УДК 510.522

***Александр Евгеньевич Будько***
*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
***Aleksandr Budko***
*PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor,*
*Associate Professor of Department of Algebra, Geometry, and Mathematical Modelling*
*at the Brest State A. S. Pushkin University*
e-mail:budzko@brsu.brest.by

# О ПОРЯДКЕ СЛЕДОВАНИЯ КОМАНД В ПРОГРАММАХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА СТЕПЕНИ 2

*Рассматривается однолентичная машина Тьюринга с внешним алфавитом, состоящим из двух символов. Программа машины задаётся списком команд. Определяется, каким образом машина отыскивает очередную команду в своей программе, которую она должна выполнять. Определяется оптимальный порядок следования команд в программе как порядок, при котором время их отыскания будет наименьшим. Под наименьшим понимается наименьшее среднее время как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций. Исходя из структуры программы машины, заданной графом, определяются элементарные машины Тьюринга степени 2. Для элементарных машин степени 2 указан оптимальный порядок следования команд и определено минимальное время их отыскания.*

***Ключевые слова:*** *элементарная машина Тьюринга, команда, программа, порядок следования команд, время отыскания команд.*

## *On the Order of Following Commands in Programs of Elementary Turing Machines of Degree 2*

*The article investigates a single-tape Turing machine with external alphabet, consisting of two symbols. The machine's program is set by the order of commands. The article defines the way in which the machine retrieves a further command in the program to be executed. The optimal order of following commands in programs is defined as the order in which command retrieval time is the shortest. The shortest retrieval time is the least average time as the ratio of the sum of the retrieval time over all initial configurations to the number of these configurations. Based on the structure of the program of the machine given by the graph, elementary Turing machines of degree 2 are determined. For the elementary machines of degree 2 the optimal order of following commands is defined as well as the minimal retrieval time.*

***Key words:*** *elementary Turing machine, command, program, order of following commands, command retrieval time.*

## Введение

Машина Тьюринга является одной из классических моделей алгоритма. Она позволяет исследовать свойства алгоритма. Наибольшее количество исследований по машинам Тьюринга посвящено рассмотрению сложности тьюринговых вычислений. Обзоры исследований по этому направлению даны в [1–3]. Исследуется также сложность самого алгоритма и, в частности, сложность универсальных машин Тьюринга [4; 5]. Разрабатывается программное обеспечение анимации работы машины [6; 7]. Данная работа посвящена нахождению оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга и продолжает ранее начатые исследования [8–11].

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и внешним алфавитом из двух символов. Программу машины Тьюринга можно задавать как списком команд, так и ориентированным графом. При задании списком программа определяется перечнем команд вида $q_i a_i \to a_k D q_j$, где $q_i$, $q_j$ – внутренние состояния машины, $a_i$, $a_k \in \{0,1\}$, $D \in \{Л,П,С\}$.

Состояние $q_0$ называется конечным и команда, в правой части которой записано это состояние, – тоже конечной. В [8] определено каким образом машина отыскивает в списке команду, которую она должна выполнять в данный момент.

1. Пусть в начальный момент головка обозревает символ $a_r$. Тогда машина, начиная с первой команды списка, сравнивает $q_1 a_r$ с левыми частями команд до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_1 a_r$, которую она и будет выполнять.

2. Пусть в момент после выполнения команды $q_i a_i \to a_k Dq_j$ $(q_j \neq q_0)$ головка обозревает символ $a_c$. Тогда, начиная с команды, следующей за выполненной, машина сравнивает $q_j a_c$ с левыми частями команд списка до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_j a_c$, которую она и будет выполнять.

3. Сравнение производится в том порядке, в котором команды следуют в списке. При этом, если после сравнения с левой частью последней команды списка нужная команда не найдена, сравнение продолжается, начиная с первой команды списка. Сравнение любого $q_j a_k$ с левой частью любой команды списка проводится за одинаковое время – за одну единицу времени.

В [8] определяется оптимальный порядок следования команд в программе как порядок, при котором время их отыскания будет наименьшим. Под наименьшим понимается наименьшее среднее время как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций.

В [9] введена классификация $L_0, L_1, L_2, \ldots$ машин Тьюринга в зависимости от структуры графа, задающего программу машины. Классу $L_0$ принадлежат машины, программы которых удовлетворяют требованиям:

1) граф является связным и не содержит циклов;

2) в каждую неконечную вершину, отличную от начальной, входит ровно одна дуга; в начальную вершину не входит ни одна дуга.

Машина Тьюринга класса $L_0$ с $n$ внутренними состояниями называется элементарной [10], если в ее программе, заданной графом, из каждой вершины $i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ одна дуга уходит в вершину $i+1$, а другая – в конечную вершину. Из вершины $n$ обе дуги уходят в конечную вершину. Такую машину будем называть еще элементарной машиной степени 1.

Будем рассматривать только те начальные конфигурации, у которых головка машины за время выполнения программы просматривает все символы начальной конфигурации.

***Теорема 1*** [10]. Для элементарной машины Тьюринга, имеющей $n$ внутренних состояний, выполняются следующие утверждения:

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n$;

2) оптимальным является тот порядок, при котором вначале следуют команды дуг, исходящих из вершины 1, затем – команды дуг, исходящих из вершины 2, и т. д. При этом в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины $i$ $(1 \leq i \leq n-1)$, первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину.

***Лемма 1*** [8]. При оптимальном порядке команды любого пути из начальной вершины в конечную следуют в порядке, определяемом дугами этого пути.

Пусть дана программа элементарной машины степени 1, заданная графом. В программе этой машины к концу дуги, уходящей из вершины $j$ $(1 \le j \le n - 1)$ в конечную вершину, присоединим граф программы другой элементарной машины степени 1. Полученную машину $M$ назовем элементарной машиной степени 2. Программу машины $M$ можно разбить на программы трех машин $M_0$, $M_1$ и $M_2$. Программа машины $M_0$ определяется командами дуг, выходящими из вершин $1, 2 \ldots, j$, программы машин $M_1$ и $M_2$ – командами дуг поддеревьев, начальными вершинами у которых являются концы соответственно верхней и нижней дуг, выходящих из вершины $j$. Очевидно, каждая из машин $M_0$, $M_1$ , $M_2$ является элементарной степени 1. Количество внутренних состояний машин $M_1$ и $M_2$ обозначим соответственно через $k_1$ и $k_2$. Очевидно, $k_1 + k_2 + j = n$. Меньшую из величин $k_1$ и $k_2$ обозначим через $k$.

***Лемма 2.*** Если $j = 1$, то для элементарной машины Тьюринга степени 2 выполняются следующие утверждения:

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n + k$;

a) оптимальным является следующий порядок следования команд:

b) команда дуги, исходящая из вершины 1 и входящая в начальную вершину графа той машины из $M_1$ и $M_2$, у которой меньшее число внутренних состояний, затем команды самой этой машины;

c) команда дуги, исходящая из вершины 1 и входящая в начальную вершину программы той машины из $M_1$ и $M_2$, у которой большее число внутренних состояний, затем команды самой этой машины;

d) в каждой из машин $M_1$ и $M_2$ команды следуют в порядке, определяемом теоремой 1.

***Доказательство.*** Так как $j = 1$, то из начальной вершины верхняя дуга уходит во входную вершину графа программы машины $M_1$, а нижняя – во входную вершину графа программы машины $M_2$. Пусть, для определенности, $k_1 \le k_2$.

В силу леммы 1 при оптимальном порядке команда верхней дуги, выходящей из вершины 1, должна следовать до команд машины $\mathrm{M}_1$, а команда нижней дуги – до команд машины $\mathrm{M}_2$. Кроме того, в силу этой же леммы и команды машины $\mathrm{M}_1$ и команды машины $M_2$ должны следовать в порядке, определяемом теоремой 1.

Возможны следующие случаи очередности следования команд.

*Случай 1.* Первой следует команда верхней дуги, выходящей из вершины 1.

*Случай 1.1.* За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следуют все команды машины $\mathrm{M}_1$.

В машине $M_1$ имеется $k_1$ неконечных вершин. Поэтому конечных вершин будет $k_1 + 1$ и соответственно столько же начальных конфигураций для машины $M_1$ . При работе над каждой из этих начальных конфигураций машина вначале просматривает команду верхней дуги исходящей из вершины 1. Поэтому с учетом этого время отыскания команд для машины $M_1$ по теореме 1 равно

$$(k_1 + 1) + ({k_1}^2 + 2\,k_1) = {k_1}^2 + 3\,k_1 + 1.$$

*Случай 1.1.1.* За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1 и командами машины $\mathrm{M}_1$ следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1. Тогда, очевидно, за перечисленными выше командами следуют все команды машины $\mathrm{M}_2$.

В машине $M_2$ имеется $k_2$ неконечных вершин. Поэтому конечных команд будет $k_2 + 1$ и соответственно столько же начальных конфигураций для машины $M_2$ . При работе над каждой из этих начальных конфигураций машина $M_2$ вначале просматривает команду верхней дуги, исходящей из вершины 1, затем – 2 $k_1$ команд машины $M_1$ . После этого машина просматривает команду нижней дуги, исходящей из вершины 1, и начинают выполняться команды машины $M_2$. Поэтому с учетом этого время отыскания команд для машины $M_2$ по теореме 1 равно

$$(1 + 2k_1)(k_2 + 1) + (k_2 + 1) + (k_2^{\,2} + 2k_2) =$$
$$= k_2^{\,2} + 2k_2 + k_2 + 1 + 2k_1k_2 + 2k_1 + k_2 + 1 =$$
$$= k_2^{\,2} + 4k_2 + 2k_1k_2 + 2k_1 + 2.$$

Тогда общее время отыскания команд для машины $M$ будет равно

$$(k_1^{\,2} + 3k_1 + 1) + (k_2^{\,2} + 4k_2 + 2k_1k_2 + 2k_1 + 2) =$$
$$= (k_1^{\,2} + k_2^{\,2} + 2k_1k_2) + 5k_1 + 4k_2 + 3 = (k_1 + k_2)^2 + 5k_1 + 4k_2 + 3.$$

Так как $j = 1$, то $n = k_1 + k_2 + 1$ и $n^2 = (k_1 + k_2)^2 + 2(k_1 + k_2) + 1$.

Следовательно, общее время отыскания команд для машины $M$ будет равно

$$(k_1 + k_2)^2 + 5k_1 + 4k_2 + 3 =$$
$$= ((k_1 + k_2)^2 + 2(k_1 + k_2) + 1) + 3k_1 + 2k_2 + 2 =$$
$$= n^2 + 3k_1 + 2k_2 + 2 = n^2 + 2n + k_1.$$

Так как $k_1 \le k_2$, то $k = k_1$ и общее время отыскания команд для машины $M$ будет равно $n^2 + 2n + k$. Это время и порядок следования команд удовлетворяют доказываемой лемме.

*Случай 1.1.2.* За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1 и командами машины $M_1$ следует одна из команд машины $M_2$. Данный порядок в силу леммы 1 оптимальным не является, так как при оптимальном порядке до команд машины $M_2$ должна следовать команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

*Случай 1.2.* За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следует $r$ $(r < 2k_1)$ команд машины $M_1$.

*Случай 1.2.1* За $r$ командами машины $M_1$ следует одна из команд машины $M_2$. В силу леммы 1 такой порядок оптимальным не является.

*Случай 1.2.2.* За $r$ командами машины $M_1$ следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1. Количество команд машины $M_2$, находящихся среди команд машины $M_1$, обозначим через s. Пусть в программе машины $M_1$ эти команды находятся на местах $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s$. Место нахождения команды нижней дуги, выходящей из вершины 1, обозначим через $t_0$. Среди s команд машины $M_2$ количество конечных команд равно, очевидно, $]^{s}/_{2}[$. Эти конечные команды соответствуют $]^{s}/_{2}[$ начальным конфигурациям машины $M_2$, которые обозначим через $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{]^{s}/_{2}[}$.

При работе над конфигурацией $P_1$ машина $M_2$ просматривает не все $2k_1$ команд машины $M_1$ как в случае 1.1.1, а только $t_1 - 2$. Поэтому по сравнению со случаем 1.1.1 время отыскания команд при работе машины $M_2$ над конфигурацией $P_1$ уменьшается на $2k_1 - (t_1 - 2) = (2k_1 - t_1) + 2$. Аналогично, при работе машины $M_2$ над конфигурацией $P_2$ время отыскания команд уменьшается на $2k_1 - (t_3 - 4) = (2k_1 - t_3) + 4$ и т.д. При работе машины $M_2$ над конфигурацией $P_{]^{s}/_{2}[}$ время отыскания команд уменьшается на $2k_1 - (t_s - s - 1) = (2k_1 - t_s) + (s + 1)$. Следовательно, по сравнению со случаем 1.1.1 общее время отыскания команд при работе машины $M_2$ уменьшается на

$$T_2 = (2k_1 - t_1) + 2 + (2k_1 - t_3) + 4 + (2k_1 - t_5) + 6 + \ldots + (2k_1 - t_s) + (s + 1) =$$
$$= 2k_1 \, ]^{s}/_{2}[ - (t_1 + t_3 + t_5 + \ldots + t_s) + (2 + 4 + 6 + \ldots + (s + 1)) \le$$
$$\le 2k_1 \, {}^{(s+1)}/_{2} - (t_1 + t_3 + t_5 + \ldots + t_s) + (2 + 4 + 6 + \ldots + (s + 1)) =$$
$$= k_1 (s + 1) - (t_1 + t_3 + t_5 + \ldots + t_s) + {}^{1}/_{2} \, ]^{s}/_{2}[ \, (s + 3).$$

Вместе с тем, по сравнению со случаем 1.1.1 увеличивается время отыскания команд при работе машина $\mathrm{M}_1$. Действительно, каждому пути из начальной вершины в конечную соответствует начальная конфигурация. Поэтому каждый путь, в котором встречается команда нижней дуги, выходящей из вершины 1, и находящаяся на $t_0$-ом месте, будет давать увеличение на одну единицу времени отыскания для машины $M_1$ . Таких путей будет, очевидно, $(k_1 + 1) - [{}^{t_0}/_2]$.

Аналогично, каждый путь, в котором встречается первая команда машины $M_1$ , находящаяся на $t_1$-ом месте, будет давать увеличение на одну единицу времени отыскания для машины $M_1$ . Таких путей будет, очевидно, $(k_1 + 1) - [{}^1/_2\,(t_1 - 1)]$ и т. д.

Следовательно, по сравнению со случаем 1.1.1 общее время отыскания команд при работе машина $\mathrm{M}_1$ увеличивается на

$$\mathrm{T}_1 = ((k_1 + 1) - [{}^{t_0}/_2]) + ((k_1 + 1) - [{}^1/_2\,(t_1 - 1)] + ((k_1 + 1) - [{}^1/_2\,(t_2 - 2)]) +$$
$$+ ((k_1 + 1) - [{}^1/_2\,(t_s - s)]) = (k_1 + 1)\,(s + 1) - [{}^{t_0}/_2] -$$
$$- ([{}^1/_2\,(t_1 - 1)] + [{}^1/_2\,(t_2 - 2)] + \ldots + [{}^1/_2\,(t_s - s)]) = k_1\,(\mathrm{s} + 1) + (\mathrm{s} + 1) -$$
$$- ([{}^1/_2\,(t_0 - 0)] + [{}^1/_2\,(t_1 - 1)] + [{}^1/_2\,(t_2 - 2)] + \ldots + [{}^1/_2\,(t_s - s)]).$$

Нетрудно показать, что $[{}^1/_2\,(a - b)] \le [{}^a/_2] - [{}^b/_2]$. Поэтому для каждого $i \ge 1$ будет выполняться условие $[{}^1/_2\,(t_i - i)] \le [{}^{t_i}/_2] - [{}^i/_2]$.

Следовательно,

$$\mathrm{T}_1 = k_1\,(\mathrm{s} + 1) + (\mathrm{s} + 1) - ([{}^1/_2\,(t_0 - 0)] + [{}^1/_2\,(t_1 - 1)] + [{}^1/_2\,(t_2 - 2)] +$$
$$+ [{}^1/_2\,(t_s - s)]) \ge k_1\,(\mathrm{s} + 1) + (\mathrm{s} + 1) - ([{}^1/_2\,t_0] + [{}^1/_2\,t_1] + [{}^1/_2\,t_2] +$$
$$+ [{}^1/_2\,t_s]) + ([{}^1/_2] + [{}^2/_2] + \ldots + [{}^{\mathrm{s}}/_2]).$$

Поскольку для машины $\mathrm{M}_1$ время отыскания команд увеличилось, а для машины $\mathrm{M}_2$ – уменьшилось, то разность соответствующих величин будет равна

$$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 \ge k_1\,(\mathrm{s} + 1) + (\mathrm{s} + 1) - ([{}^1/_2\,t_0] + [{}^1/_2\,t_1] + [{}^1/_2\,t_2] +$$
$$+ [{}^1/_2\,t_s]) + ([{}^1/_2] + [{}^2/_2] + \ldots + [{}^{\mathrm{s}}/_2]) - (k_1\,(\mathrm{s} + 1) - (t_1 + t_3 + t_5 + \ldots + t_s) +$$
$$+{}^1/_2\,]^{\mathrm{s}}/_2\,[\,(s + 3) = (\mathrm{s} + 1) - ([{}^1/_2\,t_0] + [{}^1/_2\,t_1] + [{}^1/_2\,t_2] + \ldots + [{}^1/_2\,t_s]) +$$
$$+ ([{}^1/_2] + [{}^2/_2] + \ldots + [{}^{\mathrm{s}}/_2]) + (t_1 + t_3 + t_5 + \ldots + t_s) - {}^1/_2\,]^{\mathrm{s}}/_2\,[\,(s + 3) =$$
$$= (\mathrm{s} + 1) + (\mathrm{t}_1 - ([{}^{\mathrm{t}_0}/_2] + [{}^{\mathrm{t}_1}/_2])) + (\mathrm{t}_3 - ([{}^{\mathrm{t}_2}/_2] + [{}^{\mathrm{t}_3}/_2])) + (\mathrm{t}_5 - ([{}^{\mathrm{t}_4}/_2] +$$
$$+ [{}^{\mathrm{t}_5}/_2])) + \ldots + (\mathrm{t}_\mathrm{s} - ([{}^{\mathrm{t}_{s-1}}/_2] + [{}^{\mathrm{t}_\mathrm{s}}/_2])) + ([{}^1/_2] + [{}^2/_2] + \ldots + [{}^{\mathrm{s}}/_2]) -$$
$$- {}^1/_2\,]^{\mathrm{s}}/_2\,[\,(\mathrm{s} + 3)).$$

Так как для каждого $i \ge 1$ выполняется условие $t_i > t_{i-1}$, то $[{}^{t_i}/_2] + [{}^{t_{i-1}}/_2] < t_i$ и поэтому $t_i - ([{}^{t_i}/_2] + [{}^{t_{i-1}}/_2]) > 0$ или $t_i - ([{}^{t_i}/_2] + [{}^{t_{i-1}}/_2]) \ge 1$.

Тогда разность $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2$ примет вид

$$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 \ge (s + 1) + s + ([{}^1/_2] + [{}^2/_2] + \ldots + [{}^{\mathrm{s}}/_2]) - {}^1/_2\,]^{\mathrm{s}}/_2\,[\,(s + 3)).$$

Очевидно, $[{}^1/_2] + [{}^2/_2] + [{}^3/_2] + [{}^4/_2] + [{}^5/_2] + \ldots + [{}^{\mathrm{s}}/_2] =$

$$= 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + [{}^{(\mathrm{s} - 1)}/_2] + [{}^{\mathrm{s}}/_2].$$

Если s – четное, то $[{(s-1)}/{2}] + [{s}/{2}] = {(s-2)}/{2} + {s}/{2}$. Тогда

$$1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + [{(s-1)}/{2}] + [{s}/{2}] = 1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + {(s-2)}/{2} + {s}/{2} =$$
$$= (1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + {(s-2)}/{2} + {(s-2)}/{2}) + {s}/{2} =$$
$$= 2(1 + 2 + \ldots + {(s-2)}/{2}) + {s}/{2} = 2\,{1}/{2}\,(1 + {(s-2)}/{2})\,{(s-2)}/{2} + {s}/{2} =$$
$$= {s}/{2}\,{(s-2)}/{2} + {s}/{2} = {s}/{2}\,{s}/{2}.$$

В этом случае так как s – четное, то $]{s}/{2}[ = {s}/{2}$, и поэтому

$$T_1 - T_2 \geq (s+1) + s + {s}/{2}\,{s}/{2} - {1}/{2}\,{s}/{2}\,(s+3)) =$$
$$= 2s + 1 + {s^2}/{4} - {s^2}/{4} - {3s}/{4} = {5s}/{4} + 1 > 0/$$

Так как $T_1 - T_2 > 0$, то время отыскания команд в рассматриваемом случае будет больше, чем в случае 1.1.1.

Случай, когда s – нечетное рассматривается аналогично.

*Случай 1.3.* За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следует одна из команд машины $M_2$. Данный порядок в силу леммы 1 оптимальным не является, так как до команд машины $M_2$ при оптимальном порядке должна следовать команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

*Случай 1.4.* За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

*Случай 1.4.1.* За командами верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, следуют все команды машины $M_1$. Тогда, очевидно, за перечисленными выше командами следуют все команды машины $M_2$.

В машине $M_1$ имеется $k_1 + 1$ конечных вершин и соответственно столько же начальных конфигураций для самой машины $M_1$. При работе над каждой из этих начальных конфигураций машина вначале просматривает команды двух дуг, исходящих из вершины 1. Поэтому с учетом этого время отыскания время отыскания команд для машины $M_1$ по теореме 1 равно

$$2\,(k_1 + 1) + k_1{}^2 + 2\,k_1 = k_1{}^2 + 4\,k_1 + 2,$$

т. е. это время больше, чем в случае 1.1.1.

Поскольку машина $M_2$, как и в случае 1.1.1, до выполнения своих команд должна вначале просмотреть команды двух дуг, исходящих из вершины 1 и все команды машины $M_1$, то время отыскания команд при работе машины $M_2$ будет таким же как и в случае 1.1.1.

Таким образом в случае 1.4.1 общее время отыскания команд при работе машины $M$ будет больше, чем в случае 1.1.1 за счет увеличения времени отыскания команд машины $M_1$.

*Случай 1.4.2.* За командами верхней и нижней дуг, выходящими из вершины 1, следует $t_1$ $(t_1 < 2k_1)$ команд машины $M_1$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.2.

*Случай 1.4.3.* За командами верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, следуют все команды машины $M_2$. Тогда, очевидно, за перечисленными выше командами следуют команды машины $M_1$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.4.1.

*Случай 1.4.4.* За командами верхней и нижней дуг, выходящими из вершины 1, следует $r$ $(r < 2k_1)$ команд машины $M_2$.Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.2.

*Случай 2.* Первой следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.

*Случай 3.* Первой следует одна из команд машины $M_1$ или $M_2$. В силу леммы 1 такой порядок следования команд оптимальным не является. Лемма 2 доказана.

***Теорема 2.*** Для элементарной машины Тьюринга степени 2 выполняются следующие утверждения:

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n + k$;

2) оптимальным является следующий порядок следования команд:

a) команды пар дуг, исходящих из вершин $1, 2, 3, \ldots, j-1$; при этом в каждой паре первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину;

b) оставшиеся команды следуют в порядке, определяемом леммой 2.

***Доказательство.*** Пусть дана $L$ – элементарная машина Тьюринга степени 2. Машину $L$ можно рассматривать как последовательное соединение двух машин $L_0$ и $L_1$. Машина $L_0$ определяется командами дуг, исходящими из вершин $1, 2, 3, \ldots, j-1$, машина $L_1$ – командами оставшихся дуг. Очевидно, команды машины $L_1$ при оптимальном порядке должны следовать в порядке, определяемом леммой 2 (без учета остальных команд). Кроме того, в силу леммы 1 команды дуг машины $L_0$, исходящие из вершин $1, 2, 3, \ldots, j-1$ и не входящие в конечную вершину, при оптимальном порядке должны следовать до команд машины $L_1$ в порядке $1, 2, 3, \ldots, j-1$. Остались нерассмотренными команды дуг машины $L_0$, исходящие из вершин $1, 2, 3, \ldots, j-1$ и входящие в конечную вершину.

Возможны следующие случаи следования команд.

*Случай 1.* Команды следуют в порядке, определяемом в п. 2) теоремы. Определим время отыскания команд для этого порядка. Команды дуг машины $L_0$, исходящие из вершин $1, 2, 3, \ldots, j-1$ и входящие в конечную вершину, являются конечными и соответствуют $j-1$ начальным конфигурациям. При рассматриваемом порядке следования эти команды имеют номера $1, 3, 5, \ldots, 2(j-1)-1$. Эти номера являются также временем отыскания команд при работе машины $L_0$ над $j-1$ начальными конфигурациями. Поэтому время отыскания команд при работе машины $L_0$ будет равно

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2(j-1) - 1 = {}^1\!/_2\,(1 + 2j - 3)(j-1) = (j-1)^2.$$

Машина $L_1$ имеет $n-(j-1) = n-j+1$ внутренних состояний. Поэтому по лемме 2 время отыскания команд для машины $L_1$ (без учета просмотра команд с состояниями $1, 2, 3, \ldots, j-1$) будет равно

$$(n-j+1)^2 + 2(n-j+1) + k.$$

Для машины $L_1$ машина имеется $n-(j-1)+1 = n-j+2$ начальных конфигураций. При работе над каждой из этих конфигураций машина $L_1$ должна вначале просмотреть $2(j-1)$ команд машины $L_0$. Время отыскания этих команд по всем начальным конфигурациям будет равно $2(j-1)(n-j+2)$.

Тогда общее время отыскания команд для машины $L$ будет равно

$$\begin{gathered}(j-1)^2 + (n-j+1)^2 + 2(n-j+1) + k + 2(j-1)(n-j+2) = \\ = j^2 - 2j + 1 + (n-j)^2 + 2(n-j) + 1 + 2n - 2j + 2 + k + 2jn + 4j - 2n - 4 - \\ - 2j^2 + 2j = j^2 + n^2 - 2nj + j^2 + 2n - 2j + 2n + k + 2jn - 2n - 2j^2 + 2j = \\ = n^2 + 2n + k.\end{gathered}$$

*Случай 2.* Из $j-1$ команд дуг машины $L_0$, исходящих из вершин $1, 2, 3, \ldots, j-1$ и входящих в конечную вершину, $s$ $(1 \le s \le j-1)$ команд находятся среди команд машины $L_1$.

Пусть эти команды находятся на местах $t_1^1, t_2^1, t_3^1, \ldots, t_s^1$. Места, на которых находились эти команды в случае1 обозначим соответственно через $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s$.

В случае 2 по сравнению со случаем 1 увеличивается время отыскания команд при выполнении команд дуг машины $L_0$, исходящих из вершин $1, 2, 3, \ldots, j-1$ и входящих в конечную вершину на величину

$$(t_1^1 - t_1) + (t_2^1 - t_2) + (t_3^1 - t_3) + \ldots + (t_s^1 - t_s).$$

Вместе с тем по сравнению со случаем 1 уменьшается время отыскания при работе машины $L_1$. Покажем это на примере команды, находящейся в случае 1 на $t_1$-ом месте и в случае 2 – на $t_1^1$-ом.

В случае 1 машина $L_1$ при работе над всеми начальными конфигурациями команду, находящуюся на $t_1$-ом месте, просматривала. В случае 2 при работе над некоторыми начальными конфигурациями машина $L_1$ команду, находящуюся на $t_1^1$-ом месте, уже не просматривает. Это будет выполняться, очевидно, в том случае, если команда, находящаяся на $t_1^1$-ом месте, следует после конечной команды, соответствующей начальной конфигурации. Поэтому количество таких конфигураций будет равно количеству конечных команд машины $L_1$, следующих до команды, находящейся на $t_1$-ом месте. Таких команд будет, очевидно, не больше чем $]^{t_1^1}/_2[ - (j-1)$. Кроме того, первая конечная команда машины $L_1$ находится не ранее, чем на $2j$-ом месте. Поэтому $t_1^1 \geq 2j$.

Рассмотрим разность $(t_1^1 - t_1) - (]^{t_1^1}/_2[ - (j-1))$.

Так как для целого $a$ выполняется условие $[^a/_2] + ]^a/_2[ = a$, то рассматриваемая разность равна

$$[^{t_1^1}/_2] - t_1 + (j-1).$$

Очевидно, $t_1 \leq 2(j-1)$. Поэтому

$$[^{t_1^1}/_2] - t_1 + (j-1) \geq [^{t_1^1}/_2] - 2(j-1) + (j-1) = [^{t_1^1}/_2] - (j-1) \geq$$
$$\geq [^{2j}/_2] - (j-1) = [j] - (j-1) = j - (j-1) = 1.$$

Таким образом, рассматриваемая разность больше нуля. Это означает, что время отыскания команд в случае 2 будет больше, чем в случае 1. Аналогично проводится сравнение времени отыскания для команды находящейся в случае 1 на $t_2$-ом месте и в случае 2 – на $t_2^1$-ом, и т. д. Теорема 2 доказана.

***Следствие.*** Минимальное среднее время отыскания команд для элементарной машины Тьюринга степени 2 по всем начальным конфигурациям равно $\frac{n^2+2n+k}{n+1} = n + \frac{n+k}{n+1}$.

**Заключение**

Таким образом, для элементарных машин Тьюринга степени 2 определен оптимальный порядок следования команд. Кроме того, для таких машин указано минимальное время отыскания команд.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченков, С. С. Сложность алгоритмов и вычислений / С. С. Марченков, В. Л. Матросов // Итоги науки и техники. Сер.: Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. – 1979. – Т. 16. – С. 103–149.

2. Слисенко, О. А. Сложностные задачи теории вычислений / О. А. Слисенко // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 6 (222). – С. 21–103.

3. Крупский, В. Н. Введение в сложность вычислений / В. Н. Крупский. – М. : Факториал Пресс, 2006. – 217 с.

4. Минский, М. Вычисления и автоматы / М. Минский. – М. : Мир, 1971. – 281 с.

5. Рогожин, Ю. В. Семь универсальных машин Тьюринга / Ю. В. Рогожин // Мат. исслед. – 1982. – № 6. – С. 76–90.

6. Ясюкович, Э. И. Разработка алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга / Э. И. Ясюкович // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 13–22.

7. Мозговой, М. В. Классика программирования: алгоритмы, языки, автоматы, компиляторы. Практический подход / М. В. Мозговой. – СПб. : Наука и Техника, 2006. – 320 с.

8. Будько, А. Е. О некоторых свойствах оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Нанопроектирование, технология, компьютерное моделирование (НПТКМ-2019) : материалы XVIII междунар. симп. по новым приложениям высоких технологий, посвящ. памяти В. А. Пальмова, Брест, 24–27 сент. 2019 г. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 19–20.

9. Будько, А. Е. О двух классах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Докл. АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792–793.

10. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах элементарных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна. – 2020. – Вып. 16, ч. 2. – С. 7–12.

11. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах полных древовидных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. – 2021. – № 1. – С. 19–26.

REFERENCES

1. Marchienkov, S. S. Slozhnost’ algoritmov i vychislienij / S. S. Marchienkov, V. L. Matrosov // Itogi nauki i tiekhniki. Sier.: Tieorija vierojatnostiej. Mat. statistika. Tieoriet. kibernetika. – 1979. – T. 16. – S. 103–149.

2. Slisienko, O. A. Slozhnostnyje zadachi tieorii vychislienij / O. A. Slisienko // Uspiekhi mat. nauk. – 1981. – T. 36, vyp. 6 (222). – S. 21–103.

3. Krupskij, V. N. Vviedienije v slozhnost’ vychislienij / V. N. Krupskij. – M. : Factorial Press, 2006. – 217 s.

4. Minskij, M. Vychislienija i avtomaty / M. Minskij. – M. : Mir, 1971. – 281 s.

5. Rogozhin, Yu. V. Siem’ universal’nykh mashin T’juringa / Yu. V. Rogozhin // Mat. isslied. – 1982. – № 6. – S. 76–90.

6. Yasiukovich, Ye. I. Razrabotka algoritma i programmnogo obiespiechienija determinirovannoj mashiny T’juringa / Ye. I. Yasiukovich // Viesn. MDU imia A. A. Kuliashova. – 2017. – № 2. – S. 13–22.

7. Mozgovoj, M. V. Klassika programmirovanija: algoritmy, jazyki, avtomaty, kompiliatory. Praktichieskij podkhodk/ M. V. Mozgovoj. – SPb. : Nauka i Tiekhnika, 2006. – 320 s.

8. Bud’ko, A. Ye. O niekotorykh svojstvakh optimal’nogo poriadka sliedovanija komand v programmakh mashin T’juringa / A. Ye. Bud’ko // Nanoprojektirovanije, tiekhnologija, kompjuternoje modelirovanije (NPTKM-2019) : matierialy XVIII miezhdunar. simp. po novym prilozhenijam vysokikh tekhnologij, posviashch. pamiati V. A. Pal’mova, Briest, 24–27 sient. 2019 g. – Briest : BrGU, 2019. – S. 19–20.

9. Bud’ko, A. Ye. O dvukh klassakh mashin T’juringa / A. Ye. Bud’ko // Dokl. AN BSSR. – 1985. – № 9. – S. 792–793.

10. Budko, A. Ye. O poriadkie sliedovanija komand v programmakh eliemientarnykh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Vuchon. zap. Bresc. dzyarzh. un-ta imia A. S. Pushkina. – 2020. – Vyp. 16, ch. 2. – S. 7–12.

11. Bud'ko, A. Ye. O poriadkie sliedovanija komand v programmakh polnykh drievo-vidnykh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Viesn. MDU imia A. A. Kuliashova. – 2021. – № 1. – S. 19–26.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.11.2021*