УДК 539.12

А. В. Ивашкевич[1], Е. М. Овсиюк[2], В. В. Кисель[3], В. М. Редьков[4]
[1]студент Мозырского государственного
педагогического университета имени И. П. Шамякина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики и математики
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина
[3]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
[4]д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник
Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси
e-mail: v.redkov@ifanbel.bas-net.by

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2 И ОПЕРАТОР СПИРАЛЬНОСТИ

Исследуются решения типа плоских волн для массивной частицы со спином 3/2. Волновое уравнение дает алгебраическую систему из четырех уравнений для восьми неизвестных параметров, что предполагает существование четырех независимых решений. Чтобы связать выбор независимых решений с квантовыми числами физического оператора, исследован вопрос о собственных состояниях оператора спиральности. Существуют четыре различных собственных значения оператора спиральности $\sigma = \pm 1/2,\ \pm 3/2$. *Собственные значения* $\sigma = \pm 1/2$ *оказываются двукратно вырожденными, что приводит к существованию двух различных собственных векторов для каждого из значений* $\sigma = -1/2$ *и* $\sigma = +1/2$, *они построены в явном виде. Показано, что собственные векторы со значениями* $\sigma = \pm 3/2$ *являются решениями волнового уравнения, в то время как двукратно вырожденные собственные векторы по отдельности не являются решениями этого уравнения. Построены решения волнового уравнения в виде суперпозиции таких состояний. Таким образом, для частицы со спином 3/2 в явном виде построена полная система решений типа плоских волн в базисе импульс-спиральность.*

Введение

После работ В. Паули, М. Фирца [1; 2] и В. Рариты, Дж. Швингера [3] в физической литературе всегда присутствовал интерес к теории частиц с высшими спинами, в том числе и со спином 3/2 [4–19]. Отметим наиболее значимые аспекты этой теории.

Прежде всего, это вопрос о выборе исходного уравнения, наиболее последовательно он реализуется в рамках теории релятивистских уравнений первого порядка, хотя много исследований выполнено и с использованием уравнений второго порядка или с использованием смешанных вариантов. Выбор того или иного формализма особенно важен при учете внешних электромагнитных (и гравитационных) полей, поскольку это существенно влияет на явный вид конечных уравнений. Формализм уравнений первого порядка автоматически обеспечивает корректное решение вопроса о числе независимых степеней свободы для частицы со спином 3/2 не только в свободном случае, но и в присутствии внешних полей (см. изложение, например, в [17]).

Наибольший интерес в литературе вызывало существование аномальных решений для этой частицы в присутствии внешних полей, которым сопоставляется скорость частицы большая, чем скорость света.

Отдельный интерес представляет случай безмассовой частицы со спином 3/2. Как показали В. Паули и М. Фирц, здесь существует специфическая калибровочная симметрия: 4-градиент от произвольной биспинорной функции $\partial_a \Psi(cx)$ порождает решения безмассового волнового уравнения [17].

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы проследить на основе построения в явном виде решений типа плоских волн с учетом диагонализации оператора спиральности за степенями свободы частицы со спином 3/2. При этом за основу берется формализм уравнений первого порядка в базисе Рариты – Швингера [3].

1. Разделение переменных

В базисе Рариты – Швингера волновое уравнение для свободной частицы со спином 3/2 можно представить в виде совокупности трех уравнений (подробнее см. в приложении А):

$$\left(i\gamma^a \partial_a - \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi_l(x) = 0, \quad \gamma^l \Psi_l(x) = 0, \; \partial_l \Psi^l(x) = 0, \tag{1.1}$$

первое уравнение называем основным, второе и третье – дополнительными. Здесь 16-компонентная волновая функция $\Psi_l(x)$ – это вектор-биспинор:

$$\Psi_{A(l)}(x) = \begin{vmatrix} \Psi_{1(0)}(x) & \Psi_{1(1)}(x) & \Psi_{1(2)}(x) & \Psi_{1(3)}(x) \\ \Psi_{2(0)}(x) & \Psi_{2(1)}(x) & \Psi_{2(2)}(x) & \Psi_{2(3)}(x) \\ \Psi_{3(0)}(x) & \Psi_{3(1)}(x) & \Psi_{3(2)}(x) & \Psi_{3(3)}(x) \\ \Psi_{4(0)}(x) & \Psi_{4(1)}(x) & \Psi_{4(2)}(x) & \Psi_{4(3)}(x) \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

A – биспинорный индекс, (l) – векторный индекс. Используем представление матриц Дирака в спинорном базисе:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \; \gamma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \; \gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \; \gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решения уравнений (1.1) ищем в виде плоских волн:

$$\Psi_l(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} e^{+ip_k x^k} A_l, \qquad A_l = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Ниже используем величины: $mc/\hbar = M$, $\varepsilon/\hbar c = E$, $p_i/\hbar = k_j$. Учитывая подстановку (1.3), из (1.1) находим алгебраические уравнения (индексы опускаются согласно правилам: $A^0 = A_0, A^j = -A_j$)

$$(\gamma^0 E - \gamma^j k_j - M) A_l = 0, \quad \gamma^0 A_0 + \gamma^j A_j = 0, \quad E A_0 + k_j A_j = 0. \tag{1.4}$$

Первое (основное) уравнение из (1.4) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -M & 0 & (E+k_3) & (k_1 - ik_2) \\ 0 & -M & (k_1 + ik_2) & (E - k_3) \\ (E-k_3) & -(k_1 - ik_2) & -M & 0 \\ -(k_1 + ik_2) & (E+k_3) & 0 & -M \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_l \\ b_l \\ c_l \\ d_l \end{vmatrix} = 0, \quad l = 0,1,2,3. \tag{1.5}$$

Из равенства нулю определителя системы (1.5) находим условие связи

$$(-M^2 + E^2 - k_3^2 - k_2^2 - k_1^2)^2 = 0 \Rightarrow E^2 = M^2 + \mathbf{k}^2. \tag{1.6}$$

Убеждаемся, что обращается в ноль также определитель 3×3-матрицы

$$\det\begin{vmatrix} -M & 0 & (E+k_3) \\ 0 & -M & (k_1+ik_2) \\ (E-k_3) & -(k_1-ik_2) & -M \end{vmatrix} = -M(M^2 - E^2 + \mathbf{k}^2) = 0,$$

т. е. ранг матрицы системы (1.5) равен двум. Следовательно, в (1.5) есть только два независимых уравнения, оставляем первые два:

$$(E+k_3)\,c_l + (k_1 - ik_2)\,d_l = M\,a_l, \ (k_1 + ik_2)\,c_l + (E - k_3)\,d_0 = M\,b_l. \tag{1.7}$$

Их решение ($l = 0,1,2,3$) следующее:

$$c_l = \frac{E-k_3}{M}\,a_l - \frac{k_1 - ik_2}{M}\,b_l, \quad d_l = -\frac{k_1+ik_2}{M}\,a_l + \frac{E+k_3}{M}\,b_l, \tag{1.8}$$

или коротко: $c_l = \alpha a_l + \beta b_l, d_l = \rho a_l + \gamma b_l$.

Получаем явный вид первого дополнительного уравнения из (1.4):

$$\begin{gathered} a_0 + a_3 = -(b_1 - ib_2), \quad b_0 - b_3 = -(a_1 + ia_2), \\ c_0 - c_3 = d_1 - id_2, \quad d_0 + d_3 = c_1 + ic_2. \end{gathered} \tag{1.9}$$

В двух последних уравнениях исключим с помощью (1.8) переменные c_l, d_l; при этом первые два уравнения оставляем неизменными:

$$\begin{gathered} a_0 + a_3 = -(b_1 - ib_2), \qquad b_0 - b_3 = -(a_1 + ia_2), \\ \alpha(a_0 - a_3) + \beta(b_0 - b_3) = \rho(a_1 - ia_2) + \gamma(b_1 - ib_2), \\ \rho(a_0 + a_3) + \gamma(b_0 + b_3) = \alpha(a_1 + ia_2) + \beta(b_1 + ib_2). \end{gathered} \tag{1.10}$$

Здесь имеем восемь переменных a_l, b_l и четыре линейных уравнения. Второе дополнительное уравнение из (1.4) дает

$$\begin{gathered} Ea_0 + k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0, \quad Eb_0 + k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0, \\ Ec_0 + k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 = 0, \quad Ed_0 + k_1d_1 + k_2d_2 + k_3d_3 = 0. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Два последних уравнения из (1.11) при учете условий (1.8) становятся следствиями двух первых. Следовательно, в системе (1.11) есть только два независимых уравнения:

$$Ea_0 + k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0, \quad Eb_0 + k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0. \tag{1.12}$$

Соберем вместе уравнения (1.10) и (1.12):

$$\begin{gathered} a_0 + a_3 = -(b_1 - ib_2), \quad b_0 - b_3 = -(a_1 + ia_2), \\ \alpha(a_0 - a_3) + \beta(b_0 - b_3) = \rho(a_1 - ia_2) + \gamma(b_1 - ib_2), \\ \rho(a_0 + a_3) + \gamma(b_0 + b_3) = \alpha(a_1 + ia_2) + \beta(b_1 + ib_2), \\ Ea_0 + k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0, \quad Eb_0 + k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Убедимся, что из первых четырех уравнений в (1.13) следуют два последних. Действительно, методом исключения получаем два уравнения, содержащие соответственно только a_l и b_l (при этом учитываем явный вид коэффициентов $\alpha, \beta, \rho, \sigma$):

$$(E-k_3)(a_0-a_3)+(k_1+ik_2)(a_1-ia_2)=-(k_1-ik_2)(a_1+ia_2)-(E+k_3)(a_0+a_3),$$
$$(k_1+ik_2)(b_1-ib_2)+(E-k_3)(b_0-b_3)=-(E+k_3)(b_0+b_3)-(k_1-ik_2)(b_1+ib_2),$$

эти уравнения дают

$$Ea_0+k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0, \quad Eb_0+k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0. \tag{1.14}$$

Следовательно, в системе (1.13) последние два уравнения можно отбросить.

В системе (1.13) с помощью двух первых уравнений

$$a_0=-a_3-(b_1-ib_2), \qquad b_0=+b_3-(a_1+ia_2) \tag{1.15}$$

исключим переменные a_0, b_0, в результате получим

$$k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=+Ea_3+E(b_1-ib_2), \quad k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=-Eb_3+E(a_1+ia_2). \tag{1.16}$$

Здесь имеем два уравнения для шести переменных, т. е. должны существовать четыре решения.

Если учесть соотношения (1.15), то из (1.16) следуют уравнения (1.14). Это значит, что эквивалентной формой уравнений (1.16) является совокупность четырех уравнений:

$$Ea_0+k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0, \quad Eb_0+k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0.$$
$$a_0+a_3=-(b_1-ib_2), \quad b_0-b_3=-(a_1+ia_2). \tag{1.17}$$

Чтобы привязать выбор четырех независимых решений системы уравнений (1.17) к квантовым числам физического оператора, в следующем разделе исследуем вопрос о собственных состояниях оператора спиральности.

2. Оператор спиральности

Будем диагонализировать на решениях дополнительно оператор спиральности:

$$\Sigma=-i\,(S_1\partial_1+S_2\partial_2+S_3\partial_3), \quad \Sigma\,\Psi(x)=\sigma\,\Psi(x). \tag{2.1}$$

С учетом подстановки для решений в виде плоских волн для Σ имеем представление

$$\Sigma=i\,(k_1\sigma^{23}+k_2\sigma^{31}+k_3\sigma^{12})\otimes I+I\otimes i\,(k_1j^{23}+k_2j^{31}+k_3j^{12}). \tag{2.2}$$

Приведем явный вид входящих в (2.2) матриц:

$$\sigma^{23}=\frac{1}{2}\gamma^2\gamma^3=-\frac{i}{2}\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}, \quad \sigma^{31}=\frac{1}{2}\gamma^3\gamma^1=-\frac{i}{2}\begin{vmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{vmatrix},$$

$$\sigma^{12}=\frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2=-\frac{i}{2}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}, \tag{2.3}$$

$$j^{23}=\delta_k^2 g^{3l}-\delta_k^3 g^{2l}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix},\quad j^{31}=\delta_k^3 g^{1l}-\delta_k^1 g^{3l}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{vmatrix},$$

$$j^{12}=\delta_k^1 g^{2l}-\delta_k^2 g^{1l}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}. \qquad (2.4)$$

С учетом (2.3) – (2.4) выражение для оператора спиральности (2.2) принимает вид

$$\Sigma=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}k_3&k_1-ik_2&0&0\\k_1+ik_2&-k_3&0&0\\0&0&k_3&k_1-ik_2\\0&0&k_1+ik_2&-k_3\end{vmatrix}\otimes I+I\otimes i\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&0&-k_3&k_2\\0&k_3&0&-k_1\\0&-k_2&k_1&0\end{vmatrix}. \qquad (2.5)$$

Следовательно, уравнение $\Sigma\,\Psi=\sigma\,\Psi$ дает четыре соотношения:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}k_3&(k_1-ik_2)&0&0\\(k_1+ik_2)&-k_3&0&0\\0&0&k_3&(k_1-ik_2)\\0&0&(k_1+ik_2)&-k_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_0\\b_0\\c_0\\d_0\end{vmatrix}=\sigma\begin{vmatrix}a_0\\b_0\\c_0\\d_0\end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}k_3&(k_1-ik_2)&0&0\\(k_1+ik_2)&-k_3&0&0\\0&0&k_3&(k_1-ik_2)\\0&0&(k_1+ik_2)&-k_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{vmatrix}+i\begin{vmatrix}(k_2a_3-k_3a_2)\\(k_2b_3-k_3b_2)\\(k_2c_3-k_3c_2)\\(k_2d_3-k_3d_2)\end{vmatrix}=\sigma\begin{vmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}k_3&(k_1-ik_2)&0&0\\(k_1+ik_2)&-k_3&0&0\\0&0&k_3&(k_1-ik_2)\\0&0&(k_1+ik_2)&-k_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{vmatrix}+i\begin{vmatrix}(k_3a_1-k_1a_3)\\(k_3b_1-k_1b_3)\\(k_3c_1-k_1c_3)\\(k_3d_1-k_1d_3)\end{vmatrix}=\sigma\begin{vmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}k_3&(k_1-ik_2)&0&0\\(k_1+ik_2)&-k_3&0&0\\0&0&k_3&(k_1-ik_2)\\0&0&(k_1+ik_2)&-k_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3\\b_3\\c_3\\d_3\end{vmatrix}+i\begin{vmatrix}(k_1a_2-k_2a_1)\\(k_1b_2-k_2b_1)\\(k_1c_2-k_2c_1)\\(k_1d_2-k_2d_1)\end{vmatrix}=\sigma\begin{vmatrix}a_3\\b_3\\c_3\\d_3\end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем 16 линейных уравнений:

$$\begin{aligned}&(k_3-2\sigma)\,a_0+(k_1-ik_2)\,b_0=0,\\&(k_1+ik_2)\,a_0-(k_3+2\sigma)\,b_0=0,\\&(k_3-2\sigma)\,c_0+(k_1-ik_2)\,d_0=0,\\&(k_1+ik_2)\,c_0-(k_3+2\sigma)\,d_0=0,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(k_3-2\sigma)\,a_1+(k_1-ik_2)\,b_1+2ik_2\,a_3-2ik_3\,a_2=0,\\
&(k_1+ik_2)\,a_1-(k_3+2\sigma)\,b_1+2ik_2\,b_3-2ik_3\,b_2=0,\\
&(k_3-2\sigma)\,c_1+(k_1-ik_2)\,d_1+2ik_2\,c_3-2ik_3\,c_2=0,\\
&(k_1+ik_2)\,c_1-(k_3+2\sigma)\,d_1+2ik_2\,d_3-2ik_3\,d_2=0,\\
&(k_3-2\sigma)\,a_2+(k_1-ik_2)\,b_2+2ik_3\,a_1-2ik_1\,a_3=0,\\
&(k_1+ik_2)\,a_2-(k_3+2\sigma)\,b_2+2ik_3\,b_1-2ik_1\,b_3=0,\\
&(k_3-2\sigma)\,c_2+(k_1-ik_2)\,d_2+2ik_3\,c_1-2ik_1\,c_3=0,\\
&(k_1+ik_2)\,c_2-(k_3+2\sigma)\,d_2+2ik_3\,d_1-2ik_1\,d_3=0,\\
&(k_3-2\sigma)\,a_3+(k_1-ik_2)\,b_3+2ik_1\,a_2-2ik_2\,a_1=0,\\
&(k_1+ik_2)\,a_3-(k_3+2\sigma)\,b_3+2ik_1b_2-2ik_2b_1=0,\\
&(k_3-2\sigma)\,c_3+(k_1-ik_2)\,d_3+2ik_1\,c_2-2ik_2\,c_1=0,\\
&(k_1+ik_2)\,c_3-(k_3+2\sigma)\,d_3+2ik_1\,d_2-2ik_2\,d_1=0.
\end{aligned}
$$

Эти уравнения можно разбить на четыре несвязанные группы ($16=2+2+6+6$). Первые две системы:

$$
\begin{aligned}
&(k_3-2\sigma)\,a_0+(k_1-ik_2)\,b_0=0,\quad (k_1+ik_2)\,a_0-(k_3+2\sigma)\,b_0=0;\\
&(k_3-2\sigma)\,c_0+(k_1-ik_2)\,d_0=0,\quad (k_1+ik_2)\,c_0-(k_3+2\sigma)\,d_0=0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

содержат только переменные с индексом 0. Эти уравнения приводят к двум собственным значениям $\sigma=\pm(1/2)\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}=\pm(1/2)k$, решения систем (2.6) следующие:

$$
b_0=\frac{\pm k-k_3}{k_1-ik_2}\,a_0=\frac{k_1+ik_2}{\pm k+k_3}\,a_0,\quad d_0=\frac{\pm k-k_3}{k_1-ik_2}\,c_0=\frac{k_1+ik_2}{\pm k+k_3}\,c_0. \tag{2.7}
$$

Отмечаем, что уравнения (2.6) имеют нетривиальные (ненулевые) решения только для спиральностей $\sigma=\pm\frac{k}{2}$, при всех других спиральностях величины a_0,b_0,c_0,d_0 обращаются в ноль. Легко можно убедиться, что формулы (см. (1.8)) дают выражения для c_0,d_0, согласующиеся с последним соотношением из (2.7).

Теперь обращаемся к шести уравнениям для величин a_j,b_j:

$$
\begin{aligned}
&+(k_3-2\sigma)\,a_1-2ik_3\,a_2+2ik_2\,a_3=-(k_1-ik_2)\,b_1,\\
&+2ik_3\,a_1+(k_3-2\sigma)\,a_2-2ik_1\,a_3=-(k_1-ik_2)\,b_2,\\
&-2ik_2\,a_1+2ik_1\,a_2+(k_3-2\sigma)\,a_3=-(k_1-ik_2)\,b_3,\\
&-(k_3+2\sigma)\,b_1-2ik_3\,b_2+2ik_2\,b_3=-(k_1+ik_2)\,a_1,\\
&+2ik_3\,b_1-(k_3+2\sigma)\,b_2-2ik_1\,b_3=-(k_1+ik_2)\,a_2,\\
&-2ik_2\,b_1+2ik_1\,b_2-(k_3+2\sigma)\,b_3=-(k_1+ik_2)\,a_3
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

и шести уравнениям для c_j,d_j:

$$
\begin{aligned}
&+(k_3-2\sigma)\,c_1-2ik_3\,c_2+2ik_2\,c_3=-(k_1-ik_2)\,d_1,\\
&+2ik_3c_1+(k_3-2\sigma)\,c_2-2ik_1c_3=-(k_1-ik_2)\,d_2,\\
&-2ik_2c_1+2ik_1c_2+(k_3-2\sigma)\,c_3=-(k_1-ik_2)\,d_3,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$$-(k_3+2\sigma)\,d_1-2ik_3\,d_2+2ik_2\,d_3=-(k_1+ik_2)\,c_1,$$
$$+2ik_3d_1-(k_3+2\sigma)\,d_2-2ik_1d_3=-(k_1+ik_2)\,c_2,$$
$$-2ik_2d_1+2ik_1d_2-(k_3+2\sigma)\,d_3=-(k_1+ik_2)\,c_3;$$

система (2.9) совпадает с (2.8), поэтому рассматривать ее отдельно не нужно.

Систему (2.8) удобнее записать в расщепленном виде так:

$$\begin{vmatrix} +(k_3-2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & +(k_3-2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & +(k_3-2\sigma) \end{vmatrix}\mathbf{a}=-(k_1-ik_2)\,\mathbf{b}, \qquad (2.10)$$
$$\begin{vmatrix} -(k_3+2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & -(k_3+2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & -(k_3+2\sigma) \end{vmatrix}\mathbf{b}=-(k_1+ik_2)\,\mathbf{a}.$$

Действуя методом исключения, получаем уравнения для векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\left\{\begin{vmatrix} -(k_3+2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & -(k_3+2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & -(k_3+2\sigma) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} (k_3-2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & (k_3-2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & (k_3-2\sigma) \end{vmatrix}-(k_1^2+k_2^2)\right\}\mathbf{a}=0,$$
$$\left\{\begin{vmatrix} (k_3-2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & (k_3-2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & (k_3-2\sigma) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -(k_3+2\sigma) & -2ik_3 & +2ik_2 \\ +2ik_3 & -(k_3+2\sigma) & -2ik_1 \\ -2ik_2 & +2ik_1 & -(k_3+2\sigma) \end{vmatrix}-(k_1^2+k_2^2)\right\}\mathbf{b}=0.$$

Решим уравнение для вектора $\mathbf{a}$, а затем вектор $\mathbf{b}$ найдем, пользуясь первым уравнением из (2.10).

Сначала рассмотрим специальный случай ориентации плоской волны:

$$(0,0,k_3), \qquad \begin{vmatrix} 4\sigma^2+3k_3^2 & 8ik_3\sigma & 0 \\ -8ik_3\sigma & 4\sigma^2+3k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sigma^2-k_3^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}=0, \qquad (2.11)$$

отсюда следует уравнение относительно σ: $[(4\sigma^2+3k_3^2)^2-8^2k_3^2\sigma^2]\,(4\sigma^2-k_3^2)=0$, т. е.

$$\sigma=-\frac{1}{2}k,-\frac{1}{2}k,\quad +\frac{1}{2}k,+\frac{1}{2}k,\quad -\frac{3}{2}k,+\frac{3}{2}k; \qquad (2.12)$$

обращаем внимание, что два корня двукратно вырождены. Найдем решения уравнения (2.11) для вектора $\mathbf{a}$.

Пусть $\sigma=\pm\frac{1}{2}k_3$:

$$\begin{vmatrix} 4k_3^2 & \pm 4ik_3^2 & 0 \\ \mp 4ik_3^2 & 4k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}=0,$$

ранг матрицы равен 1, решения следующие:

$$\sigma = -\frac{1}{2}k_3, \quad a_1 - ia_2 = 0, \quad a_3 - \text{любое число};$$

$$\sigma = +\frac{1}{2}k_3, \quad a_1 + ia_2 = 0, \quad a_3 - \text{любое число};$$

для определенности можно положить $a_3 = \pm a_1$. При каждом σ имеем два собственных вектора:

$$\sigma = -\frac{1}{2}k_3, \quad \mathbf{a} = a_1(1, -i, \pm 1); \qquad \sigma = +\frac{1}{2}k_3, \quad \mathbf{a} = a_1(1, +i, \pm 1). \tag{2.13}$$

Пусть $\sigma = \pm\frac{3}{2}k_3$ (в обоих случаях ранг матрицы равен 1):

$$\sigma = +\frac{3}{2}k_3, \quad \begin{vmatrix} 12k_3^2 & +12ik_3^2 & 0 \\ -12ik_3^2 & 12k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8k_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad a_2 = +ia_1, \ a_3 = 0;$$

$$\sigma = -\frac{3}{2}k_3, \quad \begin{vmatrix} 12k_3^2 & -12ik_3^2 & 0 \\ +12ik_3^2 & 12k_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8k_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad a_2 = -ia_1, \ a_3 = 0. \tag{2.14}$$

Возвращаемся к случаю произвольно ориентированной волны:

$$\begin{vmatrix} 4\sigma^2 - k^2 + 4(k_2^2 + k_3^2) & +8i\sigma k_3 - 4k_1k_2 & -8i\sigma k_2 - 4k_1k_3 \\ -8i\sigma k_3 - 4k_1k_2 & 4\sigma^2 - k^2 + 4(k_1^2 + k_3^2) & 8i\sigma k_1 - 4k_2k_3 \\ 8i\sigma k_2 - 4k_1k_3 & -8i\sigma k_1 - 4k_2k_3 & 4\sigma^2 - k^2 + 4(k_1^2 + k_2^2) \end{vmatrix} \mathbf{a} = 0. \tag{2.15}$$

Убеждаемся, что равенство нулю определителя матрицы дает уже известные корни:

$$\sigma = -\frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k, \quad +\frac{1}{2}k, +\frac{1}{2}k, \quad -\frac{3}{2}k, +\frac{3}{2}k. \tag{2.16}$$

Далее удобно перейти к безразмерным величинам:

$$\frac{k_i}{k} = n_i, \quad n_i n_i = 1, \quad \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma, \qquad \sigma = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{3}{2},$$

это позволяет представить уравнение (2.15) так:

$$\begin{vmatrix} 4\sigma^2 - 1 + 4(n_2^2 + n_3^2) & +8i\sigma n_3 - 4n_1n_2 & -8i\sigma n_2 - 4n_1n_3 \\ -8i\sigma n_3 - 4n_1n_2 & 4\sigma^2 - 1 + 4(n_1^2 + n_3^2) & 8i\sigma n_1 - 4n_2n_3 \\ 8i\sigma n_2 - 4n_1n_3 & -8i\sigma n_1 - 4n_2n_3 & 4\sigma^2 - 1 + 4(n_1^2 + n_2^2) \end{vmatrix} \mathbf{a} = 0. \tag{2.17}$$

Сначала рассматриваем случай $\sigma = \pm 1/2$:

$$\begin{gathered} (n_2^2 + n_3^2)\, a_1 + (\pm in_3 - n_1n_2)\, a_2 - (\pm in_2 + n_1n_3)\, a_3 = 0, \\ -(\pm in_3 + n_1n_2)\, a_1 + (n_1^2 + n_3^2)\, a_2 + (\pm in_1 - n_2n_3)\, a_3 = 0, \\ (\pm in_2 - n_1n_3)\, a_1 - (\pm in_1 + n_2n_3)\, a_2 + (n_1^2 + n_2^2)\, a_3 = 0. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Убеждаемся, что ранг этой системы равен 1, т. е. из трех уравнений существенным является только одно. Для определенности оставляем третье:

$$(\pm in_2 - n_1 n_3)\, a_1 - (\pm in_1 + n_2 n_3)\, a_2 + (1 - n_3^2)\, a_3 = 0. \tag{2.19}$$

У этого уравнения могут существовать два независимых решения (это согласуется с двукратностью корней $\sigma = \pm 1/2$). Наиболее простое решение имеет вид $\mathbf{a}^{(1)} = (n_1, n_2, n_3)$:

$$(\pm in_2 - n_1 n_3)\, n_1 - (\pm in_1 + n_2 n_3)\, n_2 + (1 - n_3^2)\, n_3 = 0.$$

С учетом уравнения (2.19) второе решение строится в виде векторного произведения:

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ (\pm in_2 - n_1 n_3) & -(\pm in_1 + n_2 n_3) & (1 - n_3^2) \end{vmatrix} = (\pm in_1 n_3 + n_2)\,\mathbf{e}_1 + (\pm in_2 n_3 - n_1)\,\mathbf{e}_2 \mp i(1 - n_3^2)\,\mathbf{e}_3\,;$$

легко можно убедиться, что этот вектор $\mathbf{a}^{(2)}$ удовлетворяет равнению (2.19). Таким образом, имеем два решения уравнения (2.19):

$$\mathbf{a}^{(1)} = (n_1, n_2, n_3) = \mathbf{n}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = (\pm in_1 n_3 + n_2,\ \pm in_2 n_3 - n_1,\ \mp i(1 - n_3^2)\,); \tag{2.20}$$

напоминаем, что в случае $n_1 = 0,\ n_2 = 0$ нужно использовать результат (2.13).

Теперь рассмотрим случай $\sigma = \pm 3/2$. Ранг системы (2.17) равен 2, для определенности в качестве независимых оставим два первых уравнения:

$$\begin{aligned} &(2 + n_2^2 + n_3^2)\, a_1 + (2i\sigma n_3 - n_1 n_2)\, a_2 = (+2i\sigma n_2 + n_1 n_3)\, a_3\,, \\ &-(2i\sigma n_3 + n_1 n_2)\, a_1 + (2 + n_1^2 + n_3^2)\, a_2 = (-2i\sigma n_1 + n_2 n_3)\, a_3\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Убеждаемся, что определитель двумерной матрицы слева равен $6(1 - n_3^2)$. Он обращается в ноль при $n_3 = \pm 1$, этот случай особый. Для всех остальных случаев ориентации плоских волн система (2.21) невырожденная и решается обычным способом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(3 - 4\sigma^2) n_1 n_3 + 4i\sigma n_2}{6 + (3 - 4\sigma^2) n_3^2}\, a_3 = \frac{-n_1 n_3 \pm in_2}{1 - n_3^2}\, a_3, \ \text{пусть} \ a_3 = 1 - n_3^2\,; \\ a_2 &= \frac{(3 - 4\sigma^2) n_2 n_3 - 4i\sigma n_1}{6 + (3 - 4\sigma^2) n_3^2}\, a_3 = \frac{-n_2 n_3 \mp in_1}{1 - n_3^2}\, a_3, \ \text{пусть} \ a_3 = 1 - n_3^2\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Выбор явных значений для a_3 означает, что фиксируется нормировка этих решений.

Для каждого решения $\{a_1, a_2, a_3\}_\sigma$ можно вычислить соответствующий набор величин $\{b_1, b_2, b_3\}_\sigma$, при этом нужно воспользоваться соотношением из (2.10):

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{n_1 - in_2} \begin{vmatrix} +(n_3 - 2\sigma) & -2in_3 & +2in_2 \\ +2in_3 & +(n_3 - 2\sigma) & -2in_1 \\ -2in_2 & +2in_1 & +(n_3 - 2\sigma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}, \tag{2.23}$$

его можно представить в векторной форме так:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{n_1 - in_2} \big[\, (2\sigma - n_3)\, \mathbf{a} - 2i\, \mathbf{n} \times \mathbf{a} \,\big]. \tag{2.24}$$

Рассматриваем случай $\sigma = \pm 1/2$. Для решений первого типа $\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{n}$ получим

$$\mathbf{b}^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\,\mathbf{a}^{(1)}\,. \tag{2.25}$$

Затем обращаемся к решениям второго типа:

$$\mathbf{a}^{(2)} = (\pm i n_1 n_3 + n_2; \pm i n_2 n_3 - n_1; \mp i(1 - n_3^2)), \qquad \mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{n_1 - in_2}[(\pm 1 - n_3)\,\mathbf{a}^{(2)} - 2i\,\mathbf{n}\times\mathbf{a}^{(2)}].$$

Вычисляем векторное произведение $\mathbf{n}\times\mathbf{a}^{(2)}$:

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{a}^{(2)})_1 = n_2 a_3^{(2)} - n_3 a_2^{(2)} = (\mp i) a_1^{(2)}\,, \qquad (\mathbf{n}\times\mathbf{a}^{(2)})_2 = n_3 a_1^{(2)} - n_1 a_3^{(2)} = (\mp i) a_2^{(2)}\,,$$

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{a}^{(2)})_3 = n_1 a_2^{(2)} - n_2 a_1^{(2)} = (\mp i) a_3^{(2)}\,. \tag{2.26}$$

Следовательно, выражение для $\mathbf{b}^{(2)}$ следующее:

$$\mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{n_1 - in_2}\big[(\pm 1 - n_3) - 2i\,(\mp i)\big]\mathbf{a}^{(2)} = \frac{(\mp 1 - n_3)}{n_1 - in_2}\,\mathbf{a}^{(2)}. \tag{2.27}$$

Обращаем внимание на то, что в формулах (2.25) и (2.27) множители различаются.

Теперь рассмотрим состояния со спиральностями $\sigma = \pm 3/2$:

$$a_1 = (-n_1 n_3 \pm i n_2), \qquad a_2 = (-n_2 n_3 \mp i n_1), \qquad a_3 = 1 - n_3^2\,,$$

$$b_1 = \frac{1}{n_1 - n_2}\{\, (\pm 3 - n_3) a_1 - 2i(n_2 a_3 - n_3 a_2)\,\} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\,(-n_1 n_3 \pm i n_2),$$

$$b_2 = \frac{1}{n_1 - n_2}\{\, (\pm 3 - n_3) a_2 - 2i(n_3 a_1 - n_1 a_3)\,\} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\,(-n_2 n_3 \mp i n_1),$$

$$b_2 = \frac{1}{n_1 - n_2}\{\, (\pm 3 - n_3) a_3 - 2i(n_1 a_2 - n_2 a_1)\,\} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\,(1 - n_3^2)\,,$$

или коротко

$$\mathbf{b} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\,\mathbf{a}. \tag{2.28}$$

3. Оператор спиральности и решения волнового уравнения

Рассмотрим сначала наиболее простой случай значений спиральности, когда вырождение отсутствует:

$$\sigma = \pm 3/2,$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = 0,$$

$$a_1 = (-n_1 n_3 \pm i n_2), \quad a_2 = (-n_2 n_3 \mp i n_1), \quad a_3 = 1 - n_3^2\,; \quad \mathbf{b} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\,\mathbf{a},$$

$$c_1 \square (-n_1 n_3 \pm i n_2), \quad c_2 \square (-n_2 n_3 \mp i n_1), \quad c_3 \square 1 - n_3^2\,; \quad \mathbf{d} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\,\mathbf{c}; \tag{3.1}$$

знак $\square$ указывает на то, что вектор $\mathbf{c}$ восстанавливается с точностью до множителя.

Анализ волнового уравнения для этих состояний дает линейные соотношения:

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0, \qquad n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 0.$$

$$a_3 = -(b_1 - ib_2), \qquad b_3 = (a_1 + ia_2), \tag{3.2}$$
$$c_l = \frac{E-k_3}{M} a_l - \frac{k_1 - ik_2}{M} b_l, \quad d_l = -\frac{k_1+ik_2}{M} a_l + \frac{E+k_3}{M} b_l .$$

Покажем, что соотношения (3.1) и (3.2) согласуются друг с другом. Сначала учтем (3.1) в первом уравнении из (3.2):

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$n_1(-n_1 n_3 \pm in_2) + n_2(-n_2 n_3 \mp in_1) + n_3(n_1^2 + n_2^2) \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 .$$

Проверять второе соотношение из (3.2) не требуется в силу пропорциональности векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$. Проверим соотношение $a_3 = -(b_1 - ib_2)$:

$$-(b_1 - ib_2) = -\frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\{(-n_1 n_3 \pm in_2) - i(-n_2 n_3 \mp in_1)\} =$$
$$= -\frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}\{n_1(-n_3 \mp 1) - in_2(-n_3 \mp 1)\} = -(\pm 1 - n_3)(\mp 1 - n_3) = 1 - n_3^2 = a_3 .$$

Проверим соотношение $b_3 = (a_1 + ia_2)$:

$$(a_1 + ia_2) = (-n_1 n_3 \pm in_2) + i(-n_2 n_3 \mp in_1) =$$
$$= -n_1 n_3 \pm in_2 - in_2 n_3 \pm n_1 = (n_1 + in_2)(\pm 1 - n_3) \equiv b_3 .$$

Воспользовавшись (3.2), найдем c_j:

$$c_j = \frac{E-k_3}{M} a_j - \frac{k_1 - ik_2}{M}\frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2} a_j = \frac{E \mp k}{M} a_j . \tag{3.3}$$

Найдем d_j:

$$d_j = -\frac{k_1 + ik_2}{M} a_j + \frac{E+k_3}{M}\frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2}\frac{k_1 + ik_2}{k_1 + ik_2} a_j =$$
$$= -\frac{k_1 + ik_2}{M} a_j \pm \frac{E+k_3}{M}\frac{k \mp k_3}{(k-k_3)(k+k_3)}(k_1 + ik_2)\, a_j = \frac{k_1 + ik_2}{k_3 \pm k}\left\{\frac{E \mp k}{M} a_j\right\},$$

т. е. получаем

$$d_j = \frac{k_1 + ik_2}{k_3 \pm k} c_j = \frac{\pm k - k_3}{k_1 - ik_2} c_j , \tag{3.4}$$

что совпадает с последним соотношением в (3.1). Таким образом, согласованность соотношений (3.1) и (3.2) доказана: состояния со спиральностями $\sigma = \pm 3/2$ являются решениями волнового уравнения.

Теперь рассмотрим случай со спиральностями $\sigma = \pm 1/2$. Поскольку здесь есть двукратное вырождение собственных состояний, сначала рассмотрим их по отдельности.

Состояния первого типа задаются соотношениями (см. (2.7)):

$$b_0^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} a_0^{(1)} = \frac{n_1 + in_2}{\pm 1 + n_3} a_0^{(1)}, \quad d_0^{(1)} = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2} c_0^{(1)} = \frac{n_1 + in_2}{\pm 1 + n_3} c_0^{(1)},$$

$$\mathbf{a}^{(1)}=\mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}^{(1)}=\frac{\pm 1-n_3}{n_1-in_2}\,\mathbf{a}^{(1)}, \quad \mathbf{c}^{(1)} \,\square\, \mathbf{a}^{(1)}, \qquad \mathbf{d}^{(1)}=\frac{\pm 1-n_3}{n_1-in_2}\,\mathbf{c}^{(1)}. \tag{3.5}$$

Символ □ можно уточнить с помощью линейных соотношений:

$$\mathbf{c}^{(1)}=\frac{E-k_3}{M}\,\mathbf{a}^{(1)}-\frac{k_1-ik_2}{M}\,\mathbf{b}^{(1)}=\frac{E\mp k}{M}\,\mathbf{a}^{(1)},$$

$$\mathbf{d}^{(1)}=-\frac{k_1+ik_2}{M}\,\mathbf{a}^{(1)}+\frac{E+k_3}{M}\,\mathbf{b}^{(1)}=\frac{k_1+ik_2}{k_3\pm k}\left\{\frac{E\mp k}{M}\,\mathbf{a}^{(1)}\right\}=\frac{\pm 1-n_3}{n_1-in_2}\,\mathbf{c}^{(1)}. \tag{3.6}$$

Легко убедиться, что эти состояния не являются решениями волнового уравнения. Действительно, имеем (напоминаем, что $n_i=k_i/k$)

$$Ea_0^{(1)}+k_1a_1^{(1)}+k_2a_2^{(1)}+k_3a_3^{(1)}=0 \quad \Rightarrow \quad Ea_0^{(1)}+k=0, \quad a_0^{(1)}=-\frac{k}{E}.$$

Рассматривать уравнение $Eb_0^{(1)}+k_1b_1^{(1)}+k_2b_2^{(1)}+k_3b_3^{(1)}=0$ нет необходимости, поскольку оно отличается от предыдущего только на множитель. Рассмотрим два оставшихся уравнения:

$$a_0^{(1)}+a_3^{(1)}=-(b_1^{(1)}-ib_2^{(1)}) \Rightarrow -\frac{k}{E}+n_3=-\frac{\pm 1-n_3}{n_1-in_2}(n_1-in_2)=\pm 1+n_3 \Rightarrow \frac{k}{E}=\mp 1;$$

аналогично получаем

$$b_0^{(1)}-b_3^{(1)}=-(a_1^{(1)}+ia_2^{(1)}), \quad \frac{\pm 1-n_3}{n_1-in_2}\left(-\frac{k}{E}-n_3\right)=-(n_1+in_2) \Rightarrow$$

$$(\pm 1-n_3)\left(\frac{k}{E}+n_3\right)=(1-n_3)(1+n_3) \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{E}+n_3=\pm 1+n_3, \quad \frac{k}{E}=\pm 1.$$

т. е. приходим к противоречию, поскольку $E=\sqrt{k^2+M^2}$.

Теперь рассмотрим для значений $\sigma=\pm 1/2$ решения второго типа. Сначала отмечаем равенства

$$b_0^{(2)}=\frac{\pm 1-n_3}{n_1-in_2}\,a_0^{(2)}, \quad d_0^{(2)}=\frac{\pm 1-n_3}{n_1-in_2}\,c_0^{(2)}, \quad c_0^{(2)}=\frac{E\mp k}{M}\,a_0^{(2)}. \tag{3.7}$$

Затем рассматриваем векторы $\mathbf{a}^{(2)},\mathbf{b}^{(2)},\mathbf{c}^{(2)},\mathbf{d}^{(2)}$:

$$a_1^{(2)}=\pm in_1n_3+n_2, \quad a_2^{(2)}=\pm in_2n_3-n_1, \quad a_3^{(2)}=\mp i(1-n_3^2), \quad \mathbf{b}^{(2)}=\frac{\mp 1-n_3}{n_1-in_2}\,\mathbf{a}^{(2)},$$

$$c_1^{(2)} \,\square\, (\pm in_1n_3+n_2), \quad c_2^{(2)} \,\square\, (\pm in_2n_3-n_1), \quad c_3^{(2)} \,\square\, \mp i(1-n_3^2)\,), \quad \mathbf{d}^{(2)}=\frac{\mp 1-n_3}{n_1-in_2}\,\mathbf{c}^{(2)}.$$

Символ □ можно уточнить с помощью линейных соотношений:

$$\mathbf{c}^{(2)}=\frac{E-k_3}{M}\,\mathbf{a}^{(2)}-\frac{k_1-ik_2}{M}\,\mathbf{b}^{(2)}=\frac{E\pm k}{M}\,\mathbf{a}^{(2)},$$

$$\mathbf{d}^{(2)}=-\frac{k_1+ik_2}{M}\,\mathbf{a}^{(2)}+\frac{E+k_3}{M}\,\mathbf{b}^{(2)}=\frac{\mp 1-n_3}{n_1-in_2}\,\mathbf{c}^{(2)}. \tag{3.8}$$

Введем обозначения

$$\Gamma = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}, \quad R = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2}, \tag{3.9}$$

тогда приведенные выше формулы можно представить короче:

$$b_0^{(2)} = \Gamma\, a_0^{(2)}, \quad d_0^{(2)} = \Gamma\, c_0^{(a)}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = R\,\mathbf{a}^{(2)}, \quad \mathbf{d}^{(2)} = R\,\mathbf{c}^{(2)}. \tag{3.10}$$

Теперь проверим выполнимость следствий из волнового уравнения. Из условия

$$Ea_0^{(2)} + k_1 a_1^{(2)} + k_2 a_2^{(2)} + k_3 a_3^{(2)} = 0$$

находим

$$Ea_0^{(2)} + k\{\, n_1(\pm in_1 n_3 + n_2) + n_2(\pm in_2 n_3 - n_1) + n_3(\mp i)(n_1^2 + n_2^2)\,\} = 0 \;\Rightarrow\; a_0^{(2)} = 0.$$

Аналогично находим

$$Eb_0^{(2)} + k_1 b_1^{(2)} + k_2^{(2)} b_2 + k_3 b_3^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0^{(2)} = 0.$$

Таким образом,

$$a_0^{(2)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad c_0^{(2)} = 0, \quad d_0^{(2)} = 0. \tag{3.11}$$

Проверим два оставшихся уравнения:

$$a_3^{(2)} = -(b_1^{(2)} - ib_2^{(2)}), \quad a_3^{(2)} = \mp i(1 - n_3^2),$$

$$-(b_1^{(2)} - ib_2^{(2)}) = -R\left[\pm in_1 n_3 + n_2 - i(\pm in_2 n_3 - n_1)\right] =$$

$$= \pm i(1 \pm n_3)(1 \pm n_3)\,\frac{1 - n_3^2}{(1 - n_3)(1 + n_3)} = \pm i(1 - n_3^2)\,\frac{1 \pm n_3}{1 \mp n_3} = \frac{R}{\Gamma} a_3^{(2)},$$

т. е. уравнение не выполняется.

Рассматриваем последнее оставшееся уравнение $b_3^{(2)} = a_1^{(2)} + ia_2^{(2)}$:

$$b_3^{(2)} = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2}(\mp i)(1 - n_3^2) = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2}(\mp i)(n_1 - in_2)(n_1 + in_2) = i(n_1 + in_2)(1 \pm n_3),$$

$$a_1^{(2)} + ia_2^{(2)} = \pm in_1 n_3 + n_2 + i(\pm in_2 n_3 - n_1) =$$

$$= -i(n_1 + in_2)(1 \mp n_3)\cdot\frac{(1 \pm n_3)}{(1 \pm n_3)} = -i(n_1 + in_2)(1 \pm n_3)\cdot\frac{(1 \mp n_3)}{(1 \pm n_3)} = \frac{\Gamma}{R} b_3^{(2)},$$

т. е. это уравнение также не выполняется.

Таким образом, каждое из этих двух состояний несовместимо с волновым уравнением. Будем искать решение волнового уравнения в виде суперпозиции решений типов (1) и (2):

$$a_0 = Fa_0^{(1)} + Ga_0^{(2)}, \quad \mathbf{a} = F\mathbf{a}^{(1)} + G\mathbf{a}^{(2)},$$

$$b_0 = F\Gamma a_0^{(1)} + G\Gamma a_0^{(2)}, \quad \mathbf{b} = F\Gamma\mathbf{a}^{(1)} + GR\mathbf{a}^{(2)}; \tag{3.12}$$

напоминаем, что нормировка векторов $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}$ фиксирована, а параметры $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}$ не фиксированы, они определяют нормировки двух полных решений.

Находим следствия двух первых уравнений в (1.17):

$$Ea_0 + \mathbf{ka} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(Fa_0^{(1)} + Ga_0^{(2)}) + F\,k + G \cdot 0 = 0,$$
$$Eb_0 + \mathbf{kb} = 0 \quad \Rightarrow \quad E\Gamma(Fa_0^{(1)} + Ga_0^{(2)}) + F\Gamma k + G \cdot 0 = 0,$$

т. е.

$$Fa_0^{(1)} + Ga_0^{(2)} + F\frac{k}{E} = 0 \Rightarrow \quad F\left(a_0^{(1)} + \frac{k}{E}\right) + Ga_0^{(2)} = 0\,. \qquad (3.13)$$

С учетом $a_0^{(1)} = -\dfrac{k}{E}, \quad a_0^{(2)} = 0$ заключаем, что уравнение (3.13) ограничений на параметры F, G не содержит. Теперь обращаемся к двум оставшимся уравнениям из (1.17):

$$a_0 + a_3 = -(b_1 - ib_2), \quad b_0 - b_3 = -(a_1 + ia_2),$$

они эквивалентны следующим:

$$(Fa_0^{(1)} + Ga_0^{(2)}) + (Fa_3^{(1)} + Ga_3^{(2)}) = -\left\{(F\Gamma a_1^{(1)} + GRa_1^{(2)}) - i(F\Gamma a_2^{(1)} + GRa_2^{(2)}))\right\},$$
$$(F\Gamma a_0^{(1)} + G\Gamma a_0^{(2)}) - (F\Gamma a_3^{(1)} + GRa_3^{(2)}) = -\left\{(Fa_1^{(1)} + Ga_1^{(2)}) + i(Fa_2^{(1)} + Ga_2^{(2)})\right\}.$$

Отсюда после перегруппировки слагаемых получаем

$$F\left[(a_0^{(1)} + a_3^{(1)}) + \Gamma(a_1^{(1)} - ia_2^{(1)})\right] + G\left[(a_0^{(2)} + a_3^{(2)}) + R(a_1^{(2)} - ia_2^{(2)})\right] = 0,$$
$$F\left[\Gamma(a_0^{(1)} - a_3^{(1)}) + (a_1^{(1)} + ia_2^{(1)})\right] + G\left[(\Gamma a_0^{(2)} - Ra_3^{(2)}) + (a_1^{(2)} + ia_2^{(2)})\right] = 0. \qquad (3.14)$$

Отсюда с учетом $a_0^{(1)} = -k/E, a_0^{(2)} = 0$ находим два уравнения:

$$F\left[-k/E + a_3^{(1)} + \Gamma(a_1^{(1)} - ia_2^{(1)})\right] + G\left[a_3^{(2)} + R(a_1^{(2)} - ia_2^{(2)})\right] = 0,$$
$$F\left[-\Gamma k/E - \Gamma a_3^{(1)} + (a_1^{(1)} + ia_2^{(1)})\right] + G\left[-Ra_3^{(2)} + (a_1^{(2)} + ia_2^{(2)})\right] = 0. \qquad (3.15)$$

Учитывая формулы

$$a_1^{(1)} = n_1, \quad a_2^{(1)} = n_2, \quad a_3^{(1)} = n_3, \quad \Gamma = \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}, R = \frac{\mp 1 - n_3}{n_1 - in_2},$$
$$a_1^{(2)} = \pm in_1n_3 + n_2, \quad a_2^{(2)} = \pm in_2n_3 - n_1, \quad a_3^{(2)} = \mp i(1 - n_3^2),$$

получим явный вид этих двух уравнений. Вычисляем

$$a_3^{(1)} + \Gamma(a_1^{(1)} - ia_2^{(1)}) = n_1 + \frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}(n_1 - in_2) = \pm 1,$$
$$a_3^{(2)} + R(a_1^{(2)} - ia_2^{(2)}) = \mp i[(1 - n_3(1 + n_3) + (1 \pm n_3)(1 \pm n_3)] = \mp 2i(1 \pm n_3).$$

Следовательно, первое уравнение в (3.15) примет вид

$$\left(-\frac{k}{E} \pm 1\right)F \mp 2i\left(1 \pm n_3\right)G = 0\,. \qquad (3.16)$$

Вычисляем

$$-\Gamma a_3^{(1)} + (a_1^{(1)} + ia_2^{(1)}) = -\frac{\pm 1 - n_3}{n_1 - in_2}n_3 + (n_1 + in_2)\frac{n_1 - in_2}{n_1 - in_2} =$$

$$=\frac{1}{n_1-in_2}[(\mp 1+n_3)n_3+(1-n_3)(1+n_3)]=\frac{1\mp n_3}{n_1-in_2},$$

$$-Ra_3^{(2)}+(a_1^{(2)}+ia_2^{(2)})=\pm i(\mp 1-n_3)(n_1+in_2)\pm i(n_1+in_2)(n_3\mp 1)=$$

$$=\pm i(n_1+in_2)[\mp 1-n_3+n_3\mp 1]=-2i(n_1+in_2)\,.$$

Следовательно, второе уравнение в (3.15) принимает вид

$$F\left[\mp\frac{1\mp n_3}{n_1-in_2}\frac{k}{E}+\frac{1\mp n_3}{n_1-in_2}\right]+G\big[-2i(n_1+in_2)\big]=0,$$

или

$$\mp\frac{1\mp n_3}{n_1-in_2}(\frac{k}{E}\mp 1)\,F-2i(n_1+in_2)\,G=0,$$

т. е.

$$\left(\frac{k}{E}\mp 1\right)F\pm 2i\big(1\pm n_3\big)\,G=0. \qquad (3.17)$$

Полученное (второе) уравнение (3.17) совпадает с (первым) уравнением (3.16).

Таким образом, нужная линейная комбинация решений (3.12) найдена, она определяется уравнением (3.16) – (3.17). Коэффициенты F, G находятся с точностью до общего множителя, что связано со свободой в выборе нормировки решений.

Заключение

Исследованы решения типа плоских волн уравнения для массивной частицы со спином 3/2. Волновое уравнение дает алгебраическую систему из восьми уравнений для четырех неизвестных параметров, что предполагает существование четырех независимых решений. Чтобы привязать выбор четырех независимых решений к квантовым числам физического оператора, исследован вопрос о собственных состояниях оператора спиральности для частицы со спином 3/2. Анализ приводит к четырем различным значениям $\sigma=\pm 1/2,\ \pm 3/2$. Значения $\sigma=\pm 1/2$ оказываются двукратно вырожденными, что приводит к существованию для каждого из этих значений $\sigma=-1/2$ и $\sigma=+1/2$ двух различных собственных векторов состояний. Эти векторы состояний не являются по отдельности решениями волнового уравнения, его решения строятся в виде суперпозиции таких состояний. Найдены коэффициенты нужной линейной комбинации двух решений.

Исследование аналогичной задачи для случая безмассовой частицы со спином 3/2 будет сделано в отдельной работе. Из общих физических соображений следует ожидать, что состояния со спиральностями $\sigma=\pm 1/2$ должны устраняться калибровочными преобразованиями.

Отметим, что сделанный в работе анализ может быть важным при исследовании частицы со спином 3/2 во внешнем магнитном поле, поскольку оператор спиральности должен играть существенную роль при решении уравнения.

Приложение А

Общая теория частицы со спином 3/2

Сначала изложим описание массивной частицы со спином 3/2 в базисе Рариты – Швингера. В этом базисе уравнение для 16-компонентной волновой функции (вектор-биспинора относительно группы Лоренца) имеет вид

$$(\gamma^a \partial_a + iM)\Psi_c - \frac{1}{3}(\gamma^b \partial_c + \gamma_c \partial^b)\Psi_b + \frac{1}{3}\gamma_c(\gamma^a \partial_a - iM)\gamma^b \Psi_b = 0. \quad \text{(A.1)}$$

Потребуются следующие формулы для матриц Дирака:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2g^{ab}, \quad \gamma^a \gamma_a = 4,$$
$$\gamma^a \gamma^b \gamma^d = \gamma^a g^{bd} - \gamma^b g^{ad} + \gamma^d g^{ab} + i\gamma^5 \varepsilon^{abdc}\gamma_c, \quad \text{(A.2)}$$

где использован антисимметричный тензор Леви-Чивита: ε^{cabd}, $\varepsilon^{0123} = +1$.

Исходя из уравнений (A.1) можно получить некоторые дополнительные условия для компонент волновой функции $\Psi_a(x)$. Так, умножим уравнение (A.1) слева на матрицу γ^c, после простых преобразований получим

$$\partial_b \Psi^b = \frac{iM}{2}\gamma_b \Psi^b, \quad \text{(A.3)}$$

это первое дополнительное условие. Подействуем на уравнение (A.1) оператором ∂^c:

$$\gamma^a \partial^c \partial_a \Psi_c + iM\, \partial^c \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma^b \partial^c \partial_c \Psi_b - \frac{1}{3}\gamma_c \partial^c \partial^b \Psi_b + \frac{1}{3}\gamma^c \gamma^a \gamma^b\, \partial_c \partial_a \Psi_b - iM\, \frac{1}{3}\gamma_c \gamma^b \partial^c \Psi_b = 0.$$

Воспользовавшись формулой из (A.2), найдем

$$iM\, \partial^c \Psi_c - \frac{iM}{3}\gamma_c \gamma^b \partial^c \Psi_b + \gamma^a \partial^c \partial_a \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma^b \partial^c \partial_c \Psi_b - \frac{1}{3}\gamma_c \partial^c \partial^b \Psi_b +$$
$$+ \frac{1}{3}(\gamma^c g^{ab} - \gamma^a g^{cb} + \gamma^b g^{ac} + i\gamma^5 \varepsilon^{cabd}\gamma_d)\partial_c \partial_a \Psi_b = 0.$$

Вклад от члена с антисимметричным тензором Леви-Чивиты равен нулю ввиду свертки его с симметричной величиной $\partial_c \partial_a$, дальше после приведения подобных получим

$$iM\, \partial^c \Psi_c + \gamma^a \partial_a \left(\frac{2}{3}\partial^c \Psi_c - \frac{iM}{3}\gamma^c \Psi_c\right) = 0, \quad \text{(A.4)}$$

это второе дополнительное условие. Если воспользоваться первым дополнительным условием (A.3), то из (A.4) следует

$$\partial^c \Psi_c = 0 \quad (M \neq 0), \quad \text{(A.5)}$$

тогда первое дополнительно условие дает

$$\gamma_b \Psi^b = 0. \quad \text{(A.6)}$$

При учете соотношений (A.5) и (A.6) исходное уравнение значительно упрощается и принимает вид 4 раздельных уравнений Дирака для компонент вектор-биспинора (приводим здесь же и два дополнительных условия)

$$(i\gamma^a \partial_a - M)\Psi_c = 0, \quad \partial^c \Psi_c = 0, \quad \gamma^c \Psi_c = 0. \quad \text{(A.7)}$$

Случай безмассовой частицы значительно отличается от массивного. В исходном уравнении нужно положить $M = 0$:

$$\gamma^a \partial_a \Psi_c - \frac{1}{3}(\gamma^b \partial_c + \gamma_c \partial^b)\Psi_b + \frac{1}{3}\gamma_c \gamma^a \partial_a \gamma^b \Psi_b = 0. \quad \text{(A.8)}$$

При этом в качестве первого дополнительного условия получим

$$\partial_b \, \Psi^b = 0. \qquad (А.9)$$

Второе дополнительное условие (А.4) запишется теперь так:

$$\gamma^a \partial_a \frac{2}{3} \partial^c \Psi_c = 0\,, \qquad (А.10)$$

что эквивалентно условию (А.9). При этом исходное уравнение (А.8) упрощается лишь незначительно (рядом приводим и дополнительное уравнение):

$$\gamma^a \partial_a \Psi_c - \frac{1}{3}\gamma^b \partial_c \Psi_b + \frac{1}{3}\gamma_c \gamma^a \gamma^b \partial_a \Psi_b = 0, \quad \partial_b \, \Psi^b = 0. \qquad (А.11)$$

Уравнение (А.8) можно преобразовать к виду, когда становится очевидным существование в теории безмассовой частицы со спином 3/2 калибровочной симметрии. Будем исходить из уравнения, записанного в матричной форме

$$\Gamma^a \partial_a \Psi = 0\,, \quad \Psi = (\Psi_l)\,, \qquad (А.12)$$

где действующие в 16-мерном пространстве матрицы Γ^a задаются соотношением (биспинорные индексы у матрицы не пишем)

$$(\Gamma^a)_k{}^l = \gamma^a \; \delta_k^l - \frac{1}{3}\gamma^l \delta_k^a - \frac{1}{3}\gamma_k g^{al} + \frac{1}{3}\gamma_k \gamma^a \gamma^l. \qquad (А.13)$$

Совершим над уравнением (А.12) – (А.13) последовательно два преобразования: сначала умножим его слева на невырожденную матрицу C, а затем перейдем к новому представлению волновой функции с помощью матрицы S:

$$\Gamma^a \;\Rightarrow\; \Gamma'^a = C\,\Gamma^a \;\;\Rightarrow\;\; \tilde{\Gamma}^a = S\,\Gamma'^a\,S^{-1}\,,\; \tilde{\Psi} = S\,\Psi\,. \qquad (А.14)$$

Будем использовать матрицы C и S следующего вида:

$$C_a{}^b = \delta_a^b + c\gamma_a\gamma^b\,, \quad S_a{}^b = \delta_a^b + a\gamma_a\gamma^b\,, \quad (S^{-1})_a{}^b = \delta_a^b + b\gamma_a\gamma^b\,, \quad a + b + 4ab = 0\,. \qquad (А.15)$$

Величины a, b, c – пока произвольные параметры; уравнение для a и b получено из соотношения $S\,S^{-1} = I$. Используя (А.14) и (А.15), вычисляем Γ'^a:

$$(\Gamma'^a)_k{}^l = \left[\gamma^a \; \delta_k^l - \frac{1}{3}\gamma^l \; \delta_k^a + (2c - \frac{1}{3})\,\gamma_k \; g^{al} + \frac{1}{3}\gamma_k \; \gamma^a \; \gamma^l \right],$$

а затем $\tilde{\Gamma}^a$:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Gamma}^a)_k{}^l = \gamma^a \delta_\rho^l \{1 - [\frac{b+1}{3} + b(\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a)]\} + \\
+\gamma^l \delta_k^a \left\{ \frac{2b-1}{3} + \left[\frac{b+1}{3} + b(\frac{2c-1}{3}(1+4a) + 2a) \right] \right\} + \\
+\gamma_k g^{al} \left\{ \left[(2c-1)\frac{1+4a}{3} + 2a \right] + \left[\frac{b+1}{3} + b((2c-1)\frac{1+4a}{3} + 2a) \right] \right\} + \\
+i\gamma^5 \varepsilon_k^{als} \gamma_s \left[\frac{b+1}{3} + b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3} + 2a \right) \right].
\end{aligned} \qquad (А.16)$$

Выбираем параметры (a, b, c) так, чтобы в выражении для $\tilde{\Gamma}^a$ все члены, за исключением содержащего символ Леви-Чивита, обратились в ноль. Для этого должны выполняться три равенства:

$$a+b+4ab=0,\ 1-\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0,$$

$$\frac{2b+1}{3}+\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0,$$

$$(1+4a)\frac{2c-1}{3}+2a+\left[\frac{b+1}{3}+b\left((2c-1)\frac{1+4a}{3}+2a\right)\right]=0.$$

Эта система уравнений решается следующим образом: из третьего уравнения, учитывая второе, находим $b=-1$, затем из первого уравнения получаем $a=-1/3$, после чего из третьего имеем $c=+2$. Легко убедиться, что этот набор значений

$$a=-\frac{1}{3},\quad b=-1,\quad c=+2 \tag{A.17}$$

удовлетворяет четвертому уравнению. Таким образом, в результате преобразования

$$S_k{}^l=\delta_k^l-\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^l,\quad \tilde{\Psi}_k=S_k{}^l\Psi_l \tag{A.18}$$

для матрицы $\tilde{\Gamma}^a$ получаем выражение

$$(\tilde{\Gamma}^a)_k{}^l=+i\,\gamma^5\varepsilon_k{}^{als}\gamma_s\,. \tag{A.19}$$

Следовательно, уравнение для безмассового поля со спином 3/2 можем представить в виде

$$\gamma^a(\tilde{\Gamma}^a)_l{}^k\tilde{\Psi}_l(x)=0\quad\Rightarrow\quad i\,\gamma^5\varepsilon_k{}^{nal}\gamma_n\partial_a\tilde{\Psi}_l(x)=0\,. \tag{A.20}$$

Очевидно, что вектор-биспинор в виде градиента от произвольного биспинора $\Phi(x)$

$$\tilde{\Psi}_l^{grad}(x)=\partial_l\Phi(x) \tag{A.21}$$

всегда будет решением уравнения (A.20). Это свойство иначе называют калибровочной симметрией уравнения безмассовой частицы со спином 3/2: все его решения определены с точностью до градиента от произвольного биспинора. В исходном базисе решения градиентного типа представляются в виде

$$\Psi_l^{grad}(x)=(\delta_l{}^k-\gamma_l\gamma^k)\partial_l\Phi(x). \tag{A.22}$$

Уравнение (A.20) можно переписать так (множитель $i\gamma^5$ опускаем):

$$\varepsilon^{abkl}\,\gamma_b\partial_k\tilde{\Psi}_l=0. \tag{A.22}$$

Явный вид его довольно громоздкий:

$$\begin{gathered}\gamma_1(\partial_2\tilde{\Psi}_3-\partial_3\tilde{\Psi}_2)+\gamma_2(\partial_3\tilde{\Psi}_1-\partial_1\tilde{\Psi}_3)+\gamma_3(\partial_1\tilde{\Psi}_2-\partial_2\tilde{\Psi}_1)=0,\\ -\gamma_0(\partial_2\tilde{\Psi}_3-\partial_3\tilde{\Psi}_2)+\partial_0(\gamma_2\tilde{\Psi}_3-\gamma_3\tilde{\Psi}_2)-(\gamma_2\partial_3-\gamma_3\partial_2)\tilde{\Psi}_0=0,\\ -\gamma_0(\partial_3\tilde{\Psi}_1-\partial_1\tilde{\Psi}_3)+\partial_0(\gamma_3\tilde{\Psi}_1-\gamma_1\tilde{\Psi}_3)-(\gamma_3\partial_1-\gamma_1\partial_3)\tilde{\Psi}_0=0,\\ -\gamma_0(\partial_1\tilde{\Psi}_2-\partial_2\tilde{\Psi}_1)+\partial_0(\gamma_1\tilde{\Psi}_2-\gamma_2\tilde{\Psi}_1)-(\gamma_1\partial_2-\gamma_2\partial_1)\tilde{\Psi}_0=0.\end{gathered} \tag{A.23}$$

Возвратимся к массивному случаю. Уравнение для частицы со спином 3/2 можно привести к виду, когда в нем будут отсутствовать двойные и тройные произведения матриц Дирака. Исходное уравнение в базисе Рариты – Швингера перепишем так:

$$\left\{\gamma^a\delta_k^{\ l}-\frac{1}{3}\delta_k^a\gamma^l-\frac{1}{3}\gamma_k g^{al}+\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^a\gamma^l\right\}\partial_a\psi_l+iM(\delta_k^{\ l}-\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^l)\Psi_l=0. \qquad (A.24)$$

Здесь легко устанавливается матричная структура

$$\left\{(\Gamma^a)_k^{\ l}\partial_a+iM\Gamma_k^{\ l}\right\}\Psi_l=0, \qquad (A.25)$$

$$(\Gamma^a)_k^{\ l}=\gamma^a\delta_k^{\ l}-\frac{1}{3}\delta_k^a\gamma^l-\frac{1}{3}\gamma_k g^{al}+\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^a\gamma^l,\quad \Gamma_k^{\ l}=\delta_k^{\ l}-\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^l. \qquad (A.26)$$

Чтобы упростить уравнение (A.25), умножим его на матрицу

$$\Delta_n^{\ k}=\delta_n^{\ k}-\gamma_n\gamma^k, \qquad (A.27)$$

$$\Delta_n^{\ k}\Gamma_k^{\ l}=(\delta_n^{\ k}-\gamma_n\gamma^k)(\delta_k^{\ l}-\frac{1}{3}\gamma_k\gamma^l)=\delta_n^{\ k}-\frac{1}{3}\gamma_n\gamma^l-\gamma_n\gamma^l+\frac{4}{3}\gamma_n\gamma^l=\delta_n^{\ k};$$

т. е. матрица при iM в (A.25) становится единичной. Теперь предстоит найти $\Delta_n^{\ k}(\Gamma^a)_k^{\ l}$. После необходимых вычислений уравнение (A.25) приводится к виду

$$\left\{(\bar\Gamma^a)_n^{\ l}\partial_a+iM\delta_n^{\ l}\right\}\Psi_l=0, \qquad (A.28)$$

где

$$(\bar\Gamma^a)_n^{\ l}=\gamma^a\delta_n^{\ l}-\frac{1}{3}\delta_n^a\gamma^l-\frac{1}{3}\gamma_n g^{al}-\frac{1}{3}\gamma_n\gamma^l\gamma^a. \qquad (A.29)$$

Будем искать преобразование, которое позволит оставить в уравнении только первые степени матриц Дирака. Для этого применим преобразование со структурой

$$\Psi_l=S_l^{\ n}\Psi'_n,\quad \Psi'_n=(S^{-1})_n^{\ l},$$
$$S_l^{\ n}=\delta_l^{\ n}+a\,\gamma_l\gamma^n,\quad (S^{-1})_n^{\ k}=\delta_n^{\ k}+b\,\gamma_n\gamma^k. \qquad (A.30)$$

Из условия $S_l^{\ n}(S^{-1})_n^{\ k}=\delta_l^{\ k}$ получим

$$(\delta_l^{\ n}+a\,\gamma_l\gamma^n)(\delta_n^{\ k}+b\,\gamma_n\gamma^k)=$$
$$=\delta_l^k+b\,\gamma_l\gamma^k+a\,\gamma_l\gamma^k+4ab\gamma_l\gamma^k=\delta_l^{\ k}\quad\Rightarrow\quad a+b+4ab=0. \qquad (A.31)$$

Применим это преобразование к уравнению (A.28) – (A.29):

$$(S^{-1})_m^{\ n}\left\{(\bar\Gamma^a)_n^{\ l}\partial_a+iM\delta_n^{\ l}\right\}S_l^{\ k}\Psi'_k=0\quad\Rightarrow$$
$$\left\{(S^{-1})_m^{\ n}(\bar\Gamma^a)_n^{\ l}S_l^{\ k}\partial_a+iM\delta_m^{\ k}\right\}\Psi'_k=0. \qquad (A.32)$$

Нужно получить выражение для матрицы

$$(\Gamma'^a)_m^{\ k}=(S^{-1})_m^{\ n}(\bar\Gamma^a)_n^{\ l}S_l^{\ k}=(\delta_m^{\ n}+b\gamma_m\gamma^n)(\bar\Gamma^a)_n^{\ l}(\delta_l^{\ k}+a\gamma_l\gamma^k). \qquad (A.33)$$

Выполнив нужные вычисления, находим

$$(\Gamma'^a)_m^{\ k}=\gamma^a\,\delta_m^{\ k}+\left(\frac{2a}{3}-\frac{1}{3}\right)\delta_m^a\gamma^k+\left(-1-2b\right)\gamma_m g^{ak}+\left(\frac{1}{3}-\frac{2a}{3}-2ab\right)\gamma_m\gamma^a\gamma^k. \qquad (A.34)$$

Требуем

$$\frac{1}{3}-\frac{2a}{3}-2ab=0, \qquad a+b+4ab=0\,,$$

или

$$b=\frac{a-2}{3}, \quad a+b+4ab=0\,.$$

Таким образом, находим два возможных решения:

$$a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \quad b=\frac{a-2}{3}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{6}. \tag{A.35}$$

Возвращаясь к (А.34), получим

$$\frac{2a-1}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (-1-2b)=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\,;$$

следовательно, матрица из (А.34) имеет вид

$$(\Gamma'^{a})_{m}{}^{k}=\gamma^{a}\,\delta_{m}{}^{k}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,\delta^{a}_{m}\gamma^{k}\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\,\gamma_{m}g^{ak}\,. \tag{A.36}$$

Это представление уравнения для частицы со спином 3/2 в базисе Петраша. Для определенности можно использовать вариант с верхними знаками

$$(\Gamma'^{a})_{m}{}^{k}=\gamma^{a}\,\delta_{m}{}^{k}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\delta^{a}_{m}\gamma^{k}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\gamma_{m}g^{ak}\,. \tag{A.37}$$

Зафиксируем явный вид преобразования к базису Петраша:

$$\Psi_{l}=S_{l}{}^{n}\Psi'_{n}, \quad S_{l}{}^{n}=\delta_{l}{}^{n}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,\gamma_{l}\,\gamma^{n}, \tag{A.38}$$

$$\Psi'_{n}=(S^{-1})_{n}{}^{l}\,\Psi_{l}\,, \quad (S^{-1})_{n}{}^{k}=\delta_{n}{}^{k}+\frac{-3+\sqrt{3}}{6}\,\gamma_{n}\,\gamma^{k}\,. \tag{A.39}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pauli, W. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.

4. Гинзбург, В. Л. К теории частиц со спином 3/2 / В. Л. Гинзбург // ЖЭТФ. – 1942. – Т. 12. – С. 425–442.

5. Давыдов, А. С. Волновое уравнение частицы, имеющей спин 3/2, в отсутствие поля / А. С. Давыдов // ЖЭТФ. – 1943. – Т. 13, вып. 9-10. – С. 313–319.

6. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. N. Y. – 1961. – Vol. 13, № 1. – P. 121–145.

7. Bender, C. M. Peculiarities of a free massless spin-3/2 field theory / C. M. Bender, B. M. McCoy // Phys. Rev. – 1966. – Vol. 148, № 4. – P. 1375–1380.

8. Hagen, C. R., Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field / C. R. Hagen, L. P. S. Singh // Phys. Rev. D. – 1982. – Vol. 26, № 2. – P. 393–398.

9. Baisya, H. L. On the Rarita – Schwinger equation for the vector-bispinor field / H. L. Baisya // Nucl. Phys. B. – 1971. – Vol. 29, № 1. – P. 104–124.

10. Loide, R. K. Equations for a vector-bispinor / R. K. Loide // J. Phys. A. – 1984. – Vol. 17, № 12. – P. 2535–2550.

11. Плетюхов, В. А. К теории частиц со спином 3/2 / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Изв. вузов. Физика. – 1985. – Т. 28, № 1. – С. 91–96.

12. Capri, A. Z. Further problems in spin-3/2 field theories / A. Z. Capri, R. L. Kobes // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 22. – P. 1967–1978.

13. Darkhosh, T. Is there a solution to the Rarita–Schwinger wave equation in the presence of an external electromagnetic field? / T. Darkhosh // Phys. Rev. D. – 1985. – Vol. 32, № 12. – P. 3251–3255.

14. Cox, W. On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita-Schwinger field coupled to an external electromagnetic field / W. Cox // J. Phys. A. – 1989. – Vol. 22, № 10. – P. 1599–1608.

15. Deser, S. Massive spin-3/2 electrodynamics / S. Deser, A. Waldron, V. Pascalutsa // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 62. – Paper 105031.

16. Napsuciale, M. Spin-3/2 Beyond Rarita-Schwinger Framework / M. Napsuciale, M. Kirchbach, S. Rodriguez // Eur. Phys. J. A. – 2006. – Vol. 29. – P. 289–306.

17. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2009. – 486 с.

18. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

19. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V. V. Kisel [et al.]. – New York : Nova Science Publishers, 2018. – 404 p.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.05.2019

Ivashkevich A. V., Ovsiyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. **Solutions of the Wave Equation for a Spin 3/2 Particle and Helicity Operator**

In the paper, solutions in the form of plane waves for a massive spin 3/2 particle are examined. The wave equation gives 4 algebraic equations for 8 unknown variables, which assumes existence of 4 independent solutions. In order to relate the choice of independent solutions to quantum numbers of a physical operator, we study the problem of eigenvectors for relevant helicity operator. As expected, we obtain 4 eigenvalues, $\sigma = \pm 1/2, \pm 3/2$. *The values* $\sigma = \pm 1/2$ *turn out to have double multiplicity, this leads to existence of two different eigenstates both for* $\sigma = -1/2$ *and* $\sigma = +1/2$. *It is shown that the states with the values* $\sigma = \pm 3/2$ *represent exact solutions of the wave equation. However, the double degenerate states separately do not. It is shown that exact solutions for* $\sigma = -1/2$ *and* $\sigma = +1/2$ *of the wave equation can be constructed in the form of special linear combinations of those. Thus, there constructed a complete system of exact solutions for a massive spin 3/2 particle in momentum-helicity basis.*