УДК 512.542

Дмитрий Владимирович Грицук*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Dmitry Gritsuk***PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com***ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ p -ДЛИНЫ p -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОРЯДКА ЕЕ СИЛОВСКОЙ p -ПОДГРУППЫ**

Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$, факторы G_{i+1}/G_i которого являются либо p' -группами, либо абелевыми p -группами. Наименьшее число абелевых p -факторов среди всех таких субнормальных рядов p -разрешимой группы G называется производной p -длиной p -разрешимой группы. В данной статье получены оценки производной p -длины p -разрешимой группы в зависимости от порядка ее силовской p -подгруппы.

Ключевые слова: p -разрешимая группа, силовская p -подгруппа, производная p -длина.

Estimates of the Derivative of the p -Length of the p -Solvable Group Depending on the Order of its Sylow's p -Subgroup

Let G is a p -solvable group. Then it has a subnormal series рядом $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$ whose factors G_{i+1}/G_i are either p' -groups or abelian p -groups. The smallest number of Abelian p -factors among all such subnormal series of a p -solvable group G is called the derivative of the p -length of the p -solvable group. In this paper, estimates are obtained for the derivative of the p -length of a p -solvable group depending on the order of its Sylow p -subgroup.

Key words: p -solvable group, Sylow p -subgroup, derived p -length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1; 2].

В 1956 г. Ф. Холл и Г. Хигмэн [3] предложили понятие p -длины p -разрешимой группы и исследовали ее зависимость от некоторых инвариантов силовской p -подгруппы [2, VI.6.6]. В частности, p -длина p -разрешимой группы с силовской p -подгруппой порядка p^n не превышает n . Эта оценка существенно снижена Е. Г. Брюхановой [4], которая доказала, что p -длина p -разрешимой группы не превышает производной длины ее силовской p -подгруппы. А. Манн [5] установил, что производная длина группы G порядка p^n не превышает числа d , удовлетворяющего неравенству:

$$n > 2^{d-1} + 2d - 4.$$

В 2006 г. В. С. Монахов [6] предложил аналог производной длины для p -разрешимых групп. Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (1)$$

факторы которого являются либо p' -группами, либо абелевыми p -группами. Наименьшее число абелевых p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной p -длиной группы G и обозначается через $l_p^a(G)$. Ясно, что производная p -длина p -группы совпадает с ее производной длиной. Начальные свойства и некоторые оценки производной p -длины получены в работах [7–12].

Понятно, что

$$d(G_p) \leq l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot d(G_p), \quad (2)$$

где $l_p(G)$ – p -длина p -разрешимой группы G , а $d(G_p)$ – производная длина ее силовой p -подгруппы.

Из неравенства (2) и [4] получаем общую оценку производной p -длины p -разрешимой группы G :

$$l_p^a(G) \leq (d(G_p))^2. \quad (3)$$

Но эта оценка неточная. Из (3) для симметрической группы S_4 степени 4 получаем, что $l_2^a(S_4) \leq 4$, в то время как $l_2^a(S_4) = 2$. Соответствующие примеры можно привести для любого простого p .

В настоящей статье исследуется производная p -длина p -разрешимой группы G в зависимости от порядка p^n ее силовой p -подгруппы.

1. Используемые понятия и обозначения

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$ и π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$.

Цепочку подгрупп (1) называют субнормальным рядом группы G , если подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i для каждого i . Фактор-группы G_i/G_{i+1} называют факторами ряда (1).

Группа называется p -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми p -группами, либо p' -группами. Наименьшее число p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется p -длиной p -разрешимой группы G и обозначается через $l_p^a(G)$.

Производной длиной группы G называют наименьшее натуральное число m , для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(m)} = (G^{(m-1)})'$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [7]. Если G – p -разрешимая группа, то

$$d(G_p) \leq l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot d(G_p).$$

Лемма 2 [7]. Если N – нормальная подгруппа p -разрешимой группы G , то

$$l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + l_p^a(N).$$

Лемма 3 [13, теорема 4, следствие 1].

1. Если G – p -разрешимая группа, то $l_p(G) \leq 2 + \log_2 r_p(G)$.

2. Пусть G – p -разрешимая группа. Если $l_p(G) = r_p(G)$, то либо $r_p(G) = 1$, либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2, 3\}$. В частности, если $r_p(G) \geq 3$, то $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$.

Лемма 4 [5]. Пусть G – p -разрешимая группа порядка p^m и производной длины d . Тогда

$$m > 2^{d-1} + 2d - 4.$$

3. Производная π -длина π -разрешимой группы с заданной π -холловой подгруппой

Теорема. Пусть G – p -разрешимая группа, а G_p – ее силовская p -подгруппа. Тогда:

- 1) если G_p имеет порядок p или p^2 , то $l_p^a(G) \leq 1$;
- 2) если G_p имеет порядок p или p^3 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для всех p ;
- 3) если G_p имеет порядок p^4 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$;
- 4) если G_p имеет порядок p^5 , то $l_p^a(G) \leq 3$ для всех p .
- 5) если порядок G_p не превышает p^6 , то $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Доказательство.

1. Так как силовская p -подгруппа G_p имеет порядок p или p^2 , то G_p является абелевой. Поэтому по [2, VI.6.6] $l_p(G) \leq 1$. Применяя лемму 1, получаем $l_p^a(G) \leq 1$.

2. Если G_p абелева, то $l_p(G) \leq 1$ по [2, III.6.6]. Если G_p неабелева, то она изоморфна по [2, I.14.10] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b | a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle] \langle b \rangle a,$$

либо группе экспоненты p . В любом случае $l_p(G) \leq 2$ для любого p по [2, VI.6.6, b)].

Из [14, лемма 2] для метациклической группы имеем, что $l_p(G) \leq 1$ при $p > 2$. Пусть G_p является группой экспоненты p и $l_p(G) = 2$. По [2, III.10.2] подгруппа G_p регулярна. Так как G_p неабелева, то $p > 2$ и p – простое число Ферма по [15, IX.4.8,b]. Теперь из [15, IX.5.5,b)] вытекает, что $p > 3$.

При $l_p(G) = 1$ из леммы 1 получаем, что $l_p^a(G) \leq 2$. Пусть $l_p(G) = 2$. Тогда существует (p', p) -ряд, в котором точно два p -фактора. Так как $|P| = p^3$, то порядки этих p -факторов не превышают p^2 и, следовательно, они абелевы. Поэтому $l_p^a(G) \leq 2$.

3. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G)=4$, то G_p абелева и $l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G)=3$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^3 , другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G)=2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^2), (p, p^2, p), (p^2, p, p), (p^2, p^2).$$

Для последовательностей (p, p, p^2) , (p^2, p, p) и (p^2, p^2) группа G содержит нормальную подгруппу K , такую, что силовские p -подгруппы в K и G/K имеют порядки p^2 .

По первому пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$ и $l_p^a(G/K) \leq 1$, а из леммы 2 следует $l_p^a(G) \leq 2$.

Остается рассмотреть последовательность (p, p^2, p) . Если $l_p(G) \leq 1$, то $l_p^a(G) \leq 2$ по лемме 1, поскольку $d(G_p) \leq 2$ [2, III.7.2 (d)].

Пусть $l_p(G) > 1$. Так как $l_p(G) \leq r_p(G) \leq 2$, то $l_p(G) = r_p(G) = 2$ и $p \in \{2,3\}$ по лемме 3 (2). Силовская p -подгруппа в $O_{p',p,p',p}(G)$ имеет порядок p^3 и $l_p^a(O_{p',p,p',p}(G)) \leq 2$ по второму пункту доказываемой леммы. Силовская p -подгруппа в фактор-группе $G/O_{p',p,p',p}(G)$ имеет порядок p , поэтому $l_p^a(G/O_{p',p,p',p}(G)) \leq 1$. Теперь $l_p^a(G) \leq 3$ по лемме 2.

4. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G) = 5$, то G_p абелева и $l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G) = 4$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^4 , другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G) = 3$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^3), (p, p^3, p), (p^3, p, p), (p^3, p^2), (p^2, p^3).$$

Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 3$.

Пусть $r_p(G) = 2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p, p^2), (p, p, p^2, p), (p, p^2, p, p), (p^2, p, p, p), (p^2, p^2, p), (p^2, p, p^2), (p, p^2, p^2).$$

Для последовательностей

$$(p, p, p, p^2), (p, p^2, p, p), (p^2, p, p, p); (p, p^2, p^2)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^3 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 .

По второму пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 2$, а по первому пункту доказываемой леммы $l_p^a(G/K) \leq 1$. Из леммы 2 следует, что $l_p^a(G) \leq 3$.

Для последовательностей

$$(p^2, p^2, p), (p^2, p, p^2), (p, p, p^2, p)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^2 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^3 .

По первому пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$, а по второму пункту доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 2$. Из леммы 2 следует, что $l_p^a(G) \leq 3$ для всех p .

Пусть $r_p(G) = 1$. Тогда порядки главных p -факторов равны p , группа p -сверхразрешима и $l_p(G) \leq 1$ по [2, VI.9]. Поскольку по лемме 4 $d(G_p) \leq 2$, то

$$l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot (G_p) \leq 2.$$

5. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G) = 6$, то G_p абелева и $l_p(G) \leq l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G) = 5$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^5 , а другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p(G) \leq l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G) = 4$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^4); (p, p^4, p); (p^4, p, p); (p^4, p^2); (p^2, p^4).$$

Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 3$.

Пусть $r_p(G) = 3$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p, p^3); (p, p, p^3, p); (p, p^3, p, p); (p^3, p, p, p); (p^3, p^2, p); (p^3, p, p^2); (p^2, p, p^3); (p^2, p^3, p); (p, p^3, p^2); (p, p^2, p^3); (p^3, p^3).$$

Для последовательностей

$$(p, p^3, p, p); (p^3, p, p, p); (p^3, p, p^2); (p, p^3, p^2)$$

группа G содержит нормальную группу K , такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^4 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 . По 3-му пункту теоремы, которую мы сейчас доказываем, $l_p^a(K) \leq 2$ для $p \geq 2$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$, а по 1-му пункту доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 1$.

Также нам известно, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Для последовательностей

$$(p, p, p, p^3); (p, p, p^3, p); (p^2, p, p^3); (p^2, p^3, p)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K , и она такая, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^2 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^4 . Из 1-го пункта доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$, а по 4-му пункту $l_p^a(G/K) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G/K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$. Также следует, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Так как главные p -факторы абелевы, то для последовательностей

$$(p^3, p^2, p); (p^3, p^3, p)$$

имеем $l_p^a(G) \leq 3$.

Пусть $r_p(G) = 2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p, p, p^2); (p, p, p, p^2, p); (p, p, p^2, p, p); (p, p^2, p, p, p); (p^2, p, p, p, p); (p^2, p^2, p, p); (p^2, p, p^2, p); (p^2, p, p, p^2); (p, p^2, p, p^2); (p, p, p^2, p^2); (p^2, p^2, p^2).$$

Для последовательностей

$$(p, p, p, p, p^2); (p, p, p^2, p, p); (p, p^2, p, p, p); (p^2, p, p, p, p); (p^2, p^2, p, p); (p^2, p, p, p^2); (p, p^2, p, p^2); (p, p, p^2, p^2); (p^2, p^2, p^2)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K , такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^4 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 . По 3-му пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$, а по 1-му пункту доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 1$. Получим, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Для последовательности (p^2, p, p^2, p) группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^2 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^4 . По 1-му и 3-му пунктам доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$ и $l_p^a(G/K) \leq 2$ для $p > 3$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$.

Для последовательности (p, p^2, p, p^2) группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^4 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 . По 1-му и 3-му пунктам доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 1$ и $l_p^a(K) \leq 2$ для $p > 3$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$. Следовательно, получим, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p > 3$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Пусть $r_p(G) = 1$. Тогда порядки главных p -факторов равны p , группа p -сверхразрешима и $l_p(G) \leq 1$. Поскольку $d(G_p) \leq 2$, то

$$l_p^a(G) \leq l_p(G)d(G_p) \leq 2.$$

Теорема доказана.

Заклучение

Получение новых оценок производной p -длины конечной p -разрешимой группы имеет важное значение не только для теории конечных групп и их классов, но и в современной криптографии. В частности, полученные оценки будут полезны при получении новых шифров и новых криптосистем с высокой эффективностью и криптостойкостью. Найденные оценки производной p -длины конечной p -разрешимой группы могут стать основой для создания новых методов современной теории защиты информации и теории кодирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 312 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.
3. Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.
4. Брюханова, Е. Г. Связь между 2-длиной и производной длиной силовой 2-подгруппы конечной разрешимой группы / Е. Г. Брюханова // Мат. заметки. – 1981. – № 2 (29). – С. 161–170.
5. Mann, A. The derived length of p -groups / A. Mann // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
6. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
7. Грицук, Д. В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
8. Грицук, Д. В. Производная π -длина π -разрешимой группы, силовые p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
9. Monakhov, V. S. On derived π -length of a finite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
10. Монахов, В. С. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы с заданной π -холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.
11. Грицук, Д. В. Конечные π -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.
12. Грицук, Д. В. Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой π -холловы подгруппы свободны от n -х степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артюшеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
13. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
14. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
15. Huppert, B. Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1982. – 531 p.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriiyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 312 s.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.
3. Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.
4. Briukhanova, Ye. G. Sviaz' miezhdu 2-dlinoj i proizvodnoj dlinoj silovskoj 2-podgruppy koniechnoj razrieshimoj gruppy / Ye. G. Briukhanova // Mat. zamietki. – 1981. – № 2 (29). – S. 161–170.
5. Mann, A. The derived length of p -groups / A. Mann // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
6. Monakhov, V. S. Koniechnyje gruppy s polunormal'noj khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov // Mat. zamietki. – 2006. – T. 80, № 4. – S. 573–581.
7. Gricuk, D. V. O proizvodnoj π -dlinie π -razrieshimoj gruppy / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Viestn BGU. Ser. 1. – 2012. – № 3. – S. 90–95.
8. Gricuk, D. V. Proizvodnaja π -dlina π -razrieshimoj gruppy, silovskije p -podgruppy kotoroj libo bicyklichieskije, libo imiejut poriadok p^3 / D. V. Gricuk // Problemy fiziki, matematiki i tiekhniki. – 2014. – № 2 (19). – S. 54–58.
9. Monakhov, V. S. On derived π -length of a finite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
10. Monakhov, V. S. O proizvodnoj π -dlinie koniechnoj π -razrieshimoj gruppy s zadannoj π -khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov, D. V. Gricuk // Tr. In-ta matematiki i mekhaniki of the UrO RAN. – 2013. – T. 18, № 3. – S. 215–223.
11. Gricuk, D. V. Koniechnyje π -razrieshimyje gruppy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh π -podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Briest. gos. tiekh. un-ta. Fizika, matematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.
12. Gricuk, D. V. Ocenki proizvodnoj π -dliny π -razrieshimoj gruppy, u kotoroj π -khollovy podgruppy svobodny ot n -kh stiepieniej / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. A. Artiushenia // Viestn. Vitieb. gos. un-ta im. P. M. Masherova. – 2018. – № 1 (98). – S. 11–15.
13. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 1123–1137.
14. Monakhov, V. S. O maksimal'nykh i silovskikh podgruppakh koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov, Ye. Ye. Gribovskaja // Mat. zamietki. – 2001. – T. 70, № 4. – S. 603–612.
15. Huppert, B. Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1982. – 531 p.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 03.11.2021