

УДК 517+518.948

В.М. Мадорский

канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**К ВОПРОСУ О РЯДЕ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРАМИ**

Для решения нелинейных уравнений с гладким оператором в статье рассматривается ряд полу-локальных квазиньютоновских итерационных процессов, локально сходящихся с квадратичной скоростью. Доказывается сходимость целого семейства таких процессов неполного и полного прогнозов с «плохого» начального приближения.

Рассматривается уравнение

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

с нелинейным гладким оператором f . Относительно f полагаем, что

$$f \in C_D^{(2)}, \|f'(x)\| \leq K, \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B, \forall x \in D, \quad (2)$$

здесь $f'(x), f''(x)$, соответственно, первые и вторые производные оператора f , $[f'(x)]^{-1}$ – оператор, обратный оператору $f'(x)$.

Для решения уравнения (1) применим следующий нерегуляризованный итерационный процесс.

Шаг 1. Решаем СЛАУ относительно Δx_n .

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Шаг 2. Уточняем вектор x_n

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \quad (4)$$

Шаг 3. Проверяем окончание итерационного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\| \leq \varepsilon$, ($\varepsilon \ll 1$ – параметр останова), то выход из просчетов, иначе переход наШаг 4. Производится пересчет итерационного параметра β_n по одной из формул

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|^p}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^p}), p = 1, 2, \quad (5)$$

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n \|f(x_{n-1})\|^p}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|^p}), p = 1, 2,$$

γ_n выбирается из условия, чтобы выполнялось соотношение $\beta_n \|f(x_n)\|^p = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|^p$ и осуществляется переход на Шаг 1.

В качестве γ_n используем формулу $\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_{n-1})\|^p}{\beta_n \|f(x_n)\|^p}$, $\gamma_0 = \beta_0^2, \|f(x_{-1})\| = \|f(x_0)\|$.

Для доказательства сходимости итерационного процесса (3)–(5) используем теорему о среднем для гладких операторов.

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + 0,5K\|x_{n+1} - x_n\|^2. \quad (6)$$

Пусть $p = 1$, тогда с учетом (2) и (3) имеем из (6)

$$\begin{aligned}
\|f(x_{n+1})\| &\leq (1 - \beta_n)\|f(x_n)\| + 0.5KB^2\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 = \\
&= (1 - \beta_n(1 - 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|))\|f(x_n)\| = \\
&= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n))\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|, \\
\varepsilon_n &= 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n), n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

В связи со свойством (5) все ε_i одинаковы. Пусть x_k, β_k таковы, что $\varepsilon_k = 0.5KB^2\beta_k\|f(x_k)\| < 1$, тогда все $\varepsilon_i < 1$, для $i \geq k$. Из (7) имеем: $\|f(x_{k+1})\| \leq q_k\|f(x_k)\| < \|f(x_k)\|$, а из (5) имеем, что $\beta_k\|f(x_k)\| = \beta_{k+1}\|f(x_{k+1})\|$.

Сравнение двух последних неравенств позволяет утверждать, что $\beta_{k+1} > \beta_k$, в связи с чем $q_{k+1} = 1 - \beta_{k+1}(1 - \varepsilon_{k+1}) = 1 - \beta_{k+1}(1 - \varepsilon_k) < q_k$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность итерационных параметров монотонно возрастает ($\beta_i \nearrow 1$), а последовательность q_i монотонно убывает ($q_i \searrow 0$).

Переходя к пределу в (7) при $n \rightarrow \infty$, имеем, что последовательность элементов x_n , генерируемых итерационным процессом (3) – (5), сходится к решению уравнения (1), если такое решение в области D существует.

Из (5) и (7), переходя к пределу, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{i+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_i\|f(x_i)\|}{\|f(x_{i+1})\|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_0\|f(x_0)\|}{\prod_{i=0}^n q_i\|f(x_0)\|} = +\infty. \tag{8}$$

С учетом (5), (8), существует такой номер k , что для $i \geq k$ все $\beta_i := 1$.

Таким образом, в процессе счета наступает момент, когда процесс (3) – (5) переходит в метод Ньютона с характерной для метода Ньютона локальной квадратичной скоростью сходимости.

Стандартным образом легко находится сфера $S(x_k, r) \subset D$, где имеют место условия (2).

Теорема 1. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге итерационного процесса (3) – (5) $\varepsilon_n = 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\| < 1$. Тогда процесс (3) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Пусть $p = 2$. Тогда вместо СЛАУ (3) решается СЛАУ.

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n}f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3a}$$

а условие $\varepsilon_n = 0.5KB^2\beta_n\|f(x_n)\|$ заменяется на условие $\bar{\varepsilon}_k = 0.5KB^2\sqrt{\beta_k}\|f(x_k)\| < 1$.

Теорема 2. Пусть в области D существует решение x^* уравнения (1), оператор f удовлетворяет условиям (2) и на некотором шаге k вычислительного процесса $\bar{\varepsilon}_k < 1$. Тогда итерационный процесс (3a), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Основным слабым местом рассмотренных выше алгоритмов является требование обратимости оператора $f'(x)$ в области D. Для снятия этого достаточно обременительного условия вводим частичную регуляризацию, рассмотрев при $p = 1$ на шаге 1 СЛАУ

$$(\alpha\beta_n\|f(x_n)\|E + f'(x_n))\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

$\alpha \ll 1, E$ – единичный оператор.

Пусть

$$\|[\alpha\beta_n \|f(x_n)\|E + f'(x_n)]^{-1}\| \leq B. \quad (10)$$

Применяя теорему о среднем для гладких операторов, имеем с учетом (9), (10):

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \\ &+ 0.5K\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq (1 - \beta_n)\|f(x_n)\| + \\ &+ \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 B + 0.5KB^2 \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 = \\ &= (1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n))\|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|, \\ \varepsilon_n &= (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_n \|f(x_n)\|, q_n = 1 - \beta_n(1 - \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует при использовании метода математической индукции сходимость последовательности элементов, определяемых процессом (9), (4), (5), к решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Проводя рассуждения, вполне аналогичные тем, которые имели место при доказательстве теоремы 1, нетрудно сформулировать и доказать теорему 3.

Теорема 3. Пусть в интересующей нас области D существует решение x^* уравнения (1), оператор $f \in C_D^{(2)}$, на некотором шаге вычислительного процесса (9), (4) – (5) $\varepsilon_k = (\alpha B + 0.5KB^2)\beta_k \|f(x_k)\| < 1$ (константа B определяется формулой (10)). Тогда процесс (9), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Пусть $p = 2$. Тогда на шаге 1 решается СЛАУ

$$(\alpha\beta_n \|f(x_n)\|E + f'(x_n))\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n). \quad (9a)$$

В этом случае справедлива

Теорема 4. Пусть в интересующей нас области D существует решение x^* уравнения (1), оператор $f \in C_D^{(2)}$, на некотором шаге вычислительного процесса (9a), (4) – (5) $\bar{\varepsilon}_k = (\alpha B + 0.5KB^2)\sqrt{\beta_k} \|f(x_k)\| < 1$ (константа B определяется формулой (10)). Тогда процесс (9a), (4) – (5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

Достаточно эффективными являются итерационные процессы, в которых шаговая длина на шаге 4 определяется следующим образом:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\|^p \gamma_n}{\beta_n \|f(x_n + \Delta x_n)\|^p}), p = 1, 2, \quad (12)$$

где $\gamma_0 = \beta_0^2$ и γ_n выбирается из условия, чтобы выполнялось соотношение

$$\beta_n \|f(x_n)\|^p = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|^p,$$

после чего, как обычно, осуществляется переход на шаг 1.

В качестве γ_n используем формулу

$$\gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\|^p \|f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|^p \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \|f(x_n + \Delta x_n)\|^p \|f(x_{n+2})\|^p}, \gamma_0^2 = \beta_0^2 \frac{\|f(x_0 + \Delta x_0)\|^p}{\|f(x_1)\|^p}.$$

Пусть $p = 1$.

Теорема 5. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге k итерационного процесса (3), (4), (12) $\varepsilon_k = 0.5KB^2 \beta_k \|f(x_k)\| < 1$. Тогда процесс (3), (4), (12) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^k .

Доказательство теоремы 5 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $p = 2$. Тогда может быть сформулирована

Теорема 6. Пусть в области D существует решение уравнения (1), выполняются условия (2) и на некотором шаге k вычислительного процесса (3а), (4), (12) справедливо соотношение $\varepsilon_k = 0.5KB^2\sqrt{\beta_k} \|f(x_k)\| < 1$.

Тогда процесс (3а), (4), (12) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* .

К числу эффективных полулокальных квазиньютоновских итерационных процессов можно отнести следующие итерационные процессы, в которых на шаге 1 решаются системы 3а для нерегуляризованных процессов с шаговыми длинами

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\beta_n \|f(x_n)\|}), \gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \|f(x_{n+2})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2$$

или с шаговыми длинами вида

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\|f(x_{n-1})\| \gamma_n}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\|f(x_{n-1})\| \|f(x_{n+1})\| \gamma_n \beta_{n+1}}{\beta_n \|f(x_{n+2})\| \|f(x_n)\|}, \gamma_0 = \beta_0^2, \|f(x_{-1})\| = \|f(x_0)\|.$$

Для частично регуляризованных процессов на шаге 1 рассматривается СЛАУ вида (9а).

Ряд других способов введения шаговых длин для квазиньютоновских методов приводится в работах [1; 3–9].

Замечание 1. Поскольку направление $f'(x_n)$ градиентно согласовано с векторами x_n , определяемыми выше итерационными процессами, непременно существует такой номер k , что $\varepsilon_k < 1$ и $\overline{\varepsilon_k} < 1$ [2].

Замечание 2. Условия (2), содержащие глобальные константы B и K , в процессе счёта не используются. Важен лишь факт их существования.

Замечание 3. Частный случай рассмотренного выше алгоритма при $p = 1$ и $\gamma_n = \beta_n^2$ рассмотрен в работе [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
2. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
3. Мадорский, В. М. О регуляризованных методах с обратной связью для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – Т. 5. – С. 80–91.
4. Мадорский, В. М. Сравнительный анализ эффективности некоторых квазиньютоновских процессов при решении периодических краевых задач / В. М. Мадорский, А. В. Кот // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 10. – С. 64–68.
5. Мадорский, В. М. О регуляризованных квазиньютоновских процессах для решения нелинейных задач / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 10. – С. 69–72.
6. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 11. – С. 96–103.

7. Мадорский, В. М. Гибридизация при решении нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 125–129.
8. Мадорский, В. М. Об эффективных методах получения приближенных решений нелинейных дифференциальных задач / В. М. Мадорский, Н. Н. Стрилец // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 130–132.
9. Мадорский, В. М. Об одном нелокальном итерационном процессе для решения задачи Дуффинга / В. М. Мадорский, А. П. Кондратюк // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – С. 91–93.
10. Приближённые решения операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] – М. : Наука, 1969. – 455 с.
11. Жанлав, Т. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И. В. Пузынин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 146–156.
12. Ермаков, В. В. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона / В. В. Ермаков, Н. Н. Калиткин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1981. – Т. 21, № 2. – С. 491–497.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.04.2016

Madorskiy V.M. To the Problem of Some Quasi-Newton Method for Solving Nonlinear Equations with Smooth Operator

To solve nonlinear equations with a smooth operator in the article deals with a number semilocal quasi-Newton iterative processes converging locally at a quadratic rate. The convergence of a whole family of such processes is incomplete and full forecasts to the "bad" initial approximation.