УДК 519.6+519.81

Владимир Васильевич Морозов
ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Vladimir Morozov
Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: morozoffw@mail.ru

ОЦЕНКИ ГРАНЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРЕДБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Отсутствие в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса вынуждает исследователей, изучающих нелинейные функциональные уравнения с дифференциальными и/или интегральными операторами, разрабатывать все новые и новые грандиозные сеточные схемы. Однако, следуя постулатам функционального анализа А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина, Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова, аппроксимацию корней банаховых уравнений надлежит осуществлять с помощью элементов всюду плотного в полном нормированном пространстве решений множества многочленов. Полные счетно-нормированные метрические пространства будем называть предбанаховыми. Линейные операторы таких пространств могут аппроксимироваться счетными матрицами, которые, в свою очередь, являются пределами последовательностей конечномерных матриц, отображающих конечные базисы всюду плотных множеств предбанаховых пространств.

***Ключевые слова**: сходимость последовательности, аппроксимация, оценка нормы оператора.*

Estimates of the Faces of Continuous Linear Operators Before-Banach Spaces

The absence of a countable basis in infinite-dimensional Banach spaces forces researchers studying nonlinear functional equations with differential and / or integral operators to develop more and more grandiose grid schemes. However, following the postulates of functional analysis by A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, the approximation of the roots of Banach equations should be carried out using elements of a set of polynomials that is everywhere dense in the full normalized space of solutions. We will call the complete countably normalized metric spaces before-Banach spaces. The linear operators of such spaces can be approximated by countable matrices, which in turn are the limits of sequences of finite-dimensional matrices that map finite bases of everywhere dense sets of before-Banach spaces.

***Key words**: sequence convergence, approximation, operator norm estimation.*

Полные метрические пространства с всюду плотным множеством многочленов

Будем считать, что оператор $F : U \to V$ уравнения вида

$$F(u(x)) = 0,\ x \in X \subset R^M \tag{1}$$

банаховый, причем если B-пространства U и V бесконечномерные, то они сепарабельны.

К таким пространствам относятся конечномерные множества чисел R^n и C^n, многочленов P^n и T^n, а также бесконечномерные пространства непрерывных $C_{[a,\,b]} \equiv C^0_{[a,\,b]}$, дифференцируемых $C^k_{[a,\,b]}$, $k \in N$ и суммируемых $L^p_{[a,\,b]}$, $p = 1, 2$ функций. Отметим, что эти сепарабельные пространства являются *полными метрическими* пространствами, содержащими всюду плотные множества многочленов P и T с рациональными коэффициентами. Это значит, что замыкание множества многочленов в метрике одного из этих пространств совпадает с соответствующим пространством функций. Используем это свойство для приближенного представления элементов пространств в виде многочленов множества P^n (или T^n, n – четное).

Проектирование элементов M-пространств $L^p{}_X$ и $C^k{}_X$ в конечномерное подмножество P^n (или T^n); прикладной анализ достаточно гладких в области $Q \subset U$ отображений $F : Q \to V$ (U и V – B-пространства) и аппроксимация их производных; генерация фундаментальных процессов поиска корней и применение критериев их локализации при исследовании уравнения (1), реализуемые в интегрированной среде программирования с итеративным базисом всюду плотного в пространствах U и V множества P (или T) многочленов с рациональными коэффициентами, назовем *полиномиальным* анализом, а разрабатываемые методы анализа – *полиномиальными*.

В математической физике полиномиальный (предкомпактный интегро-дифференциальный) анализ так же, как и численный (компактный суммарно-разностный) анализ, предназначен для изучения корректности постановки интегро-дифференциальных задач в метрических пространствах и решения адекватных им операторных уравнений. Полиномиальный анализ раскрывает утилитарную суть таких абстрактных понятий функционального анализа сепарабельных М-пространств, как измеримость и компактность множеств, базисы мер и пространств из *теории множеств*; слабая и сильная производные отображений из *теории дифференцирования*; аппроксимация компактных операторов и локализация корней уравнений из *теории приближений*.

Если M-пространство является векторным, то для линейных и билинейных операторов, действующих на элементы единичного шара E_M такого пространства, введем понятия верхней и нижней грани.

Определение. Пусть $A : U \to V$ – линейный оператор, отображающий векторное M-пространство U в векторное M-пространство V. Если существуют такие числа C, что неравенство $\rho_v(0, A\,u) \le C\,\rho_u(0, u)$ справедливо для всех $u \in E_U$, то наименьшее из чисел C обозначим $\lceil A \rceil$ и назовем *s-гранью* оператора A. Если существуют такие числа c, что неравенство $\rho_v(0, P\,u) \ge c\,\rho_u(0, u)$ верно при любых $u \in E_U$, то наибольшее из чисел c обозначим $\lfloor A \rfloor$ и назовем *i-гранью* линейного оператора A.

Определение. Пусть $B : U^2 \to V$ – билинейный оператор векторных метрических пространств U и V. Если существуют такие числа C, что неравенство $\rho_v(0, Bu^2) \le C\,\rho^2{}_u(0, u)$ верно при любых $u \in E_U$, то наименьшее из чисел C обозначим $\lceil B \rceil$ и назовем *s-гранью* оператора B. Если существуют такие числа c, что неравенство $\rho_v(0, Bu^2) \ge c\,\rho^2{}_u(0, u)$ справедливо для всех элементов $u \in E_U$, то наибольшее из чисел c обозначим $\lfloor B \rfloor$ и назовем *i-гранью* билинейного оператора B.

В дальнейшем расстояние от элемента u до точки 0 в векторных метрических пространствах будем обозначать $\rho(0, u) \equiv \rho(u)$.

Сеточные методы решения (1) основаны на представлении корня $u(x)$ из пространства U числовой последовательностью значений искомой функции в точках сетки. При неограниченном росте параметра дискретизации эта последовательность может поточечно сходиться к корню (1). Однако использовать решение из пространства R^∞ бесконечных числовых последовательностей, например, в качестве непрерывно дифференцируемой функции неправомочно.

В этом случае для аппроксимации непрерывных корней воспользуемся другим счетно-нормированным пространством $C^\infty{}_{[a,\, b]}$ бесконечно дифференцируемых функций, полным относительно метрики

$$\rho_\infty(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{||u - v||_n}{1 + ||u - v||_n}, \text{ где } ||\cdot||_n \equiv ||\cdot||_{C} n. \qquad (2)$$

Определение. Полные счетно-нормированные метрические пространства будем называть *предбанаховыми* и обозначать $Б$ ($Б$-пространство).

Чтобы воспользоваться формулой (2) и найти верхнюю и нижнюю грани линейного оператора $A : U \to V$, где U – $Б$-пространство $C^\infty{}_{[a,\, b]}$, а V – B-пространство $C^k{}_{[a,\, b]}$, совокупность точек единичного шара $E_C\infty$ представим как множество отрезков, соединяющих точки единичной сферы с центром 0.

Отсюда

$$E_{C^\infty}\backslash 0 = \{\lambda u : \rho_\infty(u) = 1,\ \lambda \in (0; 1]\}.$$

Теорема 1. Пусть $u \in C^\infty_{[a,\,b]}$ и $\rho_\infty(u) = 1$, тогда

$$\rho_\infty(\lambda u) = \frac{2\lambda}{1+\lambda}.$$

Найдем расстояние от 0 до точки λu по формуле (2) при $||u||_n = 1$

$$\rho_\infty(\lambda u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{||\lambda u||_n}{1+||\lambda u||_n} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right) = \frac{2\lambda}{1+\lambda}.$$

Следствие. Если $\rho_\infty(u) = 1$, то при $0 \le \lambda \le 1$ справедливо неравенство

$$\lambda \le \rho_\infty(\lambda u) \le 2\lambda. \tag{3}$$

В полных счетно-нормированных пространствах с метрикой $\rho = \rho_\infty$ s- и i-грани линейных и билинейных операторов определяются по той же схеме, что и в B-пространствах. Но из-за разной топологии банаховых и предбанаховых пространств оценки граней этих операторов, полученные на единичном шаре полных счетно-нормированных пространств, нельзя продолжить на все *Б*-пространство.

Теорема 2. Пусть линейный оператор A отображает *Б*-пространство U в B-пространство V. Тогда

$$\lceil A\rceil \le \sup_{\rho(u)=1} ||Au||_V \text{ и } \lfloor A\rfloor \ge \frac{1}{2}\inf_{\rho(u)=1} ||Au||_V.$$

Доказательство теоремы следует из отношения

$$\frac{||A(\lambda u)||}{\rho(\lambda u)} = \frac{(1+\lambda)\lambda||Au||}{2\lambda} = \frac{(1+\lambda)||Au||}{2}.$$

Теорема 3. Если $B : U^2 \to V$ – билинейный оператор (U – *Б*-пространство, V – B-пространство), то

$$\lceil B\rceil \le \sup_{\rho(u)=1} ||Bu^2||_V, \lfloor B\rfloor \ge \frac{1}{4}\inf_{\rho(u)=1} ||Bu^2||_V.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2. Отметим лишь, что единичный шар E_{C^∞} определяется вложением шаров E_{C^k}.

Вычисление s- и i-граней операторов в 1-окрестности нуля обусловлено тем, что сходимость итерационных процессов зависит от скорости пошагового сужения расстояний между нулем и поправкой к приближению, которое в метрике пространства решений изначально меньше 1.

Что касается верхней и нижней граней линейных и билинейных операторов, действующих в метрических пространствах невекторного типа, то они определяются по принципу константы Липшица, а именно: *в-гранью* линейного оператора A назовем число L, удовлетворяющее неравенству

$$\rho_V(Au, Av) \le L\,\rho_U(u, v);$$

в-гранью билинейного оператора B назовем число K, удовлетворяющее

$$\rho_V(Bu^2, Bv^2) \le K\,\rho^2_U(u, v);$$

н-гранью линейного оператора A назовем число $l \geq 0$, удовлетворяющее

$$\rho_V(Au, Av) \geq l\, \rho_U(u, v);$$

н-гранью билинейного оператора B назовем число $k \geq 0$, удовлетворяющее

$$\rho_V(Bu^2, Bv^2) \geq k\, \rho^2{}_U(u, v),$$

справедливых для любых u и v из M-пространства U.

Действие билинейного оператора B дважды на один и тот же элемент пространства U обусловлено спецификой применения этого оператора в формулах Тейлора и конечных приращений.

Восстановление элементов функциональных пространств по сеточному представлению

Сеточное представление функций – это связующий (промежуточный) этап между явным изображением элементов функциональных пространств и их δ-аппроксимирующими многочленами. Другими словами, увеличивая параметр дискретизации пространства U, можно сколь угодно точно приблизить изучаемую функцию многочленом по норме пространств дифференцируемых, непрерывных и суммируемых функций.

Этот процесс назовем восстановлением явного вида функции по ее сеточному представлению. Сразу оговоримся, что в буквальном смысле эта задача не разрешима, т. к. мощность множества исходных функций – континуум, а мощность множества всевозможных последовательностей значений функций, вычисленных в рациональных точках или на сегментах с рациональными концами, – счетное. Однако в силу сепарабельности множества многочленов с рациональными коэффициентами в этих пространствах для каждой функции $u(x) \in U$ и любой точности приближения δ существует такой конечный многочлен ${}^n u(x)$, что

$$||u(x) - {}^n u(x)|| < \delta.$$

По заданной точности определяется степень многочлена, позволяющего аппроксимировать искомую функцию с точностью δ, затем из всех многочленов данной степени находится (единственный) многочлен наилучшего приближения функции по норме. Этот многочлен назовем *многочленом восстановления* искомой функции с заданной точностью.

Отметим, что процесс поиска многочлена восстановления аналитической функции сходится к ее ряду Тейлора, по отрезкам которого при помощи специальной таблицы можно определить явный вид функции.

Сформулируем задачу «нахождения многочлена восстановления (НМВ) функции $u(x) \in U$» с параметром дискретизации $c+1$. Пусть задана последовательность пар, состоящая из сегментов отрезка $[a, b]$ и соответствующих значений сеточной функции ${}^{c+1}u$ на них

$${}^c\Psi = \{(\underline{x}_i, u_i),\ i = 0, \ldots, c\}.$$

Требуется найти коэффициенты многочлена ${}^n u(x)$ восстановления исследуемой функции $u(x) \in E_U$.

В зависимости от задания нормы в пространстве U, содержащем функцию $u(x)$, рассмотрим три ветви алгоритма решения этой задачи.

Если $U = C^k{}_{[a,\, b]}$, $k \in N$, то степень требуемого многочлена $n = c$ и задача нахождения многочлена восстановления сводится к поиску соответствующего интерполяционного многочлена сеточной функции ${}^{c+1}u$ на сетке ${}^c\Omega_ч$.

Если $U = C_{[a,\,b]}$, то степень требуемого многочлена $n \le c/3$ (доказать для произвольной сетки ${}^c\Omega_n$) и задача НМВ сводится к поиску соответствующего супрополяционного многочлена ${}^n u(x)$ сеточной функции ${}^{c+1}U$.

Если $U = L^p{}_{[a,\,b]},\, p = 1, 2,$ то степень требуемого многочлена $n < c/2$ (доказать для равномерной сетки ${}^c\Omega_p$) и задача НМВ сводится к поиску соответствующего квадрополяционного многочлена ${}^n u(x)$ сеточной функции ${}^{c+1}U$.

То есть каждая ветвь алгоритма НМВ реализуется заменой вычисляемых значений $u(x)$ в точках сетки ${}^c\Omega$ вектором сеточных значений искомой функции. Таким образом, во втором и третьем вариантах степень n многочлена восстановления значительно меньше параметра дискретизации $c+1$, что ухудшает сходимость последовательности приближений корня уравнения (1), т. к. требует надлежащего увеличения c.

Третья составляющая задачи НМВ имеет самостоятельный аспект в математической статистике, где коэффициенты ${}^z c = (c_0, \ldots, c_n)$ многочлена наилучшего приближения линейной или нелинейной регрессии вычисляются из условия минимизации функционала $Z({}^z c)$ по E-норме R^{c+1}.

Связать корень уравнения (1)

$$ {}^n u(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k $$

с нормой какого-либо функционального пространства, где он станет МНП сеточной функции ${}^{c+1}U$, можно лишь условно. Чтобы поставить задачу НМВ в $L^2{}_{[a,\,b]}$, введем понятие «равного влияния» точек сетки ${}^c\Omega$ на формирование МНП, т. е. осуществим линейное интерполирование простой функции ${}^{c+1}U \in L^2{}_{[a,\,b]}$ (среднеквадратично сходящееся к $u(x)$), где мера i-го сегмента равна

$$ \mu_i = (x_i - x_{i-1})/2 + (x_{i+1} - x_i)/2 $$

и при $i = \{0 \vee n\}$ одно из двух слагаемых опускается.

Для этого потребуется минимизировать функционал

$$ Z(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=0}^{c} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x_i^k - u(x_i) \right)^2 \mu_i,\ \mu_i \in {}^c\underline{\Omega}_{[a,\,b]}. \tag{4} $$

Чтобы вычислить значения ${}^z c$, найдем частные производные $Z({}^z c)$ по всем неизвестным коэффициентам и составим ЛСАУ

$$ \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{i=0}^{c} \mu_i x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^{c} \mu_i x_i^j u_i,\ j = 0, \ldots, n. \tag{5} $$

В приложении 2 [5] показана объект-схема алгоритма поиска многочлена наилучшего приближения простой функции ${}^c U$, заданной в точках сетки, расположенных на отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. С небольшими изменениями он трансформируется в интегральный метод поиска МНП по норме $L^2{}_{[a,\,b]}$.

Слабое и сильное проектирование *M*-пространств на множество многочленов

При решении (1) полиномиальными методами, генерирующими в пространстве решений сходящуюся к корню последовательность многочленов, требования к проекторам значительно возрастают.

Важнейшее из них касается сходимости последовательности проекций корня к точному решению, обеспечиваемое условием $\overset{n}{\Pi}u \to u$ в метрике M-пространства или

$$||\overset{n}{\Pi}u - u||_U \to 0 \text{ (по норме } B\text{-пространства } U).$$

Рассмотрим проекторы, обладающие этим свойством. В функциональном анализе [4, с. 211] изучается ортогональное проектирование элементов H-пространства U на векторное подпространство Y.

Здесь $y \in Y$ – проекция элемента $u \in U$ определяется при помощи скалярного произведения из условия $(u - y) \perp Y$. В работе [4, с. 231] приведен пример, где проектором $\overset{n}{\Pi} : L^2_{[a,b]} \to \Pi^n$ является преобразование Фурье элементов H-пространства $L^2_{[a,b]}$ на подпространство, порожденное ортонормированной системой $\{e^j, j = 0, \dots, n\}$. Однако эти проекторы позволяют аппроксимировать многочленами наилучшего приближения по норме лишь элементы H-пространства $L^2_{[a,b]}$.

В разделе 8.6 [5] построен проектор $\overset{n}{\Pi} : C_{[a,b]} \to P^n$, осуществляющий аппроксимацию функций из $C_{[a,b]}$ МНП по чебышевской норме.

По определению проектор $\overset{n}{\Pi} : U \to {}^nP$ обладает свойством $(\overset{n}{\Pi})^2 = \overset{n}{\Pi}$ или $\overset{n}{\Pi} : P^n \to P^n$, т. е. $\overset{n}{\Pi}$ – тождественный оператор на конечномерном подмножестве P. Эту функцию проектора из $C^\infty_{[a,b]}$ выполняет интерполятор Лагранжа. Но, как показано в разделе 5.5 [5], на некоторых элементах M-пространства $U = C_{[a,b]}$ этот проектор не ограничен. Значит, интерполятор Лагранжа не может сходиться к тождественному (ограниченному) оператору, т. к. это противоречило бы принципу Банаха – Штейнгауза равномерной ограниченности линейного оператора.

Теорема 4 [4, с. 233]. Пусть U – B-пространство, V – нормированное пространство и M – множество ограниченных линейных операторов $M \subset L(U, V)$, такое, что для любого $u \in U$ существует постоянная $C_u > 0$, такая, что $||Au|| \le C_u$ для любого $A \in M$. Тогда M – ограниченное множество, т. е. существует такая постоянная C, что $\lceil A \rceil \le C$ для всех $A \in M$.

Утверждение теоремы остается в силе, если ее условие достоверно для элементов множества P всюду плотного в B-пространстве U.

В работе [2, с. 523] говорится об интерполяционном проектировании элементов B-пространства $C_{[a,b]}$ решений (1), удовлетворяющем условию «хорошей аппроксимации». В классическом варианте [6, с. 106] за узлы сетки на отрезке $[-1; 1]$, обеспечивающем минимальное уклонение многочлена интерполирования от порождающей его абсолютно непрерывной функции по чебышевской норме, принимают корни многочлена Чебышева $T_n(x) \equiv \cos(n \arccos x)$:

$$x_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi,\ i = 1, \dots, n. \tag{6}$$

Теорема 5 [6, с. 106]. Если $u(x)$ принадлежит множеству $C^a_{[-1;1]}$ абсолютно непрерывных функций, то построенный на сетке Чебышева (10.6) процесс интерполирования ${}^nu(x) = \overset{n}{\Pi}u(x)$ при $n \to \infty$ сходится к порождающей функции равномерно относительно x на отрезке $[-1; 1]$.

При определении коэффициентов интерполяционного приближения корней интегральных уравнений на сетке ${}^n\Omega_\iota$ (6) могут изменяться все значения сеточной функции.

Но для решения интегро-дифференциальных краевых задач требуется, чтобы, во-первых, концы отрезка являлись точками сетки; во-вторых, сетка ${}^{n}\Omega_{ч}$ позволяла строить интерполяционные многочлены $n^{\text{-ой}}$ степени, т. е. имела $(n+1)$ узел; и, в-третьих, сетка была нанесена на отрезок $[0; 1]$.

Всем этим условиям удовлетворяет множество точек

$$ {}^{n}\Omega_{ч} = \{x_i = \frac{1}{2}\left(1 - q\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), i = \overline{0,n}\}, \text{ где } q = \left(\cos\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^{-1}, \tag{7}$$

которые являются узлами сетки Чебышева на отрезке $[(1-q)/2, (1+q)/2]$, сходящемся при $n \to \infty$ к отрезку $[0; 1]$.

Формально абсолютная непрерывность функций должна выполняться на отрезке $[(1-q)/2, (1+q)/2]$, что мы и будем всегда подразумевать. Если понадобится нанести чебышевскую сетку на отрезок $[a, b]$, то воспользуемся преобразованием

$$\chi_i = a + x_i(b-a), \text{ где } x_i \in {}^{n}\Omega_{ч}.$$

Из теоремы 5 следует, что элементы семейства абсолютно непрерывных функций с заданным изменением $K < \infty$ на отрезке $[a, b]$ равномерно проектируются на множество P^n $(n = n(\varepsilon, u(x))$. То есть последовательность интерполяторов

$$\overset{n}{\Pi} : C^{a}{}_{[a,b]} \to P^n$$

с сеткой Чебышева при $n \to \infty$ сходится поточечно к оператору I_{Ca} на ограниченном множестве $Q_\delta \subset C^{a}{}_{[a,b]}$.

При решении уравнений с дифференциальным оператором элементами пространства решений U являются функции из $C^{k}{}_{[a,b]}, k \geq 1$. Опишем проектор, отображающий эти функции в многочлены из P^n.

Теорема 6 [6, с. 111]. Для того чтобы интерполяционный процесс сходился при $n \to \infty$ равномерно на $[a, b]$ для всякой функции $u(x) \in C^{k}{}_{[a,b]}$, $k \geq 1$, необходимо и достаточно существование такого $M < \infty$, что

$$\int_a^b \left| \sum_{j=0}^{n} e^j(x) E(t - x_j) \frac{(t-x_j)^{k-1}}{(k-1)!} \right| dt \leq M, \tag{8}$$

где $n = k, k+1, \ldots, x \in [a, b]$ и «гасящая» функция

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 1/2 & \text{при } x = 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Представляет интерес частный случай теоремы 6 с $k = 1$, для которого оценка M может быть получена при $n = 1, 2, \ldots$ из неравенства

$$|e^0(x)|(x_1 - x_0) + |e^0(x) + e^1(x)|(x_2 - x_1) + \ldots + \left|\sum_{j=0}^{n-1} e^j(x)\right|(x_n - x_{n-1}) \leq M. \tag{10}$$

Приведем значения M_n для оценки параметра M на сетке Чебышева $(M^{ч}{}_n)$ и равномерной сетке $(M^{p}{}_n)$, полученные при различных значениях n.

Таблица. – Значения M_n для оценки параметра M в формуле (10)

M_n \ n	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$M^{ч}_n$	1,114	1,129	1,135	1,137	1,1385	1,1394	1,1399	1,1403	1,1405
M^p_n	1,137	1,228	1,428	2,230	5,000	12,83	36,22	107,3	330,3

Преимущество чебышевской сетки объясняется не только наименьшим уклонением функций из $C^a{}_{[a,\,b]}$ от отвечающих им интерполяционных многочленов или существованием M в формуле (10), обеспечивающим равномерную сходимость процесса интерполирования функций из $C^1{}_{[a,\,b]}$, т. е. ее алгебраическими и аналитическими свойствами, но и с помощью геометрических особенностей соответствующего данной сетке итерационного базиса (предбазиса B-пространства $C_{[a,\,b]}$).

Определение. Предскалярным произведением векторов u и v в линейном пространстве L назовем действительную функцию $\langle\langle u, v\rangle\rangle$, удовлетворяющую условиям

1) $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \langle\langle v, u\rangle\rangle$;
2) $\langle\langle \alpha\, u, v\rangle\rangle = \alpha\, \langle\langle u, v\rangle\rangle,\ 0 < \alpha \in R$;
3) $\langle\langle \alpha\, u, u\rangle\rangle = \alpha\, \langle\langle u, u\rangle\rangle,\ \forall\alpha \in R$;
4) $\langle\langle u, u\rangle\rangle \geq 0$, причем $\langle\langle u, u\rangle\rangle = 0$ только при $u = 0$.

Введенное таким образом предскалярное произведение элементов полного по норме $||u|| = \langle\langle u, u\rangle\rangle^{1/2}$ банахова пространства задает в нем геометрию, подобную геометрии гильбертовых пространств.

Например, угол между элементами u и v не отличается от угла между v и u (аксиома 1). Умножение одного из векторов пары на положительное число не влияет на величину угла между ними (аксиомы 1 и 2).

Произведение сонаправленных элементов B-пространства положительно, а противоположно направленных – отрицательно (аксиомы 3 и 4). В связи с этим угол между элементами B-пространства будем определять из формулы

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = ||u||\ ||v||\ cos(u^\wedge v). \tag{11}$$

Равенство нулю предскалярного произведения ненулевых элементов означает их взаимную перпендикулярность. Для введения понятия предскалярного произведения в B-пространстве $C_{[a,\,b]}$ непрерывных функций определим экстремальное умножение двух функций этого пространства.

Определение 10.5. Пусть $s = \max\limits_{a\leq x\leq b} (u(x)\, v(x))$ и $i = \min\limits_{a\leq x\leq b} (u(x)\, v(x))$, тогда *экстремальным* умножением $u(x)$ и $v(x)$ из $C_{[a,\,b]}$ назовем функционал

$$\underset{a\leq x\leq b}{extr} (u(x), v(x)) = \begin{bmatrix} s, \text{ если } |s|\geq|i|; \\ i, \text{ если } |i|>|s|. \end{bmatrix} \tag{12}$$

Теорема 7. Экстремальное умножение элементов $u(x)$ и $v(x)$ банахова пространства $C_{[a,\,b]}$ задает в нем предскалярное произведение.

Доказательство справедливости 1, 3 и 4 условий из определения 10.4 очевидно. Докажем истинность второго свойства при $\alpha > 0$:

$$\langle\langle \alpha\, u, v\rangle\rangle = \underset{a\leq x\leq b}{extr} (\alpha\, u(x), v(x)) = \begin{bmatrix} \alpha\, s, \text{ если } |s|\geq|i|; \\ \alpha\, i, \text{ если } |i|>|s|. \end{bmatrix} = \alpha\, \langle\langle u, v\rangle\rangle.$$

При $s+i=0$ равенство $\langle\langle u, v\rangle\rangle = s$ означает, что предскалярное произведение в отличие от скалярного определяется с точностью до знака, а угол $u^\wedge v$ находится из формулы $s = ||u||\ ||v||\ cos(u^\wedge v)$. Это обстоятельство никоим образом не влияет на достижение основных целей $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$, т. к. если $|cos(u^\wedge v)| \approx 0$, то углы $u^\wedge v$ и $180^\circ - u^\wedge v$ незначительно отличаются от прямого, а если $|cos(u^\wedge v)| \approx 1$, то элементы $u(x)$ и $v(x)$ почти коллинеарны.

Полная линейно независимая система функций *M*-пространства не всегда может быть использована в качестве базиса. Во многом это связано с величиной углов между парами ее элементов. Если один из углов репера близок к 0° или 180°, то разложить по предбазису функцию из единичного шара, используя данную пару элементов системы, практически невозможно, из-за чего возникает проблема выбора предбазиса даже в сепарабельных *B*-пространствах. Одной из неудачных полных систем пространства $C_{[a,\,b]}$ с этой точки зрения является степенной предбазис

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots.$$

Значительно лучше различаются направления элементов итеративного предбазиса, но и в этом случае есть отличие в качестве аппроксимации функций из $C_{[a,\,b]}$ интерполяционными многочленами, зависящем от сетки отрезка $[a, b]$. Например, минимальное $£$ из множества значений углов между элементами итеративного предбазиса, построенного на равномерной сетке ${}^n\Omega_р$, уже при $n = 16$ становится менее $30'$, а на сетке ${}^{16}\Omega_ч$ Чебышева параметр $£ > 66^\circ 30'$. Это обеспечивает равномерную сходимость процесса интерполирования абсолютно непрерывных функций на сетке ${}^n\Omega_ч$.

Построив итеративную сетку для множества непрерывных функций, удовлетворяющих аксиоме $\langle\langle u + w, v\rangle\rangle = \langle\langle u, v\rangle\rangle + \langle\langle w, v\rangle\rangle$ (отличающей скалярное произведение от предскалярного), и приблизив $£$ к 90°, можно классифицировать пространство $C_{[a,\,b]}$ по равномерной интерполируемости.

Определение. Если последовательность проекторов сходится к тождественному оператору поточечно, т. е. для $\forall\delta > 0$ и каждой функции $u \in Q$ существует такое $N(\delta, u) \in N$, что при всех $n > N$ верно неравенство

$$||(\overset{n}{\Pi} - I_Q)u||_Q \le \delta, \tag{13}$$

то данное проектирование назовем *слабым*.

Последовательность проекторов $\overset{n}{\Pi}$, аппроксимирующих функции Н-пространства $L^2_{[a,\,b]}$ МНП порядка n, осуществляет слабое проектирование ограниченного подмножества $Q \subset L^2_{[a,\,b]}$ на множество $T^n_{[a,\,b]}$ многочленов.

Определение. Если последовательность проекторов сходится к тождественному оператору по операторной норме, т. е. для $\forall\sigma > 0$ и $\forall u \in Q\ \exists N(\sigma) \in N$, такое, что при каждом $n > N$ выполняется неравенство

$$||(\overset{n}{\Pi} - I_Q)u||_Q \le \sigma\, ||u||_Q, \tag{14}$$

то данное проектирование назовем *сильным*.

Теорема 8. Последовательность операторов $\underset{\upsilon}{\overset{n}{\Pi}} : C^k_{[a,\,b]} \to P^n$, преобразующих функции из ограниченного подмножества $Q = \{u : ||u|| < \delta\}$ *M*-пространства $C^\infty_{[a,\,b]}$ в интерполянты Лагранжа на равномерной сетке, осуществляет сильное проектирование Q на множество $P^n_{[a,\,b]}$ многочленов, т. е.

$$\underset{\upsilon}{\overset{n}{\Pi}}\, {}^n u(x) = {}^n u(x) \text{ или } \left(\underset{\upsilon}{\overset{n}{\Pi}}\right)^2 = \underset{\upsilon}{\overset{n}{\Pi}};$$

и для каждой функции $u(x) \in Q \subset C^{\infty}_{[a,\,b]}$ и любого $\sigma > 0$ существует такое m, что для всех $n > m$ выполняется неравенство

$$||u(x) - \overset{n}{\underset{U}{\Pi}} u(x)||_{C^k} < \sigma\,||u(x)||_{C^k}.$$

Утверждение с $n > k$ следует из формулы Лагранжа [6, с. 35] для бесконечно дифференцируемых функций, принадлежащих $C^k_{[a,\,b]}$.

Таблица. – Значения σ_n для оценки σ в теореме 8 с k, равным 1 и 2

k \ n	4	6	8	10	12	14	16
1	$7{,}9{\cdot}10^{-4}$	$3{,}1{\cdot}10^{-6}$	$6{,}8{\cdot}10^{-9}$	$9{,}2{\cdot}10^{-12}$	$8{,}7{\cdot}10^{-15}$	$6{,}1{\cdot}10^{-18}$	$3{,}2{\cdot}10^{-21}$
2	$1{,}4{\cdot}10^{-2}$	$9{,}1{\cdot}10^{-5}$	$3{,}0{\cdot}10^{-7}$	$5{,}5{\cdot}10^{-10}$	$6{,}5{\cdot}10^{-13}$	$5{,}5{\cdot}10^{-16}$	$3{,}5{\cdot}10^{-19}$

Данные таблицы 6 подтверждают вывод теоремы 8 о сходимости последовательности проекторов к тождественному оператору I_Q по норме, что очень важно при определении оценок i-граней линейных операторов, аппроксимируемых этими проекторами. В то же время для получения оценок s-граней линейных операторов при решении функциональных уравнений достаточно, чтобы проектор отличался от тождественного оператора по норме не более, чем на $\sigma < 0{,}5$.

Сильное проектирование (см. пример 3 из [1, с. 230]) по норме $L^2_{[a,\,b]}$ осуществляется квадрополированием (не уступающим по качеству интерполированию) непрерывных функций $u(x) \in Q_\delta \subset C^k_{[a,\,b]}$ с помощью римановского интегрирования.

Но даже такой процесс аппроксимации исключает итеративность метода Галеркина нахождения МНП по норме Н-пространства $L^2_{[a,\,b]}$ непрерывного корня (1) «в том смысле, что отыскание каждого последующего приближения не использует предыдущих приближений» [3, с. 194]. Это касается и решения линеаризованного уравнения для (1)

$$F'(u)\Delta u = -F(u), \tag{15}$$

методом Галеркина, который не осуществляет априорный анализ точности приближений на каждом шаге процесса $\overset{n}{\Pi}$ проектирования корня Δu.

Так как процесс аппроксимации на всем M-пространстве решений U не обеспечивает, вообще говоря, стремление последовательности проекторов к тождественному оператору I_U по норме $L(U, U)$, то сходимость $\overset{n}{\underset{U}{\Pi}}$ к I_U возможна лишь на некотором подмножестве пространства U.

Один из способов достижения этой цели – выбор предкомпактного в U множества P. Тогда каждую функцию $u(x) \in P$ можно с любой точностью $\varepsilon > 0$ приблизить элементом конечной сети P^n с базисом $\{e^s, \ldots, e^n\}$, $n = n(\varepsilon)$. Другими словами, для

$$\forall u(x) \in P\ \exists p = \sum_{i=s}^{n} \alpha_i e^i \text{ из } P^n, \text{ что } ||u(x) - p|| < \varepsilon \text{ или}$$

$$||(\overset{n}{\underset{P}{\Pi}} - I_P)\,u(x)|| < \varepsilon, \text{ где } \overset{n}{\underset{P}{\Pi}} u(x) \equiv p. \tag{16}$$

Теорема 9. Пусть для $\forall\varepsilon > 0$ $\tau = \min\limits_{p \in P^n} ||p|| - \varepsilon > 0$ и $||u_0(x)|| \geq \tau + \delta$. Тогда в области $Q_\delta = \{||u(x) - u_0(x)|| < \delta\} \subset P$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{Q_\delta}{\Pi}} = I_{Q_\delta}$.

По определению $\lceil \overset{n}{\underset{Q_\delta}{\Pi}} - I_{Q_\delta} \rceil = \sup\limits_{u(x)\in Q_\delta} \dfrac{||\left(\overset{n}{\underset{Q_\delta}{\Pi}} - I_{Q_\delta}\right)u(x)||}{||u(x)||} < \dfrac{\varepsilon}{\tau} <$ $(\forall\varepsilon > 0)$.

Следовательно, проекторы $\overset{n}{\Pi}$ сходятся к оператору I по норме только на предкомпактных подмножествах пространств решений и образов. Это связано с тем, что в бесконечномерных B-пространствах тождественный оператор не компактен [1, с. 311] и не может быть ε-аппроксимирован конечным оператором. На предкомпактах B-пространств U и V может иметь место и обратимость компактного оператора.

Отметим, что для генерации сильно сходящихся приближений к корню (1) требуются оценки не только норм элементов пространств решений и образов, но и граней операторов, участвующих в этих процессах. Так как операторная норма вводится в пространстве непрерывных линейных операторов, то сильная сходимость к корню может быть достигнута лишь с использованием сильного проектирования пространства решений.

Оценки граней непрерывных линейных операторов предбанаховых пространств

Часто при решении функциональных уравнений наряду с аппроксимацией основного или вспомогательного операторов поставленной задачи требуется определить точность полученных приближений. Эта проблема может быть решена при помощи проектирования *Б*-пространства решений на всюду плотное в нем множество многочленов. Необходимым условием здесь является сходимость последовательности МНП (полученных сильным или слабым проектированием) к порождающей функции (корню функционального уравнения) по метрике *Б*-пространства.

Использование аппроксимирующих многочленов обусловлено тем, что поиск корней функционального уравнения (1) в виде генерации последовательности приближений из пространства решений по рекуррентным формулам не всегда может быть реализован на практике.

Например, если концы отрезка в методе половинного деления суть иррациональные числа, то решение уравнения в пространстве R определяется лишь теоретически. Также не представляется возможным найти иррациональный корень уравнения с помощью метода Ньютона. Для приближенного решения подобных уравнений используются элементы множества рациональных чисел всюду плотного в пространстве R.

Тем не менее, если замкнутое ограниченное множество в R компактно, то в бесконечномерных функциональных M-пространствах замкнутость и ограниченность подмножества не гарантируют ему компактность в M. Рассмотрим, какие дополнительные условия требуется наложить на проекторы этих пространств для получения необходимых оценок граней операторов.

Теорема 10 [1, с. 131]. Пусть U и V – метрические пространства, V – полное M-пространство, P – всюду плотное подмножество пространства U, $F : P \to V$ – равномерно непрерывное отображение.

Тогда существует, и притом единственное, непрерывное продолжение F отображения F на все U, и это продолжение ($F : U \to V$) равномерно непрерывно. Если F удовлетворяет условию Липшица с константой C, то продолжение F удовлетворяет условию Липшица с той же константой.

При доказательстве теоремы для любой точки $u \in U$ строится сходящаяся к ней последовательность Коши $\{^n u\}$, которая затем отображением F переводится в последовательность Коши полного пространства V. Таким образом осуществляется продолжение F отображения F.

Применительно к линейному ограниченному оператору $A : U \to V$, который на всюду плотном множестве P удовлетворяет условию Липшица с константой $C = \lceil A \rceil$, $A : P \to V$, его продолжение A удовлетворяет условию Липшица с этой же константой. Значит, константа Липшица для A равна $\lceil A \rceil$.

Используем это свойство для оценки s-грани функционального линейного оператора A, отображающего B-пространство U в V.

При помощи сильного проектирования (14) построим фундаментальную последовательность $\{^n p(x)\}$ степенных многочленов, сходящуюся к порождающей функции $u(x) \in Q \subset U$. Из условия $\|(\overset{n}{\Pi} - I_Q)u\| \le \sigma \|u\|$ следует, что норма проекции $^n p(x)$ элемента $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$(1-\sigma)\,\|u\| \le \|^n p(x)\| \le (1+\sigma)\,\|u\|, \tag{16}$$

а норма $u(x)$ находится в пределах

$$\frac{\|^n p(x)\|}{1+\sigma_n} \le \|u(x)\| \le \frac{\|^n p(x)\|}{1-\sigma_n}, \text{ где } \sigma_n = \sigma(n) < 1.$$

Следствия теоремы 10 справедливы и для слабого проектирования в U. Однако для оценки граней линейных операторов, действующих на элементы замкнутого M-пространства $C^\infty_{[a,\,b]}$, используется сильное проектирование оператора A справа по схеме:

1) условие «для любых $u \in Q \subset U$ и $\sigma > 0$ существует такой элемент $^n p(x) \in P^n \subset P$, что $\|u - {}^n p(x)\| \le \sigma \|u\|$» определяет для каждого $n = n(\sigma)$ проектор элементов пространства решений $\overset{n}{\Pi} : U \to P^n$;

2) образ многочлена $^n p(x)$, определяемого вектором ^{n+1}P, под действием оператора A есть элемент пространства V (в общем случае не конечный ряд):

$$A\,{}^n p(x) = A\,\overset{n}{\Pi}\,u = (A\,\overset{n}{\Pi})u \equiv {}_N^{\,n}Au = {}_N^{\,n}A\,{}^{n+1}P, \text{ где } {}_N^{\,n}A = {}^N_0\{a_{ij}\}^n_0.$$

В отличие от квадратной матрицы $^zA = \{a_{ij}\}^n_0$ с конечным числом строк и столбцов линейный оператор ${}_N^{\,n}A$ имеет счетное число строк. При условии сильного проектирования для s-грани оператора ${}_N^{\,n}A$ справедливо двойное неравенство

$$(1-\sigma_n)\lceil A \rceil \le \lceil {}_N^{\,n}A \rceil \le (1+\sigma_n)\lceil A \rceil. \tag{17}$$

Доказательство этого двойного неравенства следует из двойного неравенства (16) и определения s-грани

$$\lceil {}_N^{\,n}A \rceil = \sup_{u \ne 0} \frac{\|{}_{\mathcal{N}}^{\,n}Au\|}{\|u\|} = \sup_{u \ne 0} \frac{\|A\,{}^n u\|}{\|{}^n u\|}\frac{\|{}^n u\|}{\|u\|}.$$

Из соотношения (17) вытекает более значимое в прикладном анализе двойное неравенство, оценивающее s-грань линейного оператора A:

$$\frac{\lfloor {}_{\mathcal{N}}^{\,n}A \rfloor}{1+\sigma_n} \le \lceil A \rceil \le \frac{\lfloor {}_{\mathcal{N}}^{\,n}A \rfloor}{1-\sigma_n}. \tag{18}$$

Покажем, как с помощью оператор-счетной теории объясняется равенство $A^n p(x) = {}_N^n A^{n+1} P$. Для этого изобразим линейный оператор A и многочлен ${}^n p(x)$ в виде счетной матрицы и счетного вектора соответственно:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{00} & \cdots & a_{0n} & a_{0n+1} & \cdots & a_{0\mathcal{N}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m0} & \cdots & a_{mn} & a_{mn+1} & \cdots & a_{m\mathcal{N}} \\ \hline a_{m+10} & \cdots & a_{m+1n} & a_{m+1n+1} & \cdots & a_{m+1\mathcal{N}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mathcal{N}0} & \cdots & a_{\mathcal{N}n} & a_{\mathcal{N}n+1} & \cdots & a_{\mathcal{N}\mathcal{N}} \end{array}\right) \text{ и } {}^n p = \begin{pmatrix} {}^n p(x_0) \\ \vdots \\ {}^n p(x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В пространстве образов V итерационный базис может быть построен с произвольным параметром дискретизации $m+1$, $m \geq n$ (например, при решении интегральных уравнений). Однако в полиномиальных методах решения функциональных уравнений вида (1) методом Ньютона или методом второго порядка будем полагать, что $m = n$. Это связано с корректностью решения соответствующей линейной или квадратичной системы уравнений.

Тогда всякий непрерывный линейный оператор $A : U \to V$, действующий из ограниченного подмножества B-пространства $C^k_{[a,\, b]}$, $k \in N$, состоящего из элементов M-пространства $C^\infty_{[a,\, b]}$, в $C^\infty_{[a,\, b]} \subset V$, является пределом последовательности конечных операторов и его с любой точностью ε можно аппроксимировать матрицей ${}_m^n A = {}^m_0\{a_{ij}\}^n_0$, используя сильное проектирование элементов U и V на множество многочленов $P^n_{[a,b]}$ или $T^n_{[a,b]}$.

Левый проектор оператора A, проецирующий элементы $v \in \tilde{O}_\rho \subset C^\infty_{[a,b]}$ на множество P^m с точностью $||v - {}^m p|| \leq \sigma_m\, ||v||$, обозначим $\overset{m}{\Pi} : \tilde{O}_\rho \to P^m$. Тогда в условиях изложения справедлива оценка s-грани матрицы ${}_m^n A$

$$(1 - \sigma_n)(1 - \sigma_m)\lceil A \rceil \leq \lceil {}_m^n A \rceil \leq (1 + \sigma_n)(1 + \sigma_m)\lceil A \rceil, \tag{19}$$

или, что более важно в прикладном анализе,

$$\frac{\left| {}_m^n A \right|}{(1+\sigma_n)(1+\sigma_m)} \leq \lceil A \rceil \leq \frac{\left| {}_m^n A \right|}{(1-\sigma_n)(1-\sigma_m)}. \tag{20}$$

Аналогично оценим i-грань банахова линейного оператора.

Теорема 11. Пусть U и V – B-пространства, P – всюду плотное подмножество U, $A : P \to V$ – непрерывный линейный оператор, ограниченный снизу $\lfloor A \rfloor \geq c$. Тогда существует, и притом единственное, непрерывное продолжение A отображения A на все U и $\lfloor A \rfloor \geq c$.

Пусть $\lfloor A \rfloor \geq c$, тогда для любых фундаментальных последовательностей из P справедливо неравенство $||A^n p(x) - A^n q(x)|| \geq c\, ||{}^n p(x) - {}^n q(x)||$.

Переходя к пределу, получим

$$||Au(x) - Av(x)|| \geq c\, ||u(x) - v(x)||.$$

Другими словами, если второе неравенство будет нарушено, то найдутся последовательности, сходящиеся к $u(x)$ или $v(x)$ такие, что первое неравенство для них не выполнится.

Аналогично неравенствам (17–20), оценивающим s-грань банахова линейного оператора, приведем оценки его i-грани в некотором замкнутом подмножестве, например, единичном шаре пространства U.

$$(1-\sigma_n)(1-\sigma_m)\lfloor A\rfloor \le \lfloor {}_m{}^n A\rfloor \le (1+\sigma_n)(1+\sigma_m)\lfloor A\rfloor. \qquad (21)$$

$$\frac{\lfloor {}_m^n A\rfloor}{(1+\sigma_n)(1+\sigma_m)} \le \lfloor A\rfloor \le \frac{\lfloor {}_m^n A\rfloor}{(1-\sigma_n)(1-\sigma_m)}. \qquad (22)$$

Полученные оценки граней линейного банахова оператора A в полных метрических подпространствах могут отличаться от оценок граней оператора на всем банаховом пространстве. Это обстоятельство, прежде всего, надо учитывать при решении нелинейных функциональных уравнений. Для решения входящего в метод Ньютона линеаризованного уравнения (15), корень которого ищется в окрестности 0 пространства U, большое значение имеет также выполнение условий теоремы 9.

Заключение

Оценки граней линейных и билинейных операторов банаховых пространств необходимы, прежде всего, для локализации методами полиномиального анализа изолированных корней функционального уравнения (1) в определенной окрестности $Q_r = ||u - u_0|| \le r$ приближения из всюду плотного множества пространства решений. При достаточно малом r, это позволяет исследователям использовать данное приближение в качестве искомого корня, не нарушая методологию функционального анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

3. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

4. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.

5. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.

6. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1983. – 288 с.

REFERENCES

1. Kolmogorov, A. N. Eliemienty tieorii funkcij i funkcional’nogo analiza / A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. – M. : Nauka, 1989 – 624 s.

2. Kantorovich, L. V. Funkcional’nyj analiz / L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. – M. : Nauka, 1977 – 742 s.

3. Krasnosiel’skij, M. A. Priblizhennoje sostojanije opieratornykh uravnienij / M. A. Krasnosiel’skij, G. M. Vajniko, P. P. Zabriejko. – M. : Nauka, 1969. – 456 s.

4. Antonievich, A. B. Funkcional’nyj analiz i integral’nyje uravnienija / A. B. Antonievich, Ya. V. Radyno. – Minsk : BSU, 2006. – 430 s.

5. Morozov, V. V. Prikladnoj analiz i programmirovanije : posobije / V. V. Morozov. – Briest : BrGU, 2012. – 246 s.

6. Krylov, V. I. Nachala tieorii vychislitiel’nykh mietodov. Interpolirovanije i integrirovanije / V. I. Krylov, V. V. Bobkov, P. I. Monastyrnyj. – Minsk : Nauka i tiekhnika, 1983. – 288 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.10.2021