

УДК 512.542

Д.В. Грицук¹, Д.Д. Даудов², А.А. Трофимук³¹канд. физ.-мат. наук,*старший преподаватель каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*²магистрант специальности «Математика»*Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*³канд. физ.-мат. наук,*доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина***ИНВАРИАНТЫ π -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП
С СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ МАЛОГО НОРМАЛЬНОГО РАНГА**

Получены оценки производной π -длины и нильпотентной π -длины π -разрешимой группы G , у которой нормальный ранг силовских p -подгрупп, $p \in \pi$ не превышает 2. В частности, производная π -длина такой группы G не превышает 9, а нильпотентная π -длина группы G не превышает 6.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π' . Группа называется π -группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π , и π' -группой – в противном случае.

Напомним, что группа G называется π -разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами. Данный ряд будем называть (π', π) -рядом группы G . Наименьшее число π -факторов среди всех нормальных (π', π) -рядов группы G называется π -длиной π -разрешимой группы и обозначается через $l_\pi(G)$.

Очевидно, что всякая π -разрешимая группа G обладает нормальным (π', π) -рядом, у которого все π -факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π -факторов среди всех таких нормальных рядов группы G называется нильпотентной π -длиной и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то π -разрешимая группа разрешима и нильпотентная π -длина группы G совпадает с нильпотентной длиной группы G . Здесь $\pi(G)$ – это множество простых делителей порядка группы G .

Одной из первых работ по нильпотентной π -длине π -разрешимой группы была статья М. Нумата [2]. В.С. Монахов и О.А. Шпырко [3] для нильпотентной π -длины получили аналог результата К. Дёрка ($n(G) - n(M) \leq 2$, где G – произвольная разрешимая группа, а M – ее максимальная подгруппа). Обзор результатов по нильпотентной π -длине и другим инвариантам частично разрешимых групп приведен в работе [4].

Аналог производной длины для π -разрешимой группы был предложен В.С. Монаховым. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π' -группами, либо абелевыми π -группами для всех i . Наименьшее число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π -длиной π -разрешимой группы G .

и обозначается через $l_{\pi}^a(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то значение $l_{\pi}^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G .

В работах [5; 6] изучены свойства производной π -длины π -разрешимой группы и получены ее оценки в зависимости от строения силовских p -подгрупп, $p \in \pi$. В частности, если G – π -разрешимая группа с бициклическими силовскими p -подгруппами для всех $p \in \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 6$, $l_{\pi}^n(G) \leq 4$, $l_{\pi}(G) \leq 4$.

Из этого результата вытекают оценки производной и нильпотентной длин для разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами. В частности, такие группы имеют нильпотентную длину не выше 4, а производную длину не выше 6.

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p -группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P , в том числе и P . Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X .

В работе [7] было установлено, что если G – разрешимая группа с силовскими подгруппами нормального ранга ≤ 2 , то нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Очевидно, что p -группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P циклическая. Из теоремы III.11.5 [8] следует, что нормальный ранг примарной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S) = 2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, из леммы 5 всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Развитием результатов работ [6; 7] является следующая

Теорема. Пусть G – π -разрешимая группа такая, что $r_n(P) \leq 2$ для любой силовской p -подгруппы P , $p \in \pi$. Тогда:

- 1) если $\{2, 3\} \notin \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 3$, $l_{\pi}^n(G) \leq 2$, $l_{\pi}(G) \leq 2$;
- 2) если $\{2, 3\} \in \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 9$, $l_{\pi}^n(G) \leq 6$, $l_{\pi}(G) \leq 6$.

1. Вспомогательные результаты

Из определений π -длины, нильпотентной и производной π -длин вытекает, что $l_{\pi}(G) \leq l_{\pi}^n(G) \leq l_{\pi}^a(G)$.

В леммах 1 и 2 под $l_{\pi}^*(G)$ можно понимать либо всюду $l_{\pi}(G)$, либо всюду $l_{\pi}^n(G)$, либо всюду $l_{\pi}^a(G)$.

Лемма 1. Если G – π -разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, то $l_{\pi}^*(G) \leq l_{\pi_1}^*(G) + l_{\pi_2}^*(G)$.

Лемма 2. ([6, лемма 2.3]). Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если H – подгруппа группы G , то $l_{\pi}^*(H) \leq l_{\pi}^*(G)$;
- 2) если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_{\pi}^*(G/N) \leq l_{\pi}^*(G)$ и $l_{\pi}^*(G) \leq l_{\pi}^*(G/N) + l_{\pi}^*(N)$;
- 3) если N – нормальная π' -подгруппа группы G , то $l_{\pi}^*(G/N) = l_{\pi}^*(G)$;
- 4) если G и V – π -разрешимые группы, то $l_{\pi}^*(G \times V) = \max\{l_{\pi}^*(G), l_{\pi}^*(V)\}$;
- 5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G , то $l_{\pi}^*(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_{\pi}^*(G/N_1), l_{\pi}^*(G/N_2)\}$.

В монографии Хупперта [8] получено описание p -групп G , у которых каждая абелева нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Эти результаты отражены в леммах 3 и 4.

Лемма 3 ([8, теорема III.7.6]). Пусть G – p -группа и каждая абелева нормальная подгруппа циклическая. Тогда:

- 1) если $p > 2$, то G циклическая;
- 2) если $p = 2$, то P имеет нормальную циклическую подгруппу индекса 2.

Лемма 4. ([8, теорема III.12.4, замечание III.12.5], [9]). Пусть G – p -группа, $|G| = p^n$ и каждая абелева нормальная подгруппа порождается двумя элементами. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:

I. Если $p \geq 3$, то:

- 1) G метациклическая;
- 2) либо $G = A \times B$, где A – неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p , а B – циклическая группа порядка p^{n-2} , либо $G = [A]B$, где $A = Z_p \times Z_{p^{n-2}}$ – абелева группа, а B – циклическая группа порядка p ;

3) $G = [A]B$, где A – абелева группа, $A = C_G(G')$, а B – циклическая группа порядка p ;

4) G – 3-группа максимального класса.

II. Если $p = 2$, то:

- 1) G – группа кватернионов порядка 8;
- 2) G – центральное произведение двух подгрупп Q_8 и D_8 , где D_8 – диэдральная группа порядка 8;
- 3) G – специальная группа такая, что $|G/Z(G)| = 2^4$ и $|Z(G)| = 2^2$.

Лемма 5. Пусть P – p -группа и $r_n(P) \leq 2$. Тогда производная длина группы P не превышает 2. В частности, если $p = 2$, то P бициклическая.

Доказательство. Так как $r_n(P) \leq 2$, то каждая абелева нормальная подгруппа порождается не более, чем двумя элементами. Если каждая абелева нормальная подгруппа циклическая, то из леммы 3 следует, что P бициклическая и производная длина группы P не превышает 2. Для случая, когда число порождающих элементов каждой абелевой нормальной подгруппы равно двум, будем использовать лемму 4. Очевидно, что группы из п. I_1 , I_3 и II_1 являются метабелевыми. Так как неабелева группа A порядка p^3 и экспоненты p является метабелевой, то группа P из п. I_2 метабелева. Из теоремы 14.17 [8] производная длина 3-группы максимального класса (п. I_4) равна 2. Группа P из п. II_2 имеет порядок 16 и номер 8 в библиотеке SmallGroups [10]. Кроме того, эта группа является бициклической и имеет производную длину равную 2. Вычисления в компьютерной системе GAP [10] показывают, что группа из п. II_3 имеет нормальный ранг равный 4, поэтому исключается из рассмотрения.

Таким образом, производная длина группы P не превышает 2. Кроме того, при $p = 2$ группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть G – p -разрешимая группа такая, что $r_n(P) \leq 2$, где P – силовская p -подгруппа группы G . Тогда $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$, а $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . По лемме VI.6.9 [8] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G)$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G) = C_G(F)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } F$. Так как $|F/\Phi(F)| \leq p^2$ и $\Phi(F) = 1$, то $|F| \leq p^2$.

Если $|F| = p$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе циклической группы $\text{Aut } F$, порядок которой равен $p-1$. Поэтому $l_p(G) \leq 1$. Если $|F| = p^2$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$, порядок которой равен $(p^2 - p)(p^2 - 1)$. Тогда в группе G силовская p -подгруппа имеет порядок либо p^2 , либо p^3 . Если силовская p -подгруппа абелева, то $l_p(G) \leq 1$. Если G_p неабелева, то порядок силовской подгруппы G_p равен p^3 и $l_p(G) \leq 2$ по теореме VI.6.6 [8].

По теореме I.14.10 [8] G_p изоморфна либо метациклической группе $M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle] \langle b \rangle$, либо группе экспоненты p . В первом случае $l_p(G) \leq 1$ для $p \geq 3$. Пусть G_p – группа экспоненты p . Если порядок группы нечетен или p – не простое число Ферма, то, по теореме IX.4.8 [11], $l_p(G) \leq 1$. Но теперь, согласно утверждению b) теоремы IX.5.5 [11], $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

Лемма 7 ([8, леммы VI.8.1]). Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(2, p)$. Тогда H циклическая и $|H|$ делит $(p^2 - 1)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G , для которых $\mathfrak{H}$ -корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Лемма 8. Пусть G – группа нечётно порядка $r_n(P) \leq 2$, P – силовская p -подгруппа. Тогда коммутант группы G нильпотентен.

Доказательство. Очевидно, что условие «коммутант группы нильпотентен» равносильно принадлежности группы к произведению формаций $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Пусть G – группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условиям теоремы, но не принадлежащая $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Очевидно, что всякая фактор-группа наследует условия теоремы. Тогда $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F = F(G)$. Так как G разрешима, то $F = C_G(F)$. Кроме того, $|F| = p^n$ и т.к. $F \leq P$, то $\Phi(F) = 1$ и $|F| \leq p^2$.

Если $|F| = p$, то G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Если $|F| = p^2$, то G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$. По лемме 7, G/F циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Противоречие. Значит, предположение о группе G неверное и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, т.е. коммутант группы G нильпотентен.

Лемма 9. Пусть G – разрешимая группа такая, что $r_n(P) \leq 2$, P – силовская p -подгруппа, $p \in \{2, 3\}$. Тогда $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq 6$ и $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 4$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $O_{\{2,3\}'}(G) = 1$, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $|N| = p^n$, где $p \in \{2, 3\}$. Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. Тогда подгруппа Фиттинга $F(G) = O_p(G)$ и $F(G) \leq G_p$. Так как $r_n(G_p) \leq 2$, то $|F(G)/\Phi(F(G))| \leq p^2$.

Рассмотрим фактор-группу $F(G)/\Phi(G)$. Очевидно, что

$$F(G)/\Phi(G) \cong (F(G)/\Phi(F(G)))/(\Phi(G)/\Phi(F(G))).$$

Тогда $|F(G)/\Phi(G)| \leq p^2$. Так как G – разрешима, то $F(G)/\Phi(G)$ – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

Если $|F(G)/\Phi(G)| = p$, то $C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ и $G/F(G) \cong (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))$ изоморфна подгруппе группы $\text{Aut } F(G)/\Phi(G)$. Поэтому $G/F(G)$ – циклическая и $l_{\{2,3\}}^a(G/F(G)) \leq 1$. Так как по лемме 5 $d(G_p) \leq 2$, то $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq 2 + 1 = 3$, а $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 2$.

Пусть $|F(G)/\Phi(G)| = p^2$. Тогда $G/F(G)$ изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$. Если $p = 2$, то $G/F(G)$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_3 \cong GL(2, 2)$ степени 3, а значит, G – $\{2, 3\}$ -группа и $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq l_{\{2,3\}}^a(F(G)) + l_{\{2,3\}}^a(S_3) = 2 + 2 = 4$, а $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 1 + 2 = 3$. Если $p = 3$, то $G/F(G)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2, 3)$ и $l_{\{2,3\}}^a(G) \leq l_{\{2,3\}}^a(F(G)) + l_{\{2,3\}}^a(GL(2, 3)) = 2 + 4 = 6$, а $l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 1 + 3 = 4$.

2. Доказательство теоремы

1) Применим индукцию по порядку G . Все фактор-группы наследуют условие теоремы. Поэтому $O_{\pi'}(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N . Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. Тогда $F = F(G) \leq G_p$.

Так как $p > 3$, то по лемме 6 $l_p(G) \leq 1$. Тогда $F(G) = G_p$.

Так как холлова π -подгруппа G_π имеет нечётный порядок, то, по лемме 8, ее коммутант $(G_\pi)'$ нильпотентен и $(G_\pi)' \leq F(G_\pi)$. Тогда

$$G_\pi/F(G_\pi) \cong (G_\pi/(G_\pi)')/(F(G_\pi)/(G_\pi)')$$

и $G_\pi/F(G_\pi)$ абелева. Очевидно, что $F(G_\pi) = F(G)$. Таким образом, $G_\pi/F(G)$ – абелева, а значит, $l_\pi^a(G/F(G)) \leq 1$. Так как $F(G) = G_p$ и $d(G_p) \leq 2$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$, а $l_\pi^n(G) \leq 2$. В частности, $l_\pi(G) \leq 2$.

2) Из леммы 1 и леммы 9 следует, что $l_\pi^a(G) \leq l_{\{2,3\}'}^a(G) + l_{\{2,3\}}^a(G) \leq 3 + 6 = 9$, $l_\pi^n(G) \leq l_{\{2,3\}'}^n(G) + l_{\{2,3\}}^n(G) \leq 2 + 4 = 6$. В частности, $l_\pi(G) \leq 6$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышс. шк., 2006.
2. Numata, M. On the π -nilpotent length of π -solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. – 1971. – Vol. 8. – P. 447–451.

3. Monakhov, V. S. The nilpotent π -length of maximum subgroups in finite π -soluble groups / V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2009. – Vol. 64, № 6. – P. 229–234.
4. Монахов, В. С. Инварианты конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 63–81.
5. Грицук, Д. В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
6. Грицук, Д. В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
7. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
9. Blackburn, N. Generalizations of certain elementary theorems on p -groups / N. Blackburn // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 11. – P. 1–22.
10. GAP (Groups, Algorithms, and Programming) (2014), Version 4.7.6. [Electronic resource]. – Mode access: www.gap-system.org.
11. Huppert, B. Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer. – 1982.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.05.2016

Gritsuk D.V., Daudov D.D., Trofimuk A.A. On Invariants of π -Solvable Groups with Sylow Subgroups of Small Normal Rank

We obtain estimates of the derived π -length and the nilpotent π -length of a π -solvable group G whose normal rank of Sylow p -subgroups, $p \in \pi$ is at most 2. In particular, the derived π -length of such group does not exceed 9 and the nilpotent π -length of such group does not exceed 6.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф15PM-025).