

УДК 513.82

А.Ф. Завадский¹, А.А. Юдов²¹магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
²канд. физ.-мат. наук,доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина**ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ
ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства R_4 . Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и k -плоскости.

Одной из важных задач геометрии является задача исследования подгрупп Ли преобразований различных пространств. Особое место в ряду этих исследований занимает задача изучения подгрупп Ли групп Ли движений различных (псевдо)евклидовых пространств. Значимость этой задачи вытекает из того, что геометрия (псевдо)евклидовых пространств находит широкое применение в различных разделах математики и теоретической физики. Исследованиями в этом направлении занимались А.С. Феденко, И.В. Белько, В.Г. Копп, Р.Ф. Билялов, А.А. Юдов и др. В данной работе исследуется группа Ли движений четырехмерного евклидова пространства.

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство, т.е. пространство R_4 . Пусть G – группа Ли движений пространства R_4 , H – группа Ли вращений пространства R_4 , $\bar{G}$ – алгебра Ли группы Ли G , $\bar{H}$ – алгебра Ли группы Ли H .

Рассмотрим в пространстве R_4 ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, т.е.

$$\bar{e}_1^2 = \bar{e}_2^2 = \bar{e}_3^2 = \bar{e}_4^2 = 1, (\bar{e}_i = \bar{e}_j) = 0, i \neq j.$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H вращений пространства R_4 и группы T_4 параллельных переносов этого пространства: $G = H * T_4$. Алгебра Ли $\bar{G}$ является прямой суммой алгебр Ли $\bar{H}$ и τ_4 , где τ_4 алгебра Ли группы Ли T_4 : $\bar{G} = \bar{H} \oplus \tau_4$. Для векторов пространства $\bar{H}$ определяется операция $[a, b]$ – коммутирование, а сам результат называется коммутатором. Операция коммутирования в алгебре Ли $\bar{G}$ определяется по правилу

$$[A, B] = AB - BA, \quad (1)$$

где $A, B \in \bar{G}$.

Рассмотрим в алгебре Ли $\bar{G}$ базис:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} - E_{32}, i_6 = E_{24} - E_{42}, i_7 = E_{25} - E_{52}, i_8 = E_{34} - E_{43}, \\ i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54},$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) – матрицы, у которых в α -й строке, β -м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ задают базис алгебры Ли $\bar{H}$ группы Ли H вращений пространства R_4 .

Получим формулы для коммутаторов базисных векторов $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$. Согласно формуле (1), получаем:

$$\begin{aligned} [i_5, i_6] &= -i_8, & [i_6, i_7] &= -i_{10}, & [i_7, i_9] &= -i_5, \\ [i_5, i_7] &= -i_9, & [i_6, i_8] &= -i_5, & [i_7, i_{10}] &= -i_6, \\ [i_5, i_8] &= i_6, & [i_6, i_9] &= 0, & [i_8, i_9] &= -i_{10}, \\ [i_5, i_9] &= i_7, & [i_6, i_{10}] &= i_7, & [i_8, i_{10}] &= i_9, \\ [i_5, i_{10}] &= 0, & [i_7, i_8] &= 0, & [i_9, i_{10}] &= -i_8. \end{aligned}$$

Чтобы вектор a с координатами $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли $\overline{G}_i$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \cdot c = \lambda \cdot c$, где c – любое из $\overline{G}_i$. В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса $\overline{G}_i$.

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a \cdot c = \lambda \cdot a + \mu \cdot b,$$

$$b \cdot c = \nu \cdot a + \sigma \cdot b.$$

Все подгруппы Ли группы Ли G классифицированы. С точностью до сопряженности существует 6 подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 : $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$, которые соответствуют алгебрам Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6$, задаваемых соответственно базисами: $\overline{G}_1 = \{i_5\}, \overline{G}_2 = \{i_5 + \omega i_{10}\}, \overline{G}_3 = \{i_5, i_{10}\}, \overline{G}_4 = \{i_8, i_9, i_{10}\}, \overline{G}_5 = \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 - \lambda i_9\}, \overline{G}_6 = \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}.$

В данной работе для каждой из групп $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ находятся все инвариантные одно-, дву- и трехмерные подпространства, а также инвариантные прямые, 2-плоскости и 3-плоскости.

Рассмотрим группу G_1 . Найдем одномерные инвариантные подпространства.

Условие инвариантности имеет вид:

$$a \cdot i_5 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot i_5 = (-a_2, a_1, 0, 0) = \mu \cdot a.$$

Отсюда следует система

$$\begin{cases} -a_2 = \mu a_1, \\ a_1 = \mu a_2, \\ 0 = \mu a_3, \\ 0 = \mu a_4 \end{cases}$$

Из первого и второго уравнения системы следует:

$$-a_2 = \mu^2 a_2.$$

Решая данную систему, можно сделать вывод, что при $\mu = 0$ получим: $a_1 = 0, a_2 = 0$.

Значит, инвариантные подпространства имеют вид: $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$

При $\mu \neq 0$ получим $a_3 = 0, a_4 = 0$. Из первого и второго уравнения системы следует: $-a_2 = \mu^2 a_2$. Значит, $a_2 = 0$, иначе $\mu^2 = -1$, что является противоречием. А если $a_2 = 0$, то и $a_1 = 0$, а значит, ненулевых решений нет.

Таким образом, инвариантные подпространства относительно оператора i_5 имеют вид $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора i_5 .

Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_5 = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \\ b \cdot i_5 = \nu \cdot a + \sigma \cdot b \end{cases}$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1; & -b_2 = \nu \cdot a_1 + \sigma \cdot b_1; \\ a_1 = \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot b_2; & b_1 = \nu \cdot a_2 + \sigma \cdot b_2; \\ 0 = \lambda \cdot a_3 + \mu \cdot b_3; & 0 = \nu \cdot a_3 + \sigma \cdot b_3; \\ 0 = \lambda \cdot a_4 + \mu \cdot b_4; & 0 = \nu \cdot a_4 + \sigma \cdot b_4. \end{cases}$$

Для решения данной системы достаточно рассмотреть 6 случаев:

$$\begin{aligned} 1^0: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, & 4^0: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \\ 2^0: & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, & 5^0: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 3^0: & \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & 6^0: & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 1^0 . Получим систему:

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & -1 = \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 \\ 0 = \lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \gamma & 0 = \nu \cdot \alpha + \sigma \cdot \gamma \\ 0 = \lambda \cdot \beta + \mu \cdot \delta & 0 = \nu \cdot \beta + \sigma \cdot \delta \end{cases}$$

Решая данную систему, получим $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$. Значит, инвариантным двумерным подпространством для случая 1^0 является $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Аналогичным способом находим двумерные инварианты для случаев $2^0 - 6^0$. Получаем, что для случая 2^0 – система противоречива, для случая 3^0 – система противоречива, для случая 4^0 – система противоречива, для случая 5^0 – система противоречива, для случая 6^0 – инвариантным двумерным подпространством является $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$.

Трехмерными инвариантными подпространствами для группы Ли G_1 являются подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -\mu \bar{e}_3 + \lambda \bar{e}_4\}$, которые являются ортогональным дополнением к одномерным подпространствам $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$.

Находя таким образом инвариантные подпространства относительно остальных подгрупп Ли, получим следующие теоремы.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные подпространства $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ и следующие трехмерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -\mu \bar{e}_3 + \lambda \bar{e}_4\}$.

Теорема 2. Относительно группы G_2 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1 + \lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4, \bar{e}_2 + \mu \bar{e}_3 - \lambda \bar{e}_4\}$,

$\{\overline{e_1 + \lambda e_3 + \mu e_4}, \overline{e_2 - \mu e_3 + \lambda e_4}\}$, $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 3. Относительно группы G_3 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 4. Относительно группы G_4 инвариантны только одномерные подпространства $\{\overline{e_1}\}$ и следующее трехмерное подпространство $\{\overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, инвариантных двумерных подпространств не существует.

Теорема 5. Относительно группы G_5 нет инвариантных одномерных, двумерных и трехмерных подпространств.

Теорема 6. Относительно группы G_6 нет одномерных инвариантных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Образы стационарности групп Ли

Рассмотрим группу $G_1 = \{i_5\}$, где

$$i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\{\lambda \overline{e_3} + \mu \overline{e_4}\}$ и следующие двумерные пространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$.

Зафиксируем $\overline{e_4}$. Рассмотрим вектор $(0,0,0,1)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен.

$$(0,0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & -\delta & 0 & \omega \\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix} = (\gamma, -\varepsilon, -\omega, 0) = \lambda \cdot \overline{e_4} = (0,0,0,\lambda).$$

Из этого следует, что $\gamma = 0, \varepsilon = 0, \omega = 0$.

Зафиксируем $\overline{e_3}$. Рассмотрим вектор $(0,0,1,0)$ и потребуем, чтобы он был инвариантен

$$(0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \delta & \varepsilon \\ \beta & -\delta & 0 & \omega \\ \gamma & -\varepsilon & -\omega & 0 \end{pmatrix} = (\beta, -\delta, 0, \omega) = \mu \cdot \overline{e_3} = (0,0,\mu,0).$$

Из этого следует, что $\beta = 0, \delta = 0, \omega = 0$.

Таким образом, если зафиксировать плоскость $[0, \overline{e_3}, \overline{e_4}]$ как точечно-неподвижную, то определяется оператор i_5 . Это значит, что образом стационарности подгруппы

Ли G_1 является точечно-неподвижная плоскость R_2^0 (значок 0 означает точечно-неподвижную плоскость).

Получим теорему.

Теорема 7. Образом стационарности для подгруппы Ли G_1 является флаг $\left\{O, R_2^0\right\}$.

Аналогичным способом находим образы стационарности для подгрупп Ли $G_2 - G_6$.

Теорема 8. Среди подгрупп Ли $G_1 - G_6$ образы стационарности имеют только следующие подгруппы: G_1, G_3, G_6 . Причем образ стационарности подгруппы Ли G_1 – точечно-неподвижная евклидова плоскость R_2 , т.е. флаг $\left\{O, R_2^0\right\}$, образ стационарности подгруппы Ли G_3 – инвариантная евклидова двумерная плоскость с фиксированной точкой на ней, т.е. флаг $\left\{O, R_2\right\}$, образ стационарности подгруппы Ли G_4 – инвариантная евклидова прямая с фиксированной точкой на ней, т.е. образ стационарности флаг $\left\{O, R_1\right\}$.

Замечание 1. Все инвариантные трехмерные подпространства R_4 относительно группы Ли G_i получаются как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам.

Замечание 2. Каждому инвариантному подпространству $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ соответствует инвариантная k -плоскость: $[O, \alpha_1, \dots, \alpha_k]$ и обратно. Таким образом, теоремы 1–6 дают классификацию всех инвариантных прямых и k -плоскостей пространства R_4 относительно подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 59–77.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Ли / И. В. Белько, А. С. Феденько // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 6. – С. 393–395.
3. Зубей, Е. В. Геометрические характеристики связных подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского / Е. В. Зубей, А. А. Юдов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізика. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 52–59.
4. Юдов, А. А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движения пространства R_4^2 / А. А. Юдов, Е. Е. Гурская // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 35–41.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 31.03.2016

Zavadski A.F., Judov A.A. Invariant Characteristics of Subgroup Li of group Li Movements of Five-Dimensional Euclidean Space

The work is devoted to the study of the properties of a subgroup of the Lie group of motions of three-dimensional Euclidean space R_4 . For all subgroups of the Lie group of rotations of R_4 are all invariant subspaces invariant and all direct and k -plane.