ФІЗІКА

УДК 539.12:530.145

***Владимир Анестиевич Плетюхов*[1]*, Анастасия Михайловна Кузьмич*[2]**
[1]*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]*преподаватель-стажер каф. общей и теоретической физики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
***Vladimir Pletyukhov*[1]*, Anastasiya Kuzmich*[2]**
[1]*Doctor of Physical and Mathematical Sciences,*
Professor, Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University
[2]*Lecturer-Trainee of the Department of General and Theoretical Physics*
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: [1]pletyukhov@yandex.by

О КВАНТОВАНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ИЗОСПИНОВЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

На основе метода проективных операторов исследован вопрос о связи спина и статистики в теории релятивистских волновых уравнений первого порядка для частиц с внутренними (изоспиновыми) степенями свободы, набором спиновых состояний. Показано, что при условии отказа от положительной определенности метрики пространства состояний возможно получение причинных перестановочных соотношений при квантовании как по обычной статистике, т. е. целого (полуцелого) спина по Бозе – Эйнштейну (Ферми – Дираку), так и по инверсной – целого (полуцелого) спина по Ферми – Дираку (Бозе – Эйнштейну). Установлено также, что если изоспиновые степени свободы описываются некомпактными группами, то включение взаимодействия, не нарушающего внутренней симметрии теории, не приводит к появлению в ней отрицательных значений вероятности.

Ключевые слова: *релятивистские волновые уравнения, квантование, спин, статистика.*

On Quantization of Relativistic Wave Equations with Isospin Degrees of Freedom

The article employs the projection operator method to discuss the spin and statistics correlation in first order relativistic wave equation theory for particles with internal (isospin) degrees of freedom and the spin state array in general. The research demonstrates that rejecting positive definiteness of the space of states metric allows obtaining causal commutation connections by both standard (i.e. integer (half-integer) Bose – Einstein (Fermi – Dirac) spin) and inverse, i. e. integer (half-integer) Fermi – Dirac (Bose – Einstein) spin) statistic quantization. Besides, the research findings show that if isospin degrees of freedom are described by non-compact groups, adding interaction without breaking the internal symmetry of the theory does not result in negative probability values.

Key words: *relativistic wave equations, quantization, spin, statistics.*

Введение

Как было замечено Дираком [1] и Паули [2], однозначная связь между спином и статистикой теряется при использовании индефинитной метрики в пространстве состояний. В работе [2] показана возможность квантового описания скалярного фермиона и бозона со спином ½ (терминология Паули) без нарушения принципа причинности. В рамках метода проективных операторов [3; 4] в результате простых рассуждений устанавливается, что аналогичная возможность квантования по инверсной статистике, т. е целого спина по Ферми – Дираку и полуцелого – по Бозе – Эйнштейну, имеет место для частиц с произвольным значением спина.

Такая процедура квантования предполагает, однако, разбиение пространства состояний H на подпространства H_+ и H_-, в которых нормы векторов состояний частицы являются, соответственно, положительно ($\|f\| > 0$) и отрицательно ($\|h\| < 0$) определенными. Поэтому если при включении взаимодействия матричный элемент M перехода между состояниями из H_+ и H_- отличен от нуля, то возникают отрицательные вероятности $W_{fh} = |M|^2/\|h\|\|f\|$. Соответствующая теория является внутренне противоречивой и физически неприемлема. Именно это и имеет место как в примерах, рассмотренных в работе [2], так и в теории произвольного спина без внутренних (изоспиновых) степеней свободы.

По-иному выглядит ситуация при наличии у частицы изоспиновых степеней свободы, описываемых некомпактными группами внутренней симметрии. В данном случае при условии отказа от дефинитности метрики возможно не только непротиворечивое с точки зрения принципа причинности квантование целого и полуцелого спинов по инверсной статистике, но и получение при этом корректной вероятностной интерпретации теории.

В настоящей работе данная проблема исследуется в рамках теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка с использованием метода проективных операторов.

К вопросу о вторичном квантовании РВУ без внутренних степеней свободы с использованием индефинитной метрики

Обсудим возможность квантового описания произвольного целого (полуцелого) спина по статистике Ферми – Дирака (Бозе – Эйнштейна) для полей без внутренних степеней свободы при условии отказа от дефинитности метрики. Следуя Паули [2], постулируем для операторов рождения a^+, b^+ и уничтожения a, b перестановочные соотношения

$$\{a_k(\mathrm{p}), a^+_{k'}(\mathrm{p}')\}_\pm = \delta_{kk'}\delta(p - \mathrm{p}'), \tag{1.1}$$

$$\{b_k(\mathrm{p}), b^+_{k'}(\mathrm{p}')\}_\pm = -\delta_{kk'}\delta(p - \mathrm{p}'), \tag{1.2}$$

где коммутатор (антикоммутатор) отвечает полуцелому (целому) спину, а все остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю. Здесь обозначения a и b относятся к состояниям частицы и античастицы соответственно, индекс k характеризует спиновое состояние при заданном импульсе p. Соотношения (1.1) и (1.2) отличаются от обычных перестановочных соотношений «неправильным» знаком в правой части (1.2), который и обусловливает необходимость введения индефинитной метрики в пространстве состояний для обеспечения положительной определенности энергии во вторично квантованной теории. Используя стандартные разложения волновых функций $\Psi(x)$ и $\overline{\Psi}(x)$ ($\overline{\Psi} = \Psi^*\eta$, η – матрица билинейной инвариантной формы) по плоским волнам:

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_k \int (a_k(p)\Psi_k(p)e^{ipx} + b_k^+(p)\Psi_k(-p)e^{-ipx})d^3p, \tag{1.3}$$

$$\overline{\Psi}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_k \int (a_k^+(p)\overline{\Psi}_k(p)e^{-ipx} + b_k(p)\overline{\Psi}_k(-p)e^{ipx})d^3p, \tag{1.4}$$

с помощью условий (1.1), (1.2) вычислим выражения $\left\{\Psi_\alpha(x'), \overline{\Psi}_\beta(x'')\right\}_\pm$. В результате, полагая $x' - x'' = x$, получим

$$\left\{\Psi_\alpha(x'), \overline{\Psi}_\beta(x'')\right\}_\pm \Rightarrow \{\Psi(x') \cdot \overline{\Psi}(x'')\}_\pm =$$

$$= (2\pi)^{-3}\sum_k \int (\left[(\Psi_k(p)\cdot\overline{\Psi}_k(p))e^{ipx} \pm (\Psi_k(-p)\cdot\overline{\Psi}_k(-p)e^{-ipx}\right]d^3p, \tag{1.5}$$

где $\Psi \cdot \overline{\Psi} = (\Psi_\alpha \overline{\Psi}_\beta)$ означает прямое (диадное) произведение.

При выборе нормировки по заряду $\bar{\Psi}\gamma_4\Psi = \pm 1$ имеем для целого и полуцелого спинов соответственно [3; 4]:

$$\Psi_k(\pm p)\cdot\bar{\Psi}_k(\pm p) = \frac{m}{|p_0|}\tau_k^{(\pm)}(\hat{p}), \tag{1.6}$$

$$\Psi_k(\pm p)\cdot\bar{\Psi}_k(\pm p) = \pm\frac{m}{|p_0|}\tau_k^{(\pm)}(\hat{p}), \tag{1.7}$$

где $\tau_k^{(\pm)}(\hat{p}) = æ_\pm(\hat{p})\beta_k$ – проективный оператор, выделяющий состояние с данным импульсом знаком массы и проекции спина.

Подставляя (1.6), (1.7) в (1.5) и учитывая обсуждаемое соответствие знаков в этих выражениях характеру спина частицы (целочисленность либо полуцелочисленность), получим в обоих случаях одинаковое выражение

$$\{\Psi(x')\cdot\ \bar{\Psi}(x'')\}_\pm = (2\pi)^{-3}m\int\frac{d^3p}{|p_0|}(æ_+(\hat{p})e^{ipx} - æ_-(\hat{p})e^{-ipx}). \tag{1.8}$$

Сумма $\sum$к в (1.8) исключена вследствии равенства $\sum_k \beta_k = I$. Соотношение (1.8) в точности совпадает с формулой (33.45) в [4] и, следовательно, приводится к виду:

$$\{\Psi(x')\cdot\ \bar{\Psi}(x'')\}_\pm = -2imæ_+(\hat{\nabla})\Delta_0(x), \tag{1.9}$$

где $\hat{\nabla} = \gamma_\mu\partial_\mu$ и

$$\Delta_0(x) = (2\pi)^{-3}\int\frac{d^3p}{|p_0|}e^{\underline{ipx}}\sin|p_0|x_0\ - \tag{1.10}$$

инвариантная дельта-функция.

Таким образом, при квантовании произвольного целого (полуцелого) спина по Ферми – Дираку (Бозе – Эйнштейну) с помощью условий (1.1), (1.2) для операторных волновых функций получаются причинные перестановочные соотношения.

Однако при этом, как уже указывалось выше, вследствие «неправильного» знака в правой части (1.2) векторы состояний античастицы будут иметь отрицательную норму. Учитывая, что при наличии электромагнитного взаимодействия матричный элемент M для таких, например, процессов, как аннигиляция, фоторождение пары и другое, отличен от нуля, приходим к выводу о наличии в рассматриваемой теории физически бессмысленных отрицательных вероятностей.

Метод проективных операторов в теории РВУ с внутренними степенями свободы

Рассмотрим теперь уравнение для частицы, обладающей изоспиновыми степенями свободы. Запишем его в стандартной матричной форме

$$(\gamma_\mu\ \partial_\mu + m)\Psi(x) = 0 \tag{2.1}$$

или в импульсном преставлении [4]

$$(\hat{p} + m)\Psi(p) = 0 \quad (\hat{p} = ip_\mu\gamma_\mu), \tag{2.2}$$

где волновая функция Ψ преобразуется по набору неприводимых представлений $\tau_{l_1 l_2}$ собственной группы Лоренца.

Матрица γ_4 содержит в себе основную физическую информацию, относящуюся к данному уравнению. В базисе Гельфанда – Яглома [5; 6] она имеет вид прямой суммы $\gamma_4 = \bigoplus\sum_l C^l \otimes I_{2l+1}$, где I_{2l+1} – единичная матрица размерности $(2l+1)\times(2l+1)$, C^l – спиновый блок, сопоставляемый спину l ($|l_1 - l_2| \le l \le l_1 + l_2$) в том смысле, что если C^l имеет ненулевые собственные значения, то частица обладает данным спином. Собственные значения блоков C^l определяют также спектр массовых состояний частицы.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением полей с одним значением массы и набором спинов. Минимальные полиномы блоков C^l, а значит, и матрицы γ_4 таких РВУ содержат только один (с точностью до знака) ненулевой корень ± 1, причем знак «+» отвечает положительно-частотным, а «–» – отрицательно-частотным решениям.

В данном формализме наличие у частицы изоспиновых степеней свободы выражается в том, что в характеристических полиномах блоков C^l (по крайней мере, одного из них) корень ± 1 является кратным. Этим степеням свободы всегда можно сопоставить некоторый оператор $\hat{\Pi}$ (один или несколько), коммутирующий с операторами 4-импульса $\hat{p}$, квадрата спина $\hat{s}^2$ и проекции спина $\hat{s}_n$ на произвольное направление $\underline{n}$ и образующий вместе с ними полный набор коммутирующих операторов для данного класса РВУ. Если преобразования группы внутренней симметрии коммутируют с лоренцевскими генераторами, то оператор $\hat{\Pi}$ содержится среди этих преобразований. В противном случае для релятивистски ковариантного описания изоспиновых степеней свободы необходимо выходить за рамки группы внутренней симметрии уравнения.

Чтобы не сужать общность рассмотрения, ограничимся здесь вышеприведенными соображениями относительно свойств оператора $\hat{\Pi}$, дополнив их лишь естественными требованиями его диагонализируемости и вещественности собственных значений, а также коммутационным условием

$$\hat{\Pi}\eta = \eta\hat{\Pi}^+ \tag{2.3}$$

по аналогии с соответствующими свойствами операторов $\hat{s}^2$ и $\hat{s}_n$.

Собственные значения операторов $\hat{\Pi}$, которые в дальнейшем будем называть Π-четностью, обозначим через λ_i (индекс i нумерует различные возможные значения Π-четности). Поскольку кратность (в вышеуказанном смысле) ненулевого корня в различных спиновых блоках может быть разной, это означает, что фиксированное значение Π-четности присуще не каждому спиновому состоянию, т. е. каждому значению спина может отвечать свой набор значений Π-четности. Эту ситуацию можно трактовать и иначе, считая, что состоянию с фиксированной Π-четностью соответствует некоторый спектр спиновых состояний.

В дальнейшем для простоты (но без ущерба для существа вопроса) будем считать, что спектр значений Π-четности не зависит от спина, т. е. квантовое число i пробегает один и тот же ряд значений для любого спина l.

Применение метода проективных операторов к исследуемому классу уравнений предполагает помимо операторов $æ_\pm(\hat{p})$ и β_k [4]

$$æ_\pm(\hat{p}) = \frac{P_\pm(\hat{p})}{P_\pm(\pm m)}, \quad (\hat{p} \pm m)P_\pm(\hat{p}) \equiv P(\hat{p}) = 0, \tag{2.4}$$

$$\beta_k = Q_k(\hat{S}_n)/Q_k(k), \quad (\hat{S}_n - k)Q_k(\hat{S}_n) \equiv Q(\hat{S}_n) = 0,$$

выделяющих состояния с данным импульсом, знаком массы и проекцией спина, введение проективных операторов абсолютной величины спина σ_l^2 и Π-четности π_i, выделяющих, соответственно, состояния с данным спином и Π-четностью. Операторы π_i и σ_l^2 по аналогии с (2.4) определяются соотношениями:

$$\pi_i = P_i(\hat{\Pi})/P_i(\lambda_i), \quad (\hat{\Pi} - \lambda_i)P_i(\hat{\Pi}) \equiv P(\hat{\Pi}) = 0, \tag{2.5}$$

$$\sigma_l^2 = Q_l(\hat{S}^2)/Q_l[l(l+1)], \quad [\hat{S}^2 - l(l+1)]Q_l(\hat{S}^2) \equiv Q(\hat{S}^2) = 0 \tag{2.6}$$

В определениях (2.4) – (2.6) $P(\hat{p})$, $P(\hat{\Pi})$, $Q(\hat{S}^2)$, $Q(\hat{S}_n)$ – минимальные полиномы операторов $\hat{p}$, $\hat{\Pi}$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}_n$; $P_i(\hat{\Pi})$, $Q_l(\hat{S}^2)$, $Q_K(\hat{S}_n)$ – их «усеченные» минимальные полиномы. Проективные операторы π_i и σ_l^2 так же, как и β_k, удовлетворяют очевидному соотношению

$$\sum_i \pi_i = \sum_l \sigma_l^2 = \sum_K \beta_K = I, \tag{2.7}$$

вытекающему из их смысла.

Проективный оператор, выделяющий единственное (при отсутствии других степеней свободы) состояние с фиксированными значениями 4-импульса, знака массы, Π-четности, спина и его проекции будет иметь вид

$$\tau_{ilk}^{(\pm)} = æ_{\pm}(\hat{p})\pi_i \sigma_l^2 \beta_k \tag{2.8}$$

По аналогии с [4] можно установить, что знаки плотности энергии и заряда классической полевой системы определяются, соответственно, знаками выражений $S_\mathrm{p}\left(\tau_{ilk}^{\pm}\,\eta\right)$ и $S_p\left(\gamma_4 \tau_{ilk}^{(\pm)} \eta\right)$, вычисленными в системе покоя.

Анализ этих выражений для уравнений с одним спином и без Π-четности показывает, что знаки плотности энергии (заряда), во-первых, не зависят от значения проекции спина и, во-вторых, в положительно-частотных и отрицательно-частотных состояниях знаки указанных величин одинаковы в случае целого (полуцелого) и противоположны в случае полуцелого (целого) спина. Для уравнений же с Π-четностью и набором спинов знаки плотности энергии и заряда уже могут зависеть от квантовых чисел i и l, т. е. и энергия, и заряд для такого класса РВУ будут индефинитными.

Чтобы учесть данное обстоятельство, введем нормировочную переменную $g_{is}^{(\pm)}$, значение которой соответствует знаку плотности энергии в состоянии $\Psi_{is}(\pm p) \equiv \Psi_{is}^{(\pm)}(p)$ и вычисляется в системе покоя частицы:

$$g_{is}^{(\pm)} = Sign\left[Sp\left(\tau_{is}^{(\pm)}\eta\right)\right]. \tag{2.9}$$

(Здесь и далее, если не будет оговорено, под индексом s для удобства будем понимать объединенный индекс $\{lk\}$, характеризующий спиновое состояние частицы как в смысле абсолютной величины, так и проекции спина). При этом важно обратить внимание на то, что зависимость плотности энергии от квантового числа i означает некомпактность группы внутренней симметрии, присущей уравнению.

Существенным моментом является и то, что для рассматриваемого класса РВУ теряется строго определенное соответствие между знаками плотности энергии (заряда) в положительно- и отрицательно-частотных состояниях с одной стороны, и целочисленным либо полуцелочисленным характером спина – с другой.

Так, в зависимости от типа уравнения и способа задания оператора $\hat{\Pi}$ для плотности энергии в случае целого спина наряду с «обычным» (т. е. свойственным теориям без изоспиновых степеней свободы) соответствием, когда

$$g_{is}^{(+)} = g_{is}^{(-)}, \tag{2.10}$$

может выполняться и равенство

$$g_{is}^{(+)} = -g_{is}^{(-)}. \tag{2.11}$$

Аналогично для полуцелого спина возможно выполнение как условия (2.11), так и (2.10). Плотность заряда имеет (для любого спина) противоположные знаки в состояниях $\Psi_{is}^{(+)}$ и $\Psi_{is}^{(-)}$ в случае (2.10) и одинаковые в случае (2.11).

Остановимся подробно на ситуации, когда для целого выполняются условия (2.10) и полуцелого – (2.11). Вводя обозначение $g_{is}^{(+)} = g_{is}$, представим получающееся соответствие знаков плотности энергии и заряда различным состояниям частицы с помощью следующей таблицы (2.12):

Состояние	Целый спин		Полуцелый спин	
	энергия	заряд	энергия	заряд
$\Psi_{is}^{(+)}$	g_{is}	g_{is}	g_{is}	g_{is}
$\Psi_{is}^{(-)}$	g_{is}	$-g_{is}$	$-g_{is}$	g_{is}

(2.12)

Нормировка по заряду в соответствии с таблицей (2.12) характеризуется соотношениями

$$\overline{\Psi}_{is}^{(\pm)}\gamma_4\Psi_{is}^{(\pm)} = \pm g_{is},\ \ \overline{\Psi}_{is}^{(\pm)}\Psi_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{|p_0|}g_{is} \tag{2.13}$$

в случае целого спина и

$$\overline{\Psi}_{is}^{(\pm)}\gamma_4\Psi_{is}^{(\pm)} = g_{is},\ \ \overline{\Psi}_{is}^{(\pm)}\Psi_{is}^{(\pm)} = \pm\frac{m}{|p_0|}g_{is}\ - \tag{2.14}$$

для полуцелого.

Обращаясь теперь к проективному оператору τ и используя (2.3), перепишем определение (2.8) в виде

$$\tau_{is}^{(\pm)}(\hat{p}) = C\Psi_{is}^{(\pm)}(p)\cdot\overline{\Psi}_{is}^{(\pm)}(p). \tag{2.15}$$

Учитывая условия (2.13), (2.14) а также то, что $S_p\tau_{is}^{(\pm)} = 1$ и $(g_{is})^2 = 1$, найдем нормировочный множитель c в (2.15), а значит, и выражения для матриц-диад $\Psi\cdot\overline{\Psi}$ через проективный оператор τ, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\Psi_{is}^{(\pm)}\cdot\overline{\Psi}_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{|p_0|}g_{is}\tau_{is}^{(\pm)}\ \text{(целый спин)}, \tag{2.16}$$

$$\Psi_{is}^{(\pm)}\cdot\overline{\Psi}_{is}^{(\pm)} = \pm\frac{m}{|p_0|}g_{is}\tau_{is}^{(\pm)}\ \text{(полуцелый спин)}. \tag{2.17}$$

Вторичное квантование

С учетом квантового числа i, отвечающего Π-четности, разложение операторных волновых функций $\Psi(x)$ и $\overline{\Psi}(x)$ при переходе ко вторично квантовой теории запишется так:

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_i\sum_s\int\left[\alpha_{is}(p)\Psi_{is}^{(+)}(p)e^{ipx} + \beta_{is}^{+}(p)\Psi_{is}^{(-)}(p)e^{-ipx}\right]d^3p, \tag{3.1}$$

$$\overline{\Psi}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_i\sum_s\int\left[\alpha_{is}^{+}(p)\overline{\Psi}_{is}^{(+)}(p)e^{-ipx} + \beta_{is}^{+}(p)\overline{\Psi}_{is}^{(-)}(p)e^{ipx}\right]d^3p, \tag{3.2}$$

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в выражения для заряда

$$Q = \int\rho d^3x = e\int\overline{\Psi}(x)\gamma_4\Psi(x)d^3x \tag{3.3}$$

и энергии

$$E = \int\omega d^3x = \int p_0\overline{\Psi}(x)\gamma_4\Psi(x)d^3x, \tag{3.4}$$

получим

$$Q = e\left[\sum_i \sum_s a_{is}^+ a_{is}\left(\overline{\Psi}_{is}^{(+)}\gamma_4\Psi_{is}^{(+)}\right) + \sum_i \sum_s b_{is}b_{is}^+\left(\overline{\Psi}_{is}^{(-)}\gamma_4\Psi_{is}^{(-)}\right)\right],$$

$$E = \sum_i \sum_s a_{is}^+ a_{is}|p_0|\left(\overline{\Psi}_{is}^{(+)}\gamma_4\Psi_{is}^{(+)}\right) - \sum_i \sum_s b_{is}b_{is}^+ |p_0|\left(\overline{\Psi}_{is}^{(-)}\gamma_4\Psi_{is}^{(-)}\right).$$

Отсюда, учитывая нормировочные соотношения (2.13), (2.14), приходим к следующим выражениям для Q и E:

$$Q = e\left[\sum_{\substack{i\\p_0>0}} \sum_s g_{is}\, a_{is}^+ a_{is} \mp \sum_{\substack{i\\p_0<0}} \sum_s g_{is}\, b_{is} b_{is}^+\right], \tag{3.5}$$

$$E = \sum_{\substack{i\\p_0>0}} \sum_s g_{is}\, a_{is}^+ a_{is}|p_0| \pm \sum_{\substack{i\\p_0<0}} \sum_s g_{is}\, b_{is} b_{is}^+ |p_0|\,. \tag{3.6}$$

В (3.5) и (3.6) верхние знаки соответствуют целому, а ниже – полуцелому спину.

Рассмотрим сначала квантование по обычной статистике: целый спин – по Бозе – Эйнштейну, полуцелый – по Ферми – Дираку.

Постулируем перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения:

$$\{a_{is}, a_{i's'}^+\}_\mp = \{b_{is}, b_{i's'}^+\}_\mp = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta_{(p-p')}, \tag{3.7}$$

а все остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю.

В (3.7) коммутатор отвечает целому, антикоммутатор – полуцелому спину. Операторы числа частиц, соответсвующие такому квантованию, определяются следующим образом:

$$N_{is}^{(+)} = g_{is}a_{is}^+ a_{is},\ N_{is}^{(-)} = g_{is}b_{is}^+ b_{is}. \tag{3.8}$$

(Множитель g_{is} введен в (3.8) для того, чтобы обеспечить правильные собственные значения этих операторов: 0, 1, 2… – при квантовании по Бозе и 0, 1 – по Ферми).

Выражая из (3.7) произведение $b_{is}\, b_{is}^+$ через $b_{is}^+\, b_{is}$ и подставляя с учетом соответствия знаков в (3.5), (3.6), приведем величины Q и E к виду (с точностью до бесконечных констант, устраняемых обычным образом):

$$Q = e\left[\sum_{\substack{i\\p_0>0}} \sum_s g_{is}\, a_{is}^+ a_{is} - \sum_{\substack{i\\p_0<0}} \sum_s g_{is}\, b_{is}^+ b_{is}\right], \tag{3.9}$$

$$E = \sum_{\substack{i\\p_0>0}} \sum_s g_{is}\, a_{is}^+ a_{is}|p_0| \pm \sum_{\substack{i\\p_0<0}} \sum_s g_{is}\, b_{is}^+ b_{is}\, |p_0|, \tag{3.10}$$

одинаковому для целого и полуцелого спинов. Отсюда, используя определения (3.8), получим

$$Q = e\sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}), \tag{3.11}$$

$$E = \sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)}\,\varepsilon_{is}^{(+)} + N_{is}^{(-)}\,\varepsilon_{is}^{(-)}), \tag{3.12}$$

где $\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, индексы у $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ указывают на принадлежность к соответствующему состоянию.

Вычислим выражения $\left\{\Psi_\alpha(x'), \overline{\Psi}_\beta(x'')\right\}_\pm$, где по-прежнему коммутаторы (антикоммутаторы) отвечают целому (полуцелому) спину:

$$\left\{\Psi_\alpha(x'), \overline{\Psi}_\beta(x")\right\}_\mp \Rightarrow \{\Psi(x')\cdot\overline{\Psi}(x")\}_\mp =$$
$$= (2\pi)^{-3}\sum_i\sum_s\int[\{a_{is}, a^+_{is}\}_\mp \times \left(\Psi^{(+)}_{is}\cdot\overline{\Psi}^{(+)}_{is}\right)e^{ipx} \mp \{b_{is}, b^+_{is}\}_\mp\left(\Psi^{(-)}_{is}\cdot\right.$$
$$\left.\overline{\Psi}^{(-)}_{is}\right)e^{ipx}]d^3p. \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) при верхних знаках соотношения (2.16), а при нижних – (2.17) и учитывая условия (3.7), придем в обоих случаях к одинаковому выражению в правой части:

$$\{\Psi_\alpha(x'), \Psi_\beta(x")\}_\mp = (2\pi)^{-3}\sum_i\sum_s\int\frac{m}{|p_0|}\left(\tau^{(+)}_{is}e^{ipx} - \tau^{(+)}_{is}e^{-ipx}\right)d^3p. \quad (3.14)$$

Учтем определение (2.8) оператора $\tau^{(\pm)}_{is} \equiv \tau^{(\pm)}_{ilK}$ и то , что в соответствии с тождествами (2.7)

$$\sum_i\sum_s\tau^{(\pm)}_{is} = \sum_i\sum_l\sum_k æ_\pm(\hat{p})\pi_i\sigma_l\beta_k = æ_\pm(\hat{p}).$$

Следовательно, соотношение (3.14) преобразуется к виду (1.8) – (1.10). Этот результат совместно с формулами (3.11), (3.12) означает, что перестановочные соотношения (3.7) приводят к правильной корпускулярной картине поля и носят причинный характер.

Теперь исследуем возможность квантования рассматриваемого класса РВУ по инверсной статистике (целый спин – по Ферми – Дираку, полуцелый – по Бозе – Эйнштейну). Для этого постулируем перестановочные соотношения:

$$\{a_{is}(p), a^+_{i's'}(p')\}_\pm = -\left\{b_{is}(p), b^+_{i's'}(p')\right\}_\pm = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta_{(p-p')}, \quad (3.15)$$

в которых антикоммутатор соответствует целому, а коммутатор – полуцелому спину. При таком квантовании операторы числа частиц задаются следующим образом:

$$N^{(+)}_{is} = g_{is}a^+_{is}a_{is},\ N^{(-)}_{is} - g_{is}b^+_{is}b_{is}. \quad (3.16)$$

Выражая из (3.15) $b^+_{is}b_{is}$ и подставляя в (3.5), (3.6), получим одинаковые для обоих типов спина выражения для заряда и энергии:

$$Q = e\left[\sum_{\substack{i\\p_0>0}}\sum_s g_{is}a^+_{is}a_{is} + \sum_{\substack{i\\p_0<0}}\sum_s g_{is}b^+_{is}b_{is}\right], \quad (3.17)$$

$$E = \sum_{\substack{i\\p_0>0}}\sum_s g_{is}a^+_{is}a_{is}|p_0| - \sum_{\substack{i\\p_0<0}}\sum_s g_{is}b^+_{is}b_{is}|p_0|, \quad (3.18)$$

которые с учетом (3.16) приводятся к виду (3.11), (3.12) соответственно.

Преобразуя с помощью условий квантования (3.15) формулу (3.13), где на этот раз коммутатор (антикоммутатор) отвечает полуцелому (целому) спину, получим:

$$\left\{\Psi(x')\cdot\overline{\Psi}(x")\right\}_\pm = (2\pi)^{-3}\sum_i\sum_s\int g_{is}\left[\left(\Psi^{(+)}_{is}\cdot\overline{\Psi}^{(+)}_{is}\right)e^{ipx} \mp \left(\Psi^{(-)}_{is}\cdot\Psi^{(-)}_{is}\right)e^{-ipx}\right]d^3p. \quad (3.19)$$

Применим к (3.19) при верхнем знаке соотношение (2.16), а при нижнем – (2.17). В результате придем в обоих случаях к одинаковому выражению, совпадающему с (3.14).

Таким образом, при квантования по инверсной статистике способом (3.15) так же, как и по обычной с помощью условий (3.7), получаются правильные выражения для заряда Q и энергии E и перестановочные соотношения для операторных волновых функций имеют причинный характер. Достигается это за счет различных разбиений пространства состояний H на подпространства H_+ и H_-, в которых нормы векторов состояний являются, соответственно, положительно и отрицательно определенными.

Аналогично проводится анализ и тогда, когда для целого спина выполняется условие (2.11), а для полуцелого – (2.10). Корректные (в вышеуказанном смысле) перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения в этом случае имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \{a_{is}(p), a^+_{i's'}(p')\}_\mp = -\{b_{is}(p), b^+_{i's'}(p')\}_\mp = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p-p') \\ N^{(+)}_{is} = g_{is}a^+_{is}a_{is} \ , \ \ N^{(-)}_{is} = -g_{is}b^+_{is}b_{is} \end{aligned}\right\}, \tag{3.20}$$

$$\left.\begin{aligned} \{a_{is}(p), a^+_{i's'}(p')\}_\pm = \{b_{is}(p), b^+_{i's'}(p')\}_\pm = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p-p') \\ N^{(+)}_{is} = g_{is}a^+_{is}a_{is} \ , \ \ N^{(-)}_{is} = -g_{is}b^+_{is}b_{is} \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

при квантовании по обычной и инверсной статистикам соответственно.

Вероятностная интерпретация теории

Квантование с помощью соотношений (3.7), (3.15), (3.20), (3.21) так же, как и (1.1), (1.2), предполагает отказ от условия положительной дефинитности метрики пространства состояний. Нарушение этого условия приводит, как уже отмечалось выше, к проблеме вероятностной интерпретации теории. Указанная трудность может быть разрешена, если в теории наряду со «стандартными» имеются дополнительные законы сохранения, совместно приводящие к правилам суперотбора, т. е. запрету на переходы между состояниями с положительной и отрицательной нормой.

Существование дополнительного закона сохранения связано с наличием у рассматриваемой полевой системы изоспиновых степеней свободы (Π-четности) и обеспечивается при условии инвариантности лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\overline{\Psi}(x)\left(\gamma_\mu \nabla_\mu + m\right)\Psi(x),$$

где (∇_μ – «удлиненная» производная) относительно фазовых преобразований

$$\Psi \longrightarrow e^{e\hat{G}\theta}\Psi = \Lambda\Psi, \tag{4.1}$$

где θ – параметр, $\Lambda^+\eta\Lambda = \eta$ и $\hat{G} \neq 1$ – матричный оператор, удовлетворяющий условию:

$$\{\gamma_\mu, \hat{G}\}_- = 0. \tag{4.2}$$

Дополнительный сохраняющийся «заряд» G определяется при этом так:

$$G \sim \int \overline{\Psi}(x)\gamma_\mu \hat{G}\Psi(x)d^3x. \tag{4.3}$$

В интересующем нас случае теорий с некомпактными группами внутренней симметрии при условии независимости переменной g_{is} от квантового числа s в качестве искомого оператора $\hat{G}$ всегда может быть выбран оператор Π-четности. Сохраняющийся «заряд» G (4.3) с помощью выкладок, аналогичных тем, которые были проделаны при получении формулы (3.11), приводится тогда к виду

$$G \sim \sum_i \sum_s \lambda_i\left(N^{(+)}_{is} - N^{(-)}_{is}\right). \tag{4.4}$$

Проследим механизм совместного действия законов сохранения зарядов Q (3.11) и G (4.4), обеспечивающий исключение переходов, характеризующихся отрицательными вероятностями. Для выяснения существа дела сначала достаточно проанализировать ситуацию, когда квантовое число i принимает два значения $(i = 1,2)$. Нормировочная переменная g_{is} задается при этом следующим образом:

$$g_{1s} = -g_{2s} = 1. \tag{4.5}$$

При квантовании по обычной статистике с помощью соотношений (3.7) в данном случае в подпространства H_+ и H_- попадают состояния, определяемые операторами

$$\begin{aligned} &H_+ : \left(\Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}\right), \\ &H_- : \left(\Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

а при квантовании по инверсной статистике посредством условий (3.15) получается разбиение:

$$\begin{aligned} &H_+ : \left(\Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}\right), \\ &H_- : \left(\Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Полагая $\hat{G} = \hat{\Pi}$ и выбирая собственные значения оператора П-четности в виде $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$, получим для заряда G (4.4) выражение

$$G \sim \sum_s \left(N_{1s}^{(+)} - N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} + N_{2s}^{(-)}\right). \tag{4.8}$$

Введем операцию зарядового сопряжения $\hat{C}$, устанавливающую соответствие между состояниями частицы и античастицы. Относительно такой операции перестановочные соотношения для величин a, a^+, b, b^+ должны быть инвариантны. Применительно к рассматриваемому случаю при квантовании по обычной статистике соотношения (3.7) инвариантны относительно преобразований

$$\hat{C} a_{is} \hat{C}^{-1} = b_{is}, \quad \hat{C} a_{is}^+ \hat{C}^{-1} = b_{is}^+, \tag{4.9}$$

тогда как при квантовании по инверсной статистике (перестановочные соотношения (3.15)) операцию зарядового сопряжения следует определять так:

$$\begin{aligned} &\hat{C} a_{1s} \hat{C}^{-1} = b_{2s}\,, \ \hat{C} a_{2s} \hat{C}^{-1} = b_{1s}, \\ &\hat{C} a_{1s}^+ \hat{C}^{-1} = b_{2s}^+\,, \ \hat{C} a_{2s}^+ \hat{C}^{-1} = b_{1s}^+, \end{aligned} \tag{4.10}$$

т. е. связывать с ней изменения не только знака электрического заряда, но и Π-четности.

Выпишем теперь выражение для заряда Q (3.11) в развернутом виде:

$$Q \sim \sum_s \left(N_{1s}^{(+)} + N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} - N_{2s}^{(-)}\right). \tag{4.11}$$

Из сравнения разбиений (4.6), (4.7) с выражениями (4.8), (4.11) для G и Q следует, что одночастичным состояниям, относящимся к подпространствам H_+, H_-, соответствуют заряды (первая цифра в скобках в (4.12), (4.13) относится к электрическому, вторая – к дополнительному заряду G)

$$\begin{aligned} &H_+ : (1,1),\ (-1,-1), \\ &H_- : (-1,1),\ (1,-1) \end{aligned} \tag{4.12}$$

при первом способе квантования и

$$\begin{aligned} &H_+ : (1,1), \qquad (-1,1), \\ &H_- : (1,-1),\ (-1,-1) - \end{aligned} \tag{4.13}$$

при втором. Очевидно, что в случае (4.6), (4.12) для взаимодействий, не нарушающих эту симметрию, совместное выполнение законов сохранения для Q и G приводит к запрету физически неприемлемых переходов между состояниями из H_+ и H_- и наоборот.

В случае (4.7), (4.13) возможны, казалось бы, характеризующиеся отрицательными вероятностями процессы, такие как фоторождение (аннигиляция) пары частиц в состояниях, определяемых операторами $\Psi_{1s}^{(+)}$, $\Psi_{1s}^{(-)}$ или $\Psi_{2s}^{(+)}$, $\Psi_{2s}^{(-)}$. Однако здесь надо учесть, что в силу определения (4.11) операции зарядового сопряжения для этого случая указанные состояния не являются по отношению друг к другу состояниями частицы и античастицы, или, другими словами, система из двух таких частиц не обладает определенным значением зарядовой четности. В самом деле, подействуем на состояние $|a_{1s}^+ b_{1s}^+|0>$ данной системы оператором $\hat{C}$ (4.11). В результате получим соотношение

$$\hat{C}|a_{1s}^+ b_{1s}^+|0\rangle = |\hat{C}a_{1s}^+\hat{C}^{-1}b_{1s}^+\hat{C}^{-1}\hat{C}|0\rangle = |b_{2s}^+ a_{2s}^+\hat{C}|\,0\rangle = |b_{2s}^+ a_{2s}^+|\,0\rangle,$$

из которого видно, что состояние $|a_{1s}^+ b_{1s}^+|0\rangle$ не является собственным вектором оператора $\hat{C}$ и, следовательно, фоторождение пары частиц в таком состоянии противоречит закону сохранения зарядовой четности. Таким образом, законы сохранения для зарядов Q и G с привлечением в необходимых случаях условия сохранения зарядовой четности при квантовании по инверсной статистике также запрещают переходы, нарушающие вероятностную интерпретацию теории.

Вышеприведенные рассуждения без особых затруднений можно перенести на теории с некомпактными группами внутренней симметрии типа $SU(p,q)$, $SO(p,q)$, $SP(p,q)$, для чего надо лишь определенным образом задать оператор *П*-четности: его собственные значения по-прежнему должны быть равны $\lambda = \pm 1$, причем значение $\lambda = +1(-1)$ должно отвечать состояниям Ψ_{is} (i – обобщенный изоспиновый индекс), для которых $g_{is} = +1,\ i = 1,2,\dots,p$ ($g_{is} = -1,\ i = p+1, p+2, \dots, p+q$). Соответствующие компактным подгруппам степени свободы частицы будут при этом описываться некоторыми другими операторами, выбор которых не влияет на характер рассуждений и на окончательные выводы.

До сих пор мы подробно анализировали случай квантования с помощью перестановочных соотношений (3.7), (3.15). Для РВУ, квантуемых посредством соотношений (3.20), (3.21), механизм действия правил суперотбора по устранению отрицательных вероятностей является в известном смысле противоположным рассмотренному выше. Здесь при квантовании по инверсной статистике (квантовые условия (3.19)) для обеспечения запрета на физически бессмысленные переходы между H_+ и H_- достаточно применения законов сохранения для Q и G, в то время как при квантовании по обыч-ной статистике (условия (3.18)) необходимо дополнительно привлекать соображения, связанные с законом сохранения зарядовой четности. Так что в целом этот механизм носит симметричный характер по отношению к обоим способам квантования и не является предпочтительным по отношению к какому-либо из них для рассматриваемого класса РВУ.

Примеры

1. $SU(1,1)$-инвариантная теория дираковского поля.

Рассмотрим систему из двух уравнений Дирака:

$$\begin{aligned}(\gamma_\mu^D \partial_\mu + m)\Psi_1 &= 0,\\ (\gamma_\mu^D \partial_\mu + m)\Psi_2 &= 0,\end{aligned} \tag{5.1}$$

где Ψ_1, Ψ_2 – биспиноры, γ_μ^D – дираковские матрицы размерности 4×4; $\gamma_4^D = diag\,(1, 1, -1, -1)$.

Записав ее в стандартной матричной форме (2.1), получим для матриц γ_μ выражение:

$$\gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu^D. \tag{5.2}$$

Лангранжиан L системы выберем в виде разности лагранжианов L_1 и L_2 каждого из уравнений, т. е.

$$L = L_1 + L_2, \tag{5.3}$$

что равносильно следующему заданию матрицы билинейной лоренц-инвариантной формы:

$$\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_4^D,\ \sigma_3 = diag\ (1, -1) \text{ – матрица Паули.} \tag{5.4}$$

Построенная таким образом модель описывает частицу со спином $S = \frac{1}{2}$, но в отличие от уравнения Дирака обладает некомпактной внутренней симметрией, соответствующей группе $SU(1,1)$. Преобразования U этой группы удовлетворяют условиям:

$$\{\gamma_\mu, U\}_- = 0,\ U^+ \eta U = \eta,\ detU = 1. \tag{5.5}$$

Изоспиновая степень свободы, присущая данному уравнению, может быть описана оператором $\hat{\Pi}$, содержащимся среди преобразований U. Выбирая в соответствии с рекомендациями п. 4 значения Π-четности, равными ± 1, получим для оператора $\hat{\Pi}$ выражение

$$\hat{\Pi} = \sigma_3 \otimes I_4. \tag{5.6}$$

Нетрудно убедиться, что оператор (5.6) действительно удовлетворяет всем требованиям, сформулированным при изложении общего подхода, в т. ч. условию (4.2), обеспечивающему существование дополнительного закона сохранения в рассматриваемой модели.

Группа внутренней симметрии теории образует здесь прямое произведение с группой Лоренца. Поэтому определение (5.6) оператора Π-четности является релятивистски инвариантным, т. е. сохраняет свой вид в любой ИСО.

В качестве полного набора операторов, классифицирующих «чистые» состояния частиц, могут служить операторы $\hat{p}$, $\hat{S}_n$, $\hat{\Pi}$ (в системе покоя $\hat{S}_n = \hat{S}_3 = -i\frac{1}{4}\gamma_{[1}\gamma_{2]}$)). В базисе

$$\left\{\Psi^{(+)}_{1\frac{1}{2}}, \Psi^{(+)}_{1-\frac{1}{2}}, \Psi^{(-)}_{1\frac{1}{2}}, \Psi_{1-\frac{1}{2}}, \Psi^{(+)}_{-1\frac{1}{2}}, \Psi^{(+)}_{-1\frac{1}{2}}, \Psi^{(-)}_{-1\frac{1}{2}}, \Psi^{(-)}_{1-\frac{1}{2}}\right\} \tag{5.7}$$

проективные операторы $æ_\pm$, π_i, β_k, вычисленные по формулам (2.4), (2.5), в системе покоя принимают вид:

$$\begin{array}{ll} æ_+ = I_2 \otimes diag(1,1,0,0), & æ_- = I_2 \otimes diag(0,0,1,1), \\ \beta_{\frac{1}{2}} = I_2 \otimes diag(1,0,1,0), & \beta_{-\frac{1}{2}} = I_2 \otimes diag(0,1,0,1), \\ \pi_1 = diag(1,1,0,0) \otimes I_2, & \pi_2 = diag(0,0,1,1) \otimes I_2. \end{array} \tag{5.8}$$

Представляя (5.8), а также выражение (5.4) для матрицы билинейной формы η в формулы (2.8), (2.9), найдем:

$$g_{1S}^{(+)} = g_{2S}^{(-)} = 1,\ g_{1S}^{(-)} = g_{2S}^{(+)} = -1. \tag{5.9}$$

Соотношения (5.9) означают, что, во-первых, в рассматриваемом случае имеет место обычное для полуцелого спина соответствие (2.11), и, во-вторых, обеспечивается, как это следует из общих результатов п. 4, корректная вероятностная интерпретация вторично-квантованной теории.

Таким образом, заключаем, что вторичное квантование $SU(1,1)$-симметричного дираковского поля по статистике Ферми – Дирака осуществляется посредством перестановочных соотношений типа (3.7), которые применительно к рассматриваемому случаю ($SU(1,1)$-симметрия) принимают вид:

$$\{a_{1S}(p), a^{+}_{1S'}(p')\}_{+} = \{b_{1S}(p'), b^{+}_{1S'}(p')\}_{+} = \delta_{SS'}(p - p'),$$
$$\{a_{2S}(p), a^{+}_{2S'}(p')\}_{+} = \{b_{2S}(p'), b^{+}_{2S'}(p')\}_{+} = -\delta_{SS'}(p - p'). \qquad (5.10)$$

Соответственно, для операторов числа частиц (формулы (3.8)) получаются выражения:

$$N^{(+)}_{1S} = a^{+}_{1S}a_{1S}, \quad N^{(-)}_{1S} = b^{+}_{1S}b_{1S},$$
$$N^{(+)}_{2S} = -a^{+}_{2S}a_{2S}, \quad N^{(-)}_{2S} = -b^{+}_{2S}b_{2S}. \qquad (5.11)$$

Квантование по инверсной (Бозе – Эйнштейна) статистике осуществляется в соответствии с общими формулами (3.15) и (3.16), принимающими применительно к рассматриваемому полю вид:

$$\{a_{1S}(p), a^{+}_{1S'}(p')\}_{-} = \{b_{2S}(p), b^{+}_{2S'}(p')\}_{-} = \delta_{SS'}\delta(p - p'),$$
$$\{a_{2S}(p), a^{+}_{2S'}(p')\}_{-} = \{b_{1S}(p), b^{+}_{1S'}(p')\}_{-} = -\delta_{SS'}\delta(p - p'), \qquad (5.12)$$

$$N^{(+)}_{1S} = a^{+}_{1S}a_{1S}, \quad N^{(-)}_{1S} = -b^{+}_{1S}b_{1S},$$
$$N^{(+)}_{2S} = -a^{+}_{2S}a_{2S}, \quad N^{(-)}_{2S} = b^{+}_{2S}b_{2S}. \qquad (5.13)$$

Отсутствие отрицательных вероятностей при данном способе квантования непосредственно вытекает из приведенного в п. 4 общего исследования.

2. $SU(2,2)$-инвариантная теория дираковского поля.

Система из четырех уравнений Дирака может быть представлена в виде релятивистского волнового уравнения (2.1) с матрицами (в фермионном базисе)

$$\gamma_{\mu} = I_4 \otimes \gamma^{D}_{\mu}. \qquad (5.14)$$

Если задать матрицу билинейной формы способом

$$\eta = \gamma^{D}_{4} \otimes \gamma^{D}_{4}, \qquad (5.15)$$

то придем к группе $SU(2,2)$ внутренней симметрии лангранжевой формулировки теории. Эта группа, как и в примере 1, коммутирует с группой Лоренца.

Изоспиновые степени свободы, связанные с четырехкратными вырождением состояний обсуждаемой полевой системы, можно описать посредством двух матричных операторов, которые содержатся среди преобразований группы внутренней симметрии:

$$\hat{\Pi} = \gamma^{D}_{4} \otimes \gamma^{D}_{4} \equiv \gamma'_{4}, \qquad (5.16)$$

$$\hat{M} = -i\frac{1}{4}\gamma'_{[1}\gamma'_{2]}. \qquad (5.17)$$

Кроме этих операторов, в полный набор включаются стандартные операторы 4-импульса $\hat{p}$ и проекции спина $\hat{S}_n$. Квантовые числа, соответсвующие операторам (5.16), (5.17), обозначим: i = 1, 2; m = 1/2, –1/2, причем число m совпадает непосредственно с собственным значением оператора $\hat{M}$.

Установим, как зависят плотности энергии и заряда от квантовых чисел i и m. Для этого найдем проективные операторы $æ_{\pm}$, π_i, μ_m, β_k, сопоставляемые операторам полного набора. С учетом вида минимальных полиномов операторов $\hat{\Pi}$ и $\hat{M}$

$$\hat{\Pi}^2 - 1 = 0,\ \hat{M}^2 - \frac{1}{4} = 0 \tag{5.18}$$

получим в системе покоя:

$$\begin{gathered} æ_{+} = I_4 \otimes diag(1,1,0,0), \qquad æ_{-} = I_4 \otimes diag(0,0,1,1), \\ \pi_1 = diag(1,1,0,0) \otimes I_4, \qquad \pi_2 = diag(0,0,1,1) \otimes I_4, \\ \mu_{\frac{1}{2}} = diag(1,0,1,0) \otimes I_4, \qquad \mu_{-\frac{1}{2}} = diag(0,1,0,1) \otimes I_4, \\ \beta_{\frac{1}{2}} = I_4 \otimes diag(1,0,1,0), \qquad \beta_{-\frac{1}{2}} = I_4 \otimes diag(0,1,0,1). \end{gathered} \tag{5.19}$$

Определяя числа $g_{is}^{(\pm)}$ ($s = (mk)$) по формуле (2.9), где

$$\tau_{is}^{(\pm)} = \tau_{imk}^{(\pm)} = æ_{\pm}\pi_i\mu_m\beta_k,$$

получим следующее значения:

$$g_{is}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1,\ g_{is}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1. \tag{5.20}$$

Сравнение (5.20) с (5.9) показывает, что $SU(2,2)$- и $SU(1,1)$-симметричные теории дираковского поля принципиально не отличаются друг от друга. Поэтому правильные условия квантования для $SU(2,2)$-инвариантной теории получаются из условий (5.10) – (5.13) путем формальной замены квантовых чисел $s \to mk$.

3. Уравнение Дирака – Кэлера.

Уравнение Дирака – Кэлера [7] описывает частицу с одной массой и набором спиновых состояний s = 0, 1, дополнительно вырожденных по внутренней четности. Внутренняя симметрия лагранжиана описывается группой $SU(2,2)$.

Это уравнение строится на основе набора неприводимых представлений группы Лоренца

$$\left[(0,0) \otimes (0,0)' \otimes \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \otimes (0,1) \otimes (1,0)'\right], \tag{5.21}$$

где $(0,0)$ и $(0,0)'$ – скалярное и псевдоскалярное, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$ – векторное и псевдовекторное представления соответсвенно.

В тензорной форме уравнение Дирака – Кэлера имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi + m\psi_\mu = 0, \\ \partial_\nu \psi^*_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi^* + m\psi^*_\mu = 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \psi^*_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \\ \partial_\mu \psi_\mu + m\psi = 0, \qquad \partial_\mu \psi^*_\mu + m\psi^* = 0, \\ \left(\psi^*_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\alpha\beta]}\ ,\ \psi^*_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\nu\alpha\beta]}\ ,\ \psi^* = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}\right). \end{gathered} \tag{5.22}$$

Матрицы γ_μ уравнения Дирака – Кэлера, записанного в стандартной матричной форме (2.1), в базисе $\left\{\psi_{\dot{\alpha}}^{\beta}\right\}$ ($\dot{\alpha}$, β – биспинорные индексы) приводятся к виду (5.14). Матрица билинейной формы совпадает с матрицей пространственной инверсии и определяется согласно (5.15), отсюда не следует, однако, что, как и в случае *SU(2,2)*-инвариантной теории дираковского поля, оператор *П*-четности может быть выбран в виде (5.16). Преобразования группы внутренней симметрии теории Дирака – Кэлера не коммутируют с лоренцевскими генераторами $J_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]} + \gamma'_{[\mu}\gamma'_{\nu]}\right)$ представления (5.21) и в целом образуют полупрямое произведение с преобразованиями группы Лоренца.

По этой причине определение (5.16) оператора *П*-четности для уравнения Дирака – Кэлера справедливо только в системе покоя. Релятивистски-инвариантное обобщение оператора $\widehat{\Pi}$ имеет вид:

$$\widehat{\Pi}_{\text{инв}} = \frac{\rho_\mu \gamma'_\mu}{im}. \tag{5.23}$$

Нетрудно убедиться, что оператор (5.23) удовлетворяет всем требованиям п. 2, 4. По его собственным значениям $\lambda_i = +1, -1$ $(i = 1,2)$ различаются двукратно вырожденные состояния поля Дирака – Кэлера, что дает альтернативную по отношению ко внутренней четности интерпретацию указанного вырождения.

Вычислим значения величины $g_{is}^{(\pm)} = g_{ilk}^{(\pm)}$. С этой целью от базиса $\left\{\psi_\alpha^\beta\right\}$ с помощью унитарного преобразования

$$U = I_2 \otimes U', \qquad U' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & \sqrt{2} & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \sqrt{2} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

перейдем к представлению $\psi = \left\{\psi_{ilk}^{(\pm)}\right\}$. Тогда проективные операторы $æ_\pm$, π_i, s_l^2, β_k, отвечающие величинам полного набора, в системе покоя приводятся к виду

$$\begin{gathered} æ_+ = I_4 \otimes diag(1,1,0,0), \;\; æ_- = I_4 \otimes diag(0,0,1,1), \\ \pi_1 = diag(1,1,0,0) \otimes I_4, \;\; \pi_2 = diag(0,0,1,1) \otimes I_4, \\ s_0^2 = I_2 \otimes diag(0,0,0,0,0,1,0,1), \\ s_1^2 = I_2 \otimes diag(1,1,1,1,1,0,1,0), \\ \beta_0 = I_2 \otimes diag(1,0,1,0,0,1,0,1), \\ \beta_1 = I_2 \otimes diag(0,1,0,1,0,0,0,0), \\ \beta_{-1} = I_2 \otimes diag(0,0,0,0,1,0,1,0), \end{gathered} \tag{5.25}$$

а матрица η сохраняет структуру (5.15). По формулам (2.4) – (2.6), (2.8), (2.9) находим теперь для $g_{is}^{(\pm)}$ значения, которые оказываются совпадающими с (5.20) и, следовательно, удовлетворяют условию (2.11).

В силу различия спиновых свойств поля Дирака – Кэлера и $SU(2,2)$-инвариантной теории дираковского поля этот результат означает, что квантование в данном случае должно осуществляться посредством перестановочных соотношений (3.18), (3.19), а не (3.7), (3.15).

Таким образом, можно записать следующие условия квантования рассматриваемого РВУ:

$$\left.\begin{array}{c}\{a_{1lk}(p),\ a^{+}_{1l'k'}(p')\}_{-} = \{b_{2lk}(p),\ b^{+}_{2l'k'}(p')\}_{-} = \delta_{ll'}\delta_{kk'}\delta(p-p') \\ \{a_{2lk}(p),\ a^{+}_{2l'k'}(p')\}_{-} = \{b_{1lk}(p),\ b^{+}_{1l'k'}(p')\}_{-} = -\delta_{ll'}\delta_{kk'}\delta(p-p') \\ N^{(+)}_{1lk} = a^{+}_{1lk}a_{1lk} \quad , \quad N^{(-)}_{1lk} = -b^{+}_{1lk}b_{1lk} \\ N^{(+)}_{2lk} = -a^{+}_{2lk}a_{2lk} \quad , \quad N^{(-)}_{2lk} = b^{+}_{2lk}b_{2lk}\end{array}\right\} \tag{5.26}$$

при квантовании по обычной (Бозе – Эйнштейна) статистике и

$$\left.\begin{array}{c}\{a_{1lk}(p),\ a^{+}_{1l'k'}(p')\}_{+} = \{b_{1lk}(p),\ b^{+}_{1l'k'}(p')\}_{+} = \delta_{ll'}\delta_{kk'}\delta(p-p') \\ \{a_{2lk}(p),\ a^{+}_{2l'k'}(p')\}_{+} = \{b_{2lk}(p),\ b^{+}_{2l'k'}(p')\}_{+} = -\delta_{ll'}\delta_{kk'}\delta(p-p') \\ N^{(+)}_{1lk} = a^{+}_{1lk}a_{1lk} \quad , \quad N^{(-)}_{1lk} = b^{+}_{1lk}b_{1lk} \\ N^{(+)}_{2lk} = -a^{+}_{2lk}a_{2lk} \quad , \quad N^{(-)}_{2lk} = -b^{+}_{2lk}b_{2lk}\end{array}\right\} \tag{5.27}$$

по инверсной (Ферми – Дирака) статистике.

Из (5.26), (5.27) видно, что в отличие от предыдущих примеров разбиение (4.6), (4.12) пространства состояний H на подпространства с положительной и отрицательной нормой здесь имеет место при квантовании по инверсной статистике, а (4.7), (4.13) – по обычной.

Это означает, что в первом случае запрет на отрицательные вероятности обеспечивается уже совместным действием законов сохранения зарядов Q и G, а во втором – при дополнительном учете закона сохранения зарядовой четности.

Заключение

Исследование полей с некомпактными группами внутренней симметрии имеет важное значение в физике высоких энергий. Одной из причин этого является то, что во всех калибровочных моделях, претендующих на объединение внутренней и пространственно-временной симметрий, с необходимостью возникают структуры, описываемые некомпактными группами внутренней симметрии.

В настоящей работе показано, что теорема о связи спина и статистики в присутствии изоспиновых степеней свободы, описываемых некомпактными группами внутренней симметрии, при отказе от условия положительной определимости метрики пространства состояний теряет свою универсальность.

Оказывается возможным построение физически приемлемой (т. е. не связанной с появлением в теории отрицательных вероятностей) процедуры квантования, в котором поля с целым (полуцелым) спином допускает квантовое описание не только по статистике Бозе – Эйнштейна (Ферми – Дирака), но и по Ферми – Дираку (Бозе – Эйнштейну).

Можно указать на одну из возможных областей приложений полученного результата: описание дираковских полей с некомпактной группой внутренней симметрии посредством набора тензорных полей, квантуемых по статистике Ферми – Дирака.

Наиболее известный в настоящее время пример такого рода – поле Дирака – Кэлера, которому может быть поставлено в соответствие дираковское поле с $SU(2,2)$ группой внутренней симметрии.

Данный подход к построению теории дираковских частиц с изоспиновыми степенями свободы может найти применение в полевых моделях типа супергравитации, в которых возможность геометризованного описания имеет принципиальное значение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Dirac, P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1942. – Vol. 180. – P. 1–40.

2. Pauli, W. On Dirac's new method of field quantization / W. Pauli // Rev. Mod. Phys. – 1943. – Vol. 15. – P. 175–207.

3. Fedorov, F. I. Projective operators in the theory of elementary particles / F. I. Fedorov // JETP. – 1958. – Vol. 35. – P. 495–498.

4. Fedorov, F. I. Lorentz group / F. I. Fedorov. – M. : Science, 1979. – 384 p.

5. Gel'fand, I. M. General relativistic invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group / I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom // JETP. – 1948. – Vol. 18 – P. 703–733.

6. Gel'fand, I. M. Representations of the rotation group and the Lorentz group and their applications / I. M. Gel'fand, R. A. Minlos, Y. Y. Shapiro. – M. : Phismatgis, 1958. – 368 p.

7. Kähler, E. Der innere Differentialkul / E. Kähler // Rendiconti di math. (Roma). Sers. – 1962. – Vol. 21, № 3, 4. – P. 425–523.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.02.2024