

УДК 512.542

Наталья Витальевна Артеменко¹, Александр Александрович Трофимук²

¹студент 4 курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Natalia Artemenko¹, Aleksandr Trofimuk²

¹4th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics

at the Brest State A. S. Pushkin University

²PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,

Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling

at the Brest State A. S. Pushkin University

email: ¹artemenkonatasha@outlook.com; ²alexander.trofimuk@gmail.com

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ ПОРЯДКА, СВОБОДНОГО ОТ ЧЕТВЕРТЫХ СТЕПЕНЕЙ

Натуральное число n называется свободным от четвертых степеней, если p^4 не делит n для всех простых p . Группа называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных зна-копеременной группе A_4 . Изучено строение конечных разрешимых групп порядка, свободного от четвер-тых степеней. В частности, получены точные оценки производной, нильпотентной и p -длины для таких групп. Данные оценки уточнены для A_4 -свободных групп и групп нечетного порядка.

Ключевые слова: разрешимая группа, порядок, свободный от четвертых степеней, A_4 -свобод-ная группа, производная длина, нильпотентная длина, p -длина.

Finite Soluble Groups of Fourth-Power Free Order

The natural number n is called fourth-power free if p^4 does not divide n for all prime p . The group is called A_4 -free if it does not contain the section isomorphic to the alternating group A_4 . We consider the struc-ture of finite soluble groups of fourth-power free order. Exact estimations of the derived length, nilpotent length and p -length of such groups are obtained. These estimations have been refined for groups of odd order and A_4 -free groups.

Key words: soluble group, fourth-power free order, A_4 -free group, derived length, nilpotent length, p -length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и опреде-ления соответствуют [1]. Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов, а при $m = 4$ – от четвертых степеней.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* нормального ряда (1).

Если порядок группы G свободен от квадратов, то в группе G существует циклическая холлова подгруппа N , такая, что G/N циклическая [2, теорема IV.2.11]. В частности, производная длина G не превосходит 2.

В работе [3] на основе системы компьютерной алгебры GAP разработан алгоритм для определения числа неизоморфных групп фиксированного порядка, свободного от кубов. При составлении алгоритма использовались свойства фраттиниевых расширений групп, автоморфизмов и того факта, что простая абелева группы порядка, свободного от квадратов, изоморфна $PSL(2, p)$, $p > 3$ – простое число, такое, что числа $p-1$ и $p+1$ свободны от кубов.

В работе [4] были исследованы разрешимые группы порядка, свободного от кубов. В частности, группа G обладает силовской башней и производная длина группы G не превышает 3.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп с ограничениями на порядок. В следующей теореме получено описание строения разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней.

Теорема. Пусть G – разрешимая группа порядка, свободного от четвертых степеней. Тогда нильпотентная длина G не превышает 4, производная длина G не превышает 6, $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$.

Следствие 1. Пусть G – A_4 -свободная разрешимая группа порядка, свободного от четвертых степеней. Тогда производная длина фактор-группы G не превышает 5 и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых p .

Следствие 2. Пусть G – группа нечетного порядка, свободного от четвертых степеней. Тогда производная длина фактор-группы G не превышает 3.

Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1]. Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^F – F -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in F$. Произведение $FN = \{G \in G \mid G^H \in F\}$ формаций F и H состоит из всех групп G , для которых H -корадикал принадлежит формации F . Как обычно, $F^2 = FF$. Формация F называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in F$ следует, что $G \in F$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через N и A соответственно. Обозначим через $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B , $O_p(G)$ – наибольшую нормальную p -подгруппу группы G , $O_{p'}(G)$ – наибольшую нормальную p' -подгруппу группы G .

Группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4 . Подгруппой Фраттини неединичной группы называется пересечение всех ее максимальных подгрупп и обозначается $\Phi(G)$.

Если m – длина самого короткого нормального ряда группы G с абелевыми факторами, то число m называют *производной длиной* группы G и обозначают через $d(G)$.

Если m – длина самого короткого нормального ряда группы G с нильпотентными факторами, то число m называют *нильпотентной длиной* группы G и обозначают через $n(G)$.

Если l – наименьшее число p -факторов среди всех нормальных рядов группы G , факторы которых являются либо p -группами, либо p' -группами, то число l называют p -длиной группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 1. Пусть F – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит F , но $G/N \in F$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Лемма 2. [2, теорема II.3.2]. Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi(G) = 1$;
- 2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p -группой порядка p^n для некоторого простого p ;
- 3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;
- 4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;
- 5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

Лемма 3. [5, лемма 12]. Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

- 1) если $n = 2$, то $H \in N^3 \cap A^4$;
- 2) если $n = 3$, то $H \in N^3 \cap A^5$;
- 3) если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Лемма 4. [5, лемма 13].

1. Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H – метабелева.
2. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in A^4$.

Лемма 5. Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(n, p)$. Тогда:

- 1) если $n = 2$, то H – циклическая и $|H|$ делит $(p^2 - 1)$;
- 2) если $n = 3$, то H – метабелева.

Доказательство. 1. Утверждение вытекает из леммы VI.8.1 [2].

2. Утверждение вытекает из теоремы 4В [6].

Лемма 6. [5, лемма 7]. $G \in N A^k$ тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G) \in A^{k+1}$.

Лемма 7. Если G – разрешимая группа и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\text{Aut}(F(G)) \cong GL(2, 2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

Доказательство основных результатов*Доказательство теоремы.*

Воспользуемся индукцией по порядку группы G и покажем, что $G \in \mathcal{F} = \mathcal{N}^4 \cap \mathcal{N}\mathcal{A}^5$. Хорошо известно, что формационные произведения $\mathcal{N}^4$ и $\mathcal{N}\mathcal{A}^5$ являются насыщенными формациями, поэтому $\mathcal{F}$ – насыщенная формация. Очевидно, что все фактор-группы группы G имеют порядок, свободный от четвертых степеней. Поэтому на них распространяется индукция и они принадлежат $\mathcal{F}$. По лемме 1 группа G примитивна, и по лемме 2 можно считать, что $\Phi(G)=1$ и $F=F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . Кроме того, $F=C_G(F)$ и F является элементарной абелевой p -группой порядка p^n для некоторого простого p . Ясно, что F является подгруппой некоторой силовской p -подгруппы группы G и порядок F равен p , p^2 или p^3 .

Пусть сначала $|F|=p$. Тогда G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p , и G метабелева. Отсюда следует, что $G \in \mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{F}$.

Пусть $|F|=p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2, p)$. Из п. 1 леммы 3 следует, что $G/F \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{A}^4$, поэтому $G \in \mathcal{F}$.

Пусть $|F|=p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(3, p)$. Из п. 2 леммы 3 следует, что $G/F \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{A}^5$, поэтому $G \in \mathcal{F}$.

Из $G \in \mathcal{N}^4$ следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Из $G \in \mathcal{N}\mathcal{A}^5$ и леммы 6 следует, что $G/\Phi(G) \in \mathcal{A}^6$. Докажем, что $d(G) \leq 6$. Если $\Phi(G)=1$, то $G \in \mathcal{A}^6$, и производная длина группы G не превышает 6.

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. По индукции можно считать, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Поэтому $F=F(G)=O_p(G) \leq G_p$ для некоторого $p \in \pi(G)$ и $O_{p'}(G)=1$. Поскольку группа G разрешима, то в силу лемм 4.21 и 4.22 [1] $\Phi(G) \neq F$ и $F/\Phi(G)$ совпадает со своим централизатором в группе $G/\Phi(G)$. По теореме 4.23 [1] группа $F/\Phi(G)$ дополняема в $G/\Phi(G)$, т. е. существует подгруппа $H/\Phi(G)$, такая, что $G/\Phi(G)=[F/\Phi(G)](H/\Phi(G))$. Так как $F/\Phi(G) \leq G_p/\Phi(G)$, то $F/\Phi(G)$ дополняема в $G_p/\Phi(G)$.

Поскольку порядок силовской p -подгруппы G_p группы G свободен от четвертых степеней, то $d(F) \leq d(G_p) \leq 2$ и $G_p/\Phi(G)$ подгруппа порядка p или p^2 , т. к. $1 \neq \Phi(G) \leq G_p$.

Пусть $F/\Phi(G)$ – элементарная абелева подгруппа порядка p^2 . По теореме 4.24 [1] фактор-группа $F/\Phi(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп фактор-группы $G/\Phi(G)$. Если $F/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа фактор-группы $G/\Phi(G)$, то $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F$, и эта фактор-группа изоморфна некоторой подгруппе группы $GL(2, p)$. По п. 1 леммы 3

$d(G/F) \leq 4$ и $d(G) \leq 6$. Если $\bar{F} = F/\Phi(G)$ является прямым произведением двух минимальных нормальных подгрупп $\bar{F}_1 = F_1/\Phi(G)$ и $\bar{F}_2 = F_2/\Phi(G)$ простых порядков p , то для каждого фактора $\bar{F}_i$ верно, что фактор-группа $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$ абелева. Поэтому $\bar{G}/(C_{\bar{G}}(\bar{F}_1) \cap C_{\bar{G}}(\bar{F}_2)) = \bar{G}/\bar{F}$ абелева и $d(G) \leq 3$.

Если $F/\Phi(G)$ – группа порядка p , то фактор-группа G/F ; $H/\Phi(G)$ абелева, как группа автоморфизмов группы простого порядка. Тогда $d(G) \leq 3$. Таким образом, доказано неравенство $d(G) \leq 6$.

Поскольку p -длина всякой метанильпотентной группы не превышает 1 и $G \in \mathcal{N}^4$, то p -длина группы G не превышает 2 для всех простых чисел p .

Уточним оценку p -длины для $p > 3$. С помощью индукции по порядку G покажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа. Ясно, что порядок F равен p , p^2 или p^3 , где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\text{Aut} F$ группы F , порядок которой равен $p-1$. Отсюда, $G_p = F$ и $l_p(G) \leq 1$.

Если $|F| = p^n$, $n \in \{2, 3\}$, то $\text{Aut} F = GL(n, p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 3, G/F – p' -группа, т. е. $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.

Пусть G A_4 -свободна. Повторяя доказательство теоремы и применяя в соответствующих местах лемму 4, получим, что производная длина группы G не превышает 5.

Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $l_p(G) \leq 1$ для $p \in \{2, 3\}$. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^α , где $\alpha \leq 2$ для $p = 2$ и $p = 3$. В частности, $C_G(F) = F$.

Если $|F| = p$, то G/F имеет порядок $p-1$ и $l_p(G) \leq 1$.

Если $|F| = 4$, то, по лемме 7, либо $G \cong A_4$, либо $G \cong S_4$. В любом случае группа не A_4 -свободна. Противоречие.

Пусть $|F| = 9$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2, 3)$ и $O_3(G/F) = 1$. Известно, что $H \in \{1, Z_2, Z_4, Z_8, Z_2 \times Z_2, D_8, Q_8, SD_{16}, SL(2, 3), GL(2, 3)\}$. Во всех случаях, кроме $G/F \cong SL(2, 3)$ и $G/F \cong GL(2, 3)$, подгруппа F является силовой 3-подгруппой в G . Поэтому $l_3(G) \leq 1$. Так как $SL(2, 3)$ и $GL(2, 3)$ не являются A_4 -свободными, то они из рассмотрения исключаются.

Итак, $l_p(G) \leq 1$ для $p \in \{2, 3\}$. Из теоремы следует, что $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2.

Пусть G – группа нечетного порядка. Повторяя доказательство теоремы и применяя в соответствующих местах лемму 5, получим, что производная длина группы G не превышает 3. Следствие 2 доказано.

Пример 1. С помощью системы компьютерной алгебры GAP [7] найдена группа $G = [E_{5^3}]S_4$, где S_4 – симметрическая группа степени 4, E_{5^3} – элементарная абелева группа порядка 5^3 . Очевидно, что $|G| = 3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$. Для группы G нильпотентная длина равна 4. Значит, оценка нильпотентной длины, полученная в теореме, является точной.

Пример 2. С помощью системы компьютерной алгебры GAP [7] найдена A_4 -свободная группа $G = [E_{7^3}][S]Q_8$, где S – экстраспециальная группа порядка 27, E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3 , Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Очевидно, что $|G| = 4536 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Для группы G производная длина равна 5. Значит, оценка производной длины, полученная в следствии 1, является точной.

Пример 3. Зафиксируем простые числа $p = 5$ и $q = 3$. Тогда показатель числа 5 по модулю 3 равен 2 и существует группа Шмидта $G = [P]Q$, такая что P – неабелева группа порядка 5^3 , а Q – циклическая подгруппа порядка 3 [8, теорема 1.3]. Так как P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$. Из свойств групп Шмидта следует, что $G' = P$. Таким образом $((G'))' = (P')' = Z(P)' = 1$ и $d(G) = 3$. Следовательно, оценка производной длины, полученная в следствии 2, является точной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
3. Dietrich, H. On the groups of cube-free order / H. Dietrich, B. Eick // J. Algebra. – 2005. – Vol. 292. – P. 122–137.
4. Монахов, В. С. Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2 / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 139–145.
5. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
6. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.
7. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1 [Electronic resource]. – 2021. – Mode of access: <http://www.gap-system.org>.
8. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Алгебра і теорія чисел : Пр. Укр. мат. конгр. – Київ : Ін-т математики НАН України. – 2001. – С. 81–90.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v tieoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk: Vyssh. Shk., 2006. – 207 s.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
3. Dietrich, H. On the groups of cube-free order / H. Dietrich, B. Eick // J. Algebra. – 2005. – Vol. 292. – P. 122–137.
4. Monakhov, V. S. Koniechnyye gruppy, silovskije podgruppy kotorykh libo cyclichieskije, libo poriadka p^2 / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Izv. Gomel. gos. un-ta im. F. Skori-na. – 2008. – № 2 (47). – P. 139–145.
5. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 892–903.
6. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.
7. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1 [Electronic resource]. – 2021. – Mode of access: <http://www.gap-system.org>.
8. Monakhov V. S. Podgruppy Shmidta, ikh sushchiestvovaniye i nekotoryje prilozheniya / V. S. Monakhov // Algebra i teorija chisel : Pr. Ukr. mat. konhr. – Kyjiv : In-t matematyky NAN Ukrainy, 2001. – S. 81–90.

Рукапіс надійшов у редакцію 25.10.2021