rho i_{20}, X_{13} = i_{19} + \varphi i_{20}, X_{14} = i_{21}. \quad (5)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_8] + \lambda[a, i_{20}] = i_{12}\\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{20}] = i_{13}\\
&[a, X_3] = [a, i_{10}] + \nu[a, i_{20}] = i_{14}\\
&[a, X_4] = [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{20}] = i_{15}\\
&[a, X_5] = [a, i_{12}] + s[a, i_{20}] = i_8\\
&[a, X_6] = [a, i_{13}] + t[a, i_{20}] = i_9\\
&[a, X_7] = [a, i_{14}] + p[a, i_{20}] = i_{10}\\
&[a, X_8] = [a, i_{15}] + q[a, i_{20}] = i_{11}\\
&[a, X_9] = [a, i_7] + r[a, i_{20}] = 0\\
&[a, X_{10}] = [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{20}] = 0\\
&[a, X_{11}] = [a, i_{17}] + \omega[a, i_{20}] = 0\\
&[a, X_{12}] = [a, i_{18}] + \rho[a, i_{20}] = 0\\
&[a, X_{13}] = [a, i_{19}] + \varphi[a, i_{20}] = 0\\
&[a, X_{14}] = [a, i_{21}] = 0\,.
\end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \ldots, X_{14}\}$:

$$\alpha_1(i_8 + \lambda i_{20}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{20}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{20}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{20}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{20}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{20}) + \theta_1(i_{14} + p i_{20}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{20}) + \psi_1(i_7 + r i_{20}) + \\ + \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{20}) + p_1(i_{17} + \omega i_{20}) + q_1(i_{18} + \rho i_{20}) + r_1(i_{19} + \varphi i_{20}) + f_1 i_{21} = \\ = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + \\ + p_1 i_{17} + q_1 i_{18} + r_1 i_{19} + f_1 i_{21} + i_{20}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + \\ + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1 + + \omega p_1 + \rho q_1 + \varphi r_1). \quad (7)$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0,\ q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1 + \\ + \omega p_1 + \rho q_1 + \varphi r_1) = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0,$$
$$q_2 = 0,\ r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 + \sigma\delta_2 + s\omega_2 + t\varepsilon_2 + p\theta_2 + q\varphi_2 + r\psi_2 + \varepsilon\rho_2 +$$
$$+\omega p_2 + \rho q_2 + \varphi r_2) = 0.$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с четвертой формулой (6), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с пятой формулой (6), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с шестой формулой (6), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с седьмой формулой (6), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с восьмой формулой (6), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 2^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \ldots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{20}, i_{16} + \varepsilon i_{20}, i_{17} + \omega i_{20}, i_{18} + \rho i_{20}, i_{19} + \varphi i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$.

Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{20}, i_{16} + \varepsilon i_{20}, i_{17} + \omega i_{20}, i_{18} + \rho i_{20}, i_{19} + \varphi i_{20}, i_{21}\}.$$

$$3^0 \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \omega & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \rho & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 3^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_8 + \lambda i_{19}, X_2 = i_9 + \mu i_{19}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{19}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{19}, X_5 = i_{12} + s i_{19},$$
$$X_6 = i_{13} + t i_{19}, X_7 = i_{14} + p i_{19}, X_8 = i_{15} + q i_{19}, X_9 = i_7 + r i_{19}, X_{10} = i_{16} + \varepsilon i_{19}, \quad (8)$$
$$X_{11} = i_{17} + \omega i_{19}, X_{12} = i_{18} + \rho i_{19}, X_{13} = i_{20},\ X_{14} = i_{21}.$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_8] + \lambda[a, i_{19}] = i_{12}\\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{19}] = i_{13}\\
&[a, X_3] = [a, i_{10}] + \nu[a, i_{19}] = i_{14}\\
&[a, X_4] = [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{19}] = i_{15}\\
&[a, X_5] = [a, i_{12}] + s[a, i_{19}] = i_8\\
&[a, X_6] = [a, i_{13}] + t[a, i_{19}] = i_9\\
&[a, X_7] = [a, i_{14}] + p[a, i_{19}] = i_{10}\\
&[a, X_8] = [a, i_{15}] + q[a, i_{19}] = i_{11}\\
&[a, X_9] = [a, i_7] + r[a, i_{19}] = 0\\
&[a, X_{10}] = [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{19}] = 0\\
&[a, X_{11}] = [a, i_{17}] + \omega[a, i_{19}] = 0\\
&[a, X_{12}] = [a, i_{18}] + \rho[a, i_{19}] = 0\\
&[a, X_{13}] = [a, i_{20}] = 0\\
&[a, X_{14}] = [a, i_{21}] = 0\,.
\end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\alpha_1(i_8 + \lambda i_{19}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{19}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{19}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{19}) + \omega_1(i_{12} +$$
$$s i_{19}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{19}) + \theta_1(i_{14} + p i_{19}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{19}) + \psi_1(i_7 + r i_{19}) +$$
$$+\rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{19}) + p_1(i_{17} + \omega i_{19}) + q_1(i_{18} + \rho i_{19}) + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 +$$
$$+\beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + p_1 i_{17} + \quad (10)$$
$$+q_1 i_{18} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + i_{19}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 +$$
$$+q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1 + \omega p_1 + \rho q_1).$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9), получим:

$$\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0,\ q_1 =$$
$$= 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1 +$$
$$+\omega p_1 + \rho q_1) = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (10) со второй формулой (9), получим:

$$\varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0,$$
$$q_2 = 0,\ r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 + \sigma\delta_2 + s\omega_2 + t\varepsilon_2 + p\theta_2 + q\varphi_2 + r\psi_2 +$$
$$+\varepsilon\rho_2 + \omega p_2 + \rho q_2) = 0.$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (10) с третьей формулой (9), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с четвертой формулой (9), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с пятой формулой (9), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с шестой формулой (9), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с седьмой формулой (9), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с восьмой формулой (9), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 3^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \ldots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{19}, i_{16} + \varepsilon i_{19}, i_{17} + \omega i_{19}, i_{18} + \rho i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{19}, i_{16} + \varepsilon i_{19}, i_{17} + \omega i_{19}, i_{18} + \rho i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 4^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_8 + \lambda i_{18}, X_2 = i_9 + \mu i_{18}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{18}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{18}, X_5 = i_{12} + si_{18},$$
$$X_6 = i_{13} + ti_{18}, X_7 = i_{14} + pi_{18}, X_8 = i_{15} + qi_{18}, X_9 = i_7 + ri_{18},\ X_{10} = i_{16} + \qquad (11)$$
$$+\varepsilon i_{18}, X_{11} = i_{17} + \omega i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20},\ X_{14} = i_{21}.$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda[a, i_{18}] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu[a, i_{18}] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \nu[a, i_{18}] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{18}] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s[a, i_{18}] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t[a, i_{18}] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p[a, i_{18}] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q[a, i_{18}] = i_{11} \end{aligned} \qquad (12)$$

$$[a, X_9] = [a, i_7] + r[a, i_{18}] = 0$$
$$[a, X_{10}] = [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{18}] = 0$$
$$[a, X_{11}] = [a, i_{17}] + \omega[a, i_{18}] = 0$$
$$[a, X_{12}] = [a, i_{19}] = 0$$
$$[a, X_{13}] = [a, i_{20}] = 0$$
$$[a, X_{14}] = [a, i_{21}] = 0 \ .$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{gathered}\alpha_1(i_8 + \lambda i_{18}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{18}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{18}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{18}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{18}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{18}) + \theta_1(i_{14} + p i_{18}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{18}) + \psi_1(i_7 + r i_{18}) + \\ + \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{18}) + p_1(i_{17} + \omega i_{18}) + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \\ + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + p_1 i_{17} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + \\ + f_1 i_{21} + i_{18}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1 + \\ + \omega p_1).\end{gathered} \qquad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с первой формулой (12), получим:

$$\begin{gathered}\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0,\ q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1 += \\ + \omega p_1) = 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (13) со второй формулой (12), получим:

$$\begin{gathered}\varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, \\ p_2 = 0,\ q_2 = 0,\ r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 + \sigma\delta_2 + s\omega_2 + t\varepsilon_2 + p\theta_2 + \\ + q\varphi_2 + r\psi_2 + \varepsilon\rho_2 + \omega p_2) = 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (13) с третьей формулой (12), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с четвертой формулой (12), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с пятой формулой (12), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с шестой формулой (12), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с седьмой формулой (12), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с восьмой формулой (12), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 4^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{18}, i_{16} + \varepsilon i_{18}, i_{17} + \omega i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде:

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{18}, i_{16} + \varepsilon i_{18}, i_{17} + \omega i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$5^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 5^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{gathered} X_1 = i_8 + \lambda i_{17}, X_2 = i_9 + \mu i_{17}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{17}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{17}, X_5 = i_{12} + \\ + s i_{17}, X_6 = i_{13} + t i_{17}, X_7 = i_{14} + p i_{17}, X_8 = i_{15} + q i_{17}, X_9 = i_7 + r i_{17}, X_{10} = \\ = i_{16} + \varepsilon i_{17}, X_{11} = i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{gathered} \tag{14}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} &[a, X_1] = [a, i_8] + \lambda[a, i_{17}] = i_{12} \\ &[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{17}] = i_{13} \\ &[a, X_3] = [a, i_{10}] + \nu[a, i_{17}] = i_{14} \\ &[a, X_4] = [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{17}] = i_{15} \\ &[a, X_5] = [a, i_{12}] + s[a, i_{17}] = i_8 \\ &[a, X_6] = [a, i_{13}] + t[a, i_{17}] = i_9 \\ &[a, X_7] = [a, i_{14}] + p[a, i_{17}] = i_{10} \\ &[a, X_8] = [a, i_{15}] + q[a, i_{17}] = i_{11} \\ &[a, X_9] = [a, i_7] + r[a, i_{17}] = 0 \\ &[a, X_{10}] = [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{17}] = 0 \\ &[a, X_{11}] = [a, i_{18}] = 0 \\ &[a, X_{12}] = [a, i_{19}] = 0 \\ &[a, X_{13}] = [a, i_{20}] = 0 \\ &[a, X_{14}] = [a, i_{21}] = 0\ . \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{gathered} \alpha_1(i_8 + \lambda i_{17}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{17}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{17}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{17}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{17}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{17}) + \theta_1(i_{14} + p i_{17}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{17}) + \psi_1(i_7 + r i_{17}) + \\ + \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{17}) + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \\ + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + \\ + i_{17}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1). \end{gathered} \tag{16}$$

Сравнивая формулу (16) с первой формулой (15), получим:

$$\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0,\ q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1 + \varepsilon\rho_1) = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (16) со второй формулой (15), получим:

$$\varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, \\ p_2 = 0,\ q_2 = 0,\ r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 + \sigma\delta_2 + s\omega_2 + t\varepsilon_2 + p\theta_2 + \\ + q\varphi_2 + r\psi_2 + \varepsilon\rho_2) = 0.$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (16) с третьей формулой (15), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (16) с четвертой формулой (15), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (16) с пятой формулой (15), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (16) с шестой формулой (15), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (16) с седьмой формулой (15), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (16) с восьмой формулой (15), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 5^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{17}, i_{16} + \varepsilon i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде:

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{17}, i_{16} + \varepsilon i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$6^0 \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 6^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_8 + \lambda i_{16}, X_2 = i_9 + \mu i_{16}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{16}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{16}, X_5 = i_{12} + \\ + s i_{16}, X_6 = i_{13} + t i_{16}, X_7 = i_{14} + p i_{16}, X_8 = i_{15} + q i_{16}, X_9 = i_7 + r i_{16}, X_{10} = \\ = i_{17}, X_{11} = i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \quad (17)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_8] + \lambda[a, i_{16}] = i_{12}\\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{16}] = i_{13}\\
&[a, X_3] = [a, i_{10}] + \nu[a, i_{16}] = i_{14}\\
&[a, X_4] = [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{16}] = i_{15}\\
&[a, X_5] = [a, i_{12}] + s[a, i_{16}] = i_8\\
&[a, X_6] = [a, i_{13}] + t[a, i_{16}] = i_9\\
&[a, X_7] = [a, i_{14}] + p[a, i_{16}] = i_{10}\\
&[a, X_8] = [a, i_{15}] + q[a, i_{16}] = i_{11}\\
&[a, X_9] = [a, i_7] + r[a, i_{16}] = 0\\
&[a, X_{10}] = [a, i_{17}] = 0\\
&[a, X_{11}] = [a, i_{18}] = 0\\
&[a, X_{12}] = [a, i_{19}] = 0\\
&[a, X_{13}] = [a, i_{20}] = 0\\
&[a, X_{14}] = [a, i_{21}] = 0.
\end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\alpha_1(i_8 + \lambda i_{16}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{16}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{16}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{16}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{16} + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{16}) + \theta_1(i_{14} + p i_{16}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{16}) + \psi_1(i_7 + r i_{16}) + \\ + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \\ + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + \\ + i_{16}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1). \quad (19)$$

Сравнивая формулу (19) с первой формулой (18), получим:

$$\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1 + q\varphi_1 + r\psi_1) = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (19) со второй формулой (18), получим:

$$\varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0, \\ q_2 = 0, r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 + \sigma\delta_2 + s\omega_2 + t\varepsilon_2 + p\theta_2 + q\varphi_2 + r\psi_2) = 0.$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (19) с третьей формулой (18), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с четвертой формулой (18), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с пятой формулой (18), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с шестой формулой (18), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с седьмой формулой (18), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с восьмой формулой (18), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 6^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \ldots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$7^0 \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 7^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{gathered}
X_1 = i_8 + \lambda i_7, X_2 = i_9 + \mu i_7, X_3 = i_{10} + \vartheta i_7, X_4 = i_{11} + \sigma i_7, X_5 = i_{12} + s i_7, \\
X_6 = i_{13} + t i_7, X_7 = i_{14} + p i_7, X_8 = i_{15} + q i_7, X_9 = i_{16}, X_{10} = i_{17}, X_{11} = i_{18}, \\
X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned}
&[a, X_1] = [a, i_8] + \lambda[a, i_7] = i_{12} \\
&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_7] = i_{13} \\
&[a, X_3] = [a, i_{10}] + \nu[a, i_7] = i_{14} \\
&[a, X_4] = [a, i_{11}] + \sigma[a, i_7] = i_{15} \\
&[a, X_5] = [a, i_{12}] + s[a, i_7] = i_8 \\
&[a, X_6] = [a, i_{13}] + t[a, i_7] = i_9 \\
&[a, X_7] = [a, i_{14}] + p[a, i_7] = i_{10} \\
&[a, X_8] = [a, i_{15}] + q[a, i_7] = i_{11} \\
&[a, X_9] = [a, i_{16}] = 0 \\
&[a, X_{10}] = [a, i_{17}] = 0 \\
&[a, X_{11}] = [a, i_{18}] = 0 \\
&[a, X_{12}] = [a, i_{19}] = 0 \\
&[a, X_{13}] = [a, i_{20}] = 0 \\
&[a, X_{14}] = [a, i_{21}] = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\alpha_1(i_8+\lambda i_7)+\beta_1(i_9+\mu i_7)+\gamma_1(i_{10}+\nu i_7)+\delta_1(i_{11}+\sigma i_7)+\omega_1(i_{12}+si_7)+ \\ +\varepsilon_1(i_{13}+ti_7)+\theta_1(i_{14}+pi_7)+\varphi_1(i_{15}+qi_7)+\psi_1 i_{16}+\rho_1 i_{17}+p_1 i_{18}+ \\ +q_1 i_{19}+r_1 i_{20}+f_1 i_{21}=\alpha_1 i_8+\beta_1 i_9+\gamma_1 i_{10}+\delta_1 i_{11}+\omega_1 i_{12}+\varepsilon_1 i_{13}+\theta_1 i_{14}+\varphi_1 i_{15}+ \\ +\psi_1 i_{16}+\rho_1 i_{17}+p_1 i_{18}+q_1 i_{19}+r_1 i_{20}+f_1 i_{21}+i_7(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1+\sigma\delta_1+s\omega_1+ \\ +t\varepsilon_1+p\theta_1+q\varphi_1). \quad (22)$$

Сравнивая формулу (22) с первой формулой (21), получим:

$$\omega_1=1, \alpha_1=0, \beta_1=0, \gamma_1=0, \delta_1=0, \varepsilon_1=0, \theta_1=0, \varphi_1=0, \psi_1=0, \rho_1=0, p_1=0,\ q_1= \\ =0, r_1=0, f_1=0, (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1+\sigma\delta_1+s\omega_1+t\varepsilon_1+p\theta_1+q\varphi_1)=0.$$

Отсюда следует: $s=0$.

Сравнивая формулу (22) со второй формулой (21), получим:

$$\varepsilon_2=1, \alpha_2=0, \beta_2=0, \gamma_2=0, \delta_2=0, \omega_2=0, \theta_2=0, \varphi_2=0, \psi_2=0, \rho_2==0, p_2=0, \\ 0,\ r_2=0, f_2=0, (\lambda\alpha_2+\mu\beta_2+\nu\gamma_2+\sigma\delta_2+s\omega_2+t\varepsilon_2+p\theta_2+q\varphi_2)=0.$$

Отсюда следует: $t=0$.

Аналогично сравнивая формулу (22) с третьей формулой (21), получим:

$$\theta_3=1, p=0.$$

Сравнивая формулу (22) с четвертой формулой (21), получим:

$$\varphi_4=1, q=0.$$

Сравнивая формулу (22) с пятой формулой (21), получим:

$$\alpha_5=1, \lambda=0.$$

Сравнивая формулу (22) с шестой формулой (21), получим:

$$\beta_6=1, \mu=0.$$

Сравнивая формулу (22) с седьмой формулой (21), получим:

$$\gamma_7=1, \nu=0.$$

Сравнивая формулу (22) с восьмой формулой (21), получим:

$$\delta_8=1, \sigma=0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 7^0 система инвариантности имеет вид:

$$s=0, t=0, p=0, q=0, \lambda=0, \mu=0, \nu=0, \sigma=0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Сумма прямая, поскольку $\Delta=1$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$8^0\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&\mu&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&\vartheta&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&\sigma&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&s&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&t&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&p&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 8^0. В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{gathered}X_1 = i_8 + \lambda i_{15}, X_2 = i_9 + \mu i_{15}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{15}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{15}, X_5 = i_{12} + s i_{15},\\ X_6 = i_{13} + t i_{15}, X_7 = i_{14} + p i_{15}, X_8 = i_7, X_9 = i_{16}, X_{10} = i_{17}, X_{11} = i_{18}, X_{11} = \\ = i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}.\end{gathered} \tag{23}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned}&[a, X_1] = [a, i_8] + \lambda[a, i_{15}] = i_{12} + \lambda i_{11}\\&[a, X_2] = [a, i_9] + \mu[a, i_{15}] = i_{13} + \mu i_{11}\\&[a, X_3] = [a, i_{10}] + \nu[a, i_{15}] = i_{14} + \nu i_{11}\\&[a, X_4] = [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{15}] = i_{15} + \sigma i_{11}\\&[a, X_5] = [a, i_{12}] + s[a, i_{15}] = i_8 + s i_{11}\\&[a, X_6] = [a, i_{13}] + t[a, i_{15}] = i_9 + t i_{11}\\&[a, X_7] = [a, i_{14}] + p[a, i_{15}] = i_{10} + p i_{11}\\&[a, X_8] = [a, i_7] = 0\\&[a, X_9] = [a, i_{16}] = 0\\&[a, X_{10}] = [a, i_{17}] = 0\\&[a, X_{11}] = [a, i_{18}] = 0\\&[a, X_{12}] = [a, i_{19}] = 0\\&[a, X_{13}] = [a, i_{20}] = 0\\&[a, X_{14}] = [a, i_{21}] = 0\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{gathered}\alpha_1(i_8 + \lambda i_{15}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{15}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{15}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{15}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{15}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{15}) + \theta_1(i_{14} + p i_{15}) + \varphi_1 i_7 + \psi_1 i_{16} + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + \\ + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \\ + \varphi_1 i_7 + \psi_1 i_{16} + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + i_{15}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \\ + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1).\end{gathered} \tag{25}$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:

$$\begin{gathered}\omega_1 = 1, \delta_1 = \lambda, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0,\ q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 + \sigma\delta_1 + s\omega_1 + t\varepsilon_1 + p\theta_1) = 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует: $\sigma\lambda + s = 0$.

Сравнивая формулу (25) со второй формулой (24), получим:

$$\begin{gathered}\varepsilon_2 = 1, \delta_2 = \mu, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0,\\ q_2 = 0,\ r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 + \sigma\delta_2 + s\omega_2 + t\varepsilon_2 + p\theta_2) = 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует: $\sigma\mu + t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (25) с третьей формулой (24), получим:

$$\sigma\vartheta + p = 0.$$

Сравнивая формулу (25) с четвертой формулой (24), получим:

$$\delta_4 = \sigma, \sigma^2 = 1, \sigma = \pm 1.$$

Сравнивая формулу (25) с пятой формулой (24), получим:

$$\lambda + \sigma s = 0.$$

Сравнивая формулу (25) с шестой формулой (24), получим:

$$\mu + \sigma t = 0.$$

Сравнивая формулу (25) с седьмой формулой (24), получим:

$$\nu + \sigma p = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 8^0 система инвариантности имеет вид:

1) $\sigma = 1, s = -\lambda, t = -\mu, p = -\nu$ или 2) $\sigma = -1, s = \lambda, t = \mu, p = \nu$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \ldots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы):

1) $\{i_8 + \lambda i_{15}, i_9 + \mu i_{15}, i_{10} + \nu i_{15}, i_{11} + i_{15}, i_{12} - \lambda i_{15}, i_{13} - \mu i_{15}, i_{14} - \nu i_{15}, i_7, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$, или

2) $\{i_8 + \lambda i_{15}, i_9 + \mu i_{15}, i_{10} + \nu i_{15}, i_{11} - i_{15}, i_{12} + \lambda i_{15}, i_{13} + \mu i_{15}, i_{14} + \nu i_{15}, i_7, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

И в первом, и во втором варианте прямой суммы нет, поскольку $\Delta = 0$. Таким образом, полученные дополнения редуктивными не являются.

В случаях $9^0 - 11^0$ аналогично полученные инвариантные подпространства редуктивными дополнениями не являются, поскольку $\Delta = 0$. В случаях $12^0 - 15^0$ системы инвариантности противоречивы.

Теорема 3.3. Однородное пространство H/G_2 редуктивно. Все редуктивные дополнения записываются следующим образом:

$m_1 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{21}, i_{16} + \varepsilon i_{21}, i_{17} + \omega i_{21}, i_{18} + \rho i_{21}, i_{19} + \varphi i_{21}, i_{20} + \psi i_{21}\}$,

$m_2 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{20}, i_{16} + \varepsilon i_{20}, i_{17} + \omega i_{20}, i_{18} + \rho i_{20}, i_{19} + \varphi i_{20}, i_{21}\}$.

$m_3 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{19}, i_{16} + \varepsilon i_{19}, i_{17} + \omega i_{19}, i_{18} + \rho i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

$m_4 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{18}, i_{16} + \varepsilon i_{18}, i_{17} + \omega i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

$m_5 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{17}, i_{16} + \varepsilon i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

$m_6 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

$m_7 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

Заключение

В работе получены редуктивные однородные пространства.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

REFERENCES

1. Kobajasi, Sh. Osnovy diffieriencial’noj gieomietrii : v 2 t. / Sh. Kobajasi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981. – T. 2. – 413 s.
2. Kopp, V. G. O podgruppakh vrashchienij piatimiernykh i shestimiernykh jevklidovykh i lorencevykh prostranstv / V. G. Kopp // Uchion. zap. Kazan. un-ta. – 1966. – № 1 (126). – S. 13–22.
3. Rashevskij, P. K. Riemanova gieomietrija i tenzornyj analiz / P. K. Rashevskij. – M. : Nauka, 1967. – 664 s.
4. Khelgason, S. Diffieriencial’naja gieomietrija i simmietrichnyje prostranstva / S. Khelgason. – M. : Mir, 1964. – 538 s.
5. Yudov, A. A. Classifikacija odnomiernykh podmnogoobrazij prostranstva Minkowskogo, imiejushchikh kasatiel’nuju mnimojevklidova i jevklidova tipa / A. A. Yudov, N. S. Kovalik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 17.10.2021

ПАМЯЦІ ВУЧОНАГА

ВЛАДИМИР СТАНИСЛАВОВИЧ СЕКЕРЖИЦКИЙ (09.09.1951 – 04.12.2021)

4 декабря 2021 г. в возрасте 70 лет ушел из жизни замечательный ученый, преподаватель, руководитель.

Владимир Станиславович Секержицкий родился в г. Жабинка Брестской области. В 1972 г. он окончил Брестский государственный педагогический институт имени А. С. Пушкина по специальности «Физика», а в 1979 г. – аспирантуру Ленинградского государственного педагогического института имени А. И. Герцена по специальности «Теоретическая и математическая физика».

Кандидатскую диссертацию по специальности 01.04.02 («Теоретическая и математическая физика») Владимир Станиславович защитил в Ленинградском государственном университете имени А. А. Жданова в 1981 г. Ученое звание доцента ему было присвоено в 1983 г.

Вся трудовая и научная деятельность Владимира Станиславовича Секержицкого связана с нашим вузом: в Брестском государственном педагогическом институте имени А. С. Пушкина он начинал с ассистента (1972), затем стал старшим преподавателем и доцентом (1981), работал заместителем декана (1981–1983) и деканом физико-математического факультета (1990–1995). После обретения Брестским государственным педагогическим институтом имени А. С. Пушкина статуса университета В. С. Секержицкий занимал высокие и ответственные должности: был деканом физического факультета (1995–1996), проректором по научной работе (1996–2003), заведовал кафедрами теоретической физики и астрономии (2005–2013), теоретической физики (2013–2016), общей и теоретической физики (2016–2018), а в последние годы (2019–2021) работал доцентом кафедры общей и теоретической физики.

Владимир Станиславович Секержицкий проявил себя в первую очередь как исследователь и руководитель научных исследований. Он принимал участие в выполнении заданий Государственной программы фундаментальных исследований «Физика взаимодействий» (2001–2005, руководитель темы), Государственной программы фундаментальных исследований «Поля и частицы» (2007–2010, исполнитель темы), Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (2011–2013, руководитель темы), межвузовской программы фундаментальных исследований «Ядерная оптика» (1998, 1999, руководитель темы; 2000, исполнитель темы), межвузовской программы фундаментальных исследований «Микромир и вещество» (2001–2005, исполнитель и руководитель темы). Кроме того, Владимир Станиславович руководил выполнением шести госбюджетных тем (1997, 1998–1999, 2000, 2000, 2000–2002, 2001), хоздоговорной темы (1983) и инициативной темы (1986–1990); участвовал в выполнении четырех госбюджетных тем (1996, 1996, 1999, 2000), четырех хоздоговорных тем (1979–1980, 1980–1981, 1981–1982, 1986) и инициативной темы (2006–2010). С 2014 г. В. С. Секержицкий участвовал в выполнении задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

Владимир Станиславович проявил себя и как успешный и плодотворный ученый: он автор и соавтор около 400 научных и научно-методических работ, в т. ч. двух научных монографий, более 150 публикаций – в соавторстве со студентами.

Как педагог В. С. Секержицкий руководил подготовкой около 200 самостоятельных студенческих публикаций; из 48 студенческих научных работ, принимавших участие в республиканских конкурсах, 28 отнесены к I категории. На его счету также руководство написанием и защитой 97 дипломных работ.

Научно-педагогические заслуги Владимира Станиславовича, его значительный вклад в развитие образования, внедрение передового педагогического опыта, образцовое выполнение трудовых обязанностей были отмечены государством: он награжден нагрудным знаком Министерства образования Республики Беларусь «Выдатнік адукацыі» (1995), почетными грамотами Министерства образования Республики Беларусь (2001, 2003, 2011), Грамотой Министерства образования Республики Беларусь (2005).

Владимир Станиславович отличался добротой, доброжелательным отношением к студентам и коллегам, отзывчивостью, скромностью, добросовестным отношением к работе. Он пользовался заслуженным уважением студентов, преподавателей и сотрудников университета.

Светлая память о Владимире Станиславовиче Секержицком останется в сердцах друзей, коллег, учеников.

Ректорат, физико-математический факультет