

Е.М. Овсюк¹, А.Н. Редько², В.М. Редьков³

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики
Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

²преподватель каф. физики и методики преподавания физики

Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка

³д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории
теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ОСЦИЛЛЯТОРА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ГОЙНА

На основе использования уравнения Клейна – Фока – Гордона выполнено аналитическое исследование релятивистской квантово-механической задачи о частице (со спином ноль) в поле осциллятора на фоне плоского пространства Минковского. Задача сведена к трижды вырожденному уравнению Гойна с одной иррегулярной особой точкой ранга 4 в $z = \infty$. Приведены основные свойства локальных решений в окрестности этой особой точки, описаны 34-членные рекуррентные соотношения для возникающих степенных рядов. Качественный анализ показал, что у этой системы могут быть только квазистационарные состояния с возможностью туннелирования частицы через потенциальный барьер. Аналогичный анализ выполнен в случае использования геометрии гиперболического пространства Лобачевского. В этой системе также возможны только квазистационарные связанные состояния, ее аналитическое описание сводится к вырожденному уравнению Гойна с двумя регулярными и одной иррегулярной ранга 2 особенностями.

Теоретические достижения в физике связаны с разработанностью применяемого математического аппарата. Многие результаты, полученные в классической и квантовой физике, в значительной степени основаны на применении теории гипергеометрических функций – решений дифференциального уравнения с тремя особыми точками. В последние десятилетия растет число физических задач, в которых надо решать дифференциальное уравнение с четырьмя особыми точками – уравнение Гойна [1; 2].

Релятивистская частица в поле осциллятора в пространстве Лобачевского

Обратимся к аналитическому исследованию задачи о поведении релятивистской скалярной частицы во внешнем поле осциллятора при равном нулю квантовом числе углового момента $j = 0$. Сначала рассмотрим эту систему на фоне пространства Лобачевского, затем сравним ее с аналогичной системой в пространстве Минковского. После разделения переменных в уравнении Клейна – Фока – Гордона в пространстве Лобачевского задача сводится [3] к уравнению следующего вида (приводим его сначала в обычных единицах измерения; радиус кривизны пространства обозначаем как R ; радиальная переменная r получена делением на радиус кривизны $r = R/\rho$):

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{\varepsilon \rho}{\hbar c} - \frac{1}{2} \frac{k \rho^3}{\hbar c} \operatorname{th}^2 r \right)^2 - \frac{m^2 c^2 \rho^2}{\hbar^2} \right] F = 0. \quad (1)$$

Явное представление этого уравнения можно упростить, если использовать энергию покоя как единицу измерения энергии:

$$\frac{\varepsilon \rho}{\hbar c} \frac{\hbar}{m c \rho} = \frac{\varepsilon}{m c^2} = E, \quad \frac{k \rho^3}{\hbar c} \frac{\hbar}{m c \rho} = \frac{k \rho^2}{m c^2} = K, \quad (2)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(E - \frac{K \operatorname{th}^2 r}{2} \right)^2 - 1 \right] F = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) определяет квадрат обобщенного импульса в виде:

$$p^2 = \left(E - \frac{K \operatorname{th}^2 r}{2} \right)^2 - 1. \quad (4)$$

Этот полином 4-й степени раскладывается на множители (требуем, чтобы точки поворота лежали в физической области изменения переменной r):

$$\begin{aligned} \operatorname{th} r_1 &= \sqrt{\frac{E-1}{K/2}} < 1, & \operatorname{th} r_2 &= \sqrt{\frac{E+1}{K/2}} < 1, \\ \operatorname{th} r'_1 &= -\sqrt{\frac{E-1}{K/2}} > -1, & \operatorname{th} r'_2 &= -\sqrt{\frac{E+1}{K/2}} > -1; \\ p^2 &= \frac{K^2}{4} (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r_1) (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r_2) (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r'_1) (\operatorname{th} r - \operatorname{th} r'_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Из требования, чтобы положительные точки поворота лежали в физической области координаты r , следует (рисунок 1):

$$E > 1, \quad E - 1 < \frac{K}{2}, \quad E + 1 < \frac{K}{2}. \quad (6)$$

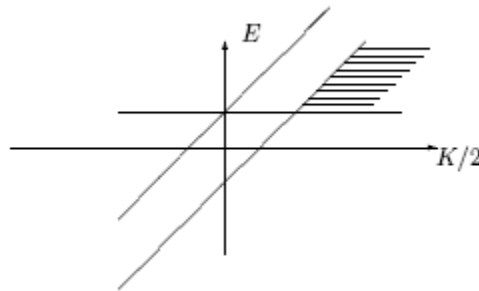


Рисунок 1. – Две положительные точки поворота

При этом значение $p^2(r = \infty)$ следующее:

$$p^2(r = \infty) = \left(E - \frac{K}{2} - 1 \right) \left(E - \frac{K}{2} + 1 \right) > 0. \quad (7)$$

Другими словами, имеем квантово-механическую систему с возможностью туннельного эффекта. Типичный график функции $p^2(r)$ показан на рисунке 2 (пусть $K = 8$, $E = 2$ – это согласуется с (6)). Поведение кривой обобщенного импульса говорит, что здесь с точки зрения квантовой механики реализуется ситуация возможного туннельного эффекта.

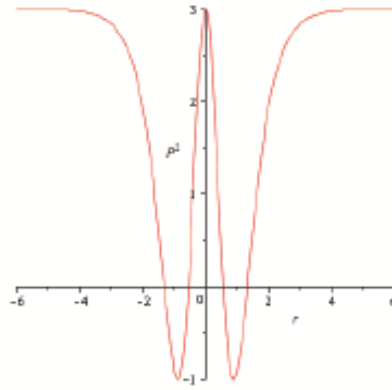


Рисунок 2. – График кривой $p^2(r)$, физическая область $r > 0$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3) с точки зрения принадлежности его к известному классу уравнений. Для этого вводим новую переменную

$$z = \tanh^2 r, \quad \frac{dz}{dr} = 2 \tanh r \frac{1}{\cosh^2 r} = 2\sqrt{z}(1-z), \quad \frac{d}{dr} = 2\sqrt{z}(1-z) \frac{d}{dz},$$

$$\left(4\sqrt{z}(1-z) \frac{d}{dz} \sqrt{z}(1-z) \frac{d}{dz} + E^2 - 1 - EKz + z^2 \frac{K^2}{4} \right) F = 0;$$

в результате получаем уравнение

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} \right) \frac{dF}{dz} + \left(\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{(z-1)^2} \right) F = 0,$$

$$\alpha = \frac{E^2 - 1}{4}, \quad \beta = \frac{K^2/4}{4} - \frac{E^2 - 1}{4}, \quad \gamma = \frac{-1 + (E - K/2)^2}{4}. \quad (8)$$

С использованием подстановки $F(z) = z^A (z-1)^B f(z)$ уравнение (8) принимает вид:

$$f'' + \left(\frac{2A+1/2}{z} + \frac{2B+1}{z-1} \right) f' + \left(\frac{A(A-1/2)}{z^2} + \frac{B^2 + \gamma}{(z-1)^2} + \frac{\alpha - 2AB - B/2 - A}{z} + \frac{\beta + 2AB + B/2 + A}{z-1} \right) f = 0. \quad (9)$$

При A и B , выбранных согласно (обращаем внимание, что под корнем стоят положительные параметры – см. (6))

$$A = 0, \frac{1}{2}, \quad B = \pm \sqrt{-\gamma} = \pm \frac{\sqrt{1 - (E - K/2)^2}}{2}, \quad (10)$$

уравнение (9) упрощается

$$f'' + \left(\frac{2A+1/2}{z} + \frac{2B+1}{z-1} \right) f' + \left(\frac{\alpha - 2AB - B/2 - A}{z} + \frac{\beta + 2AB + B/2 + A}{z-1} \right) f = 0 \quad (11)$$

и является вырожденным уравнением Гойна [1; 2]

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left(-t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} \right) \frac{dH}{dz} + \frac{\lambda - az}{z(z-1)} H = 0 \quad (12)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} t &= 0, & c &= 2A + 1/2, & d &= 2B + 1, \\ a &= -(\alpha + \beta), & \lambda &= 2AB + A + B/2 - \alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что уравнение (8) определяет квадрат обобщенного импульса

$$p^2(z) = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} + \frac{\gamma}{(z-1)^2} \quad (14)$$

со следующим поведением около особых точек:

$$\begin{aligned} z \rightarrow 0 \ (r \rightarrow 0), & \quad p^2 \sim \frac{E^2 - 1}{z} \rightarrow +\infty \ (E^2 > 1); \\ z \rightarrow 1 \ (r \rightarrow \infty), & \quad p^2 \sim \frac{\gamma}{(z-1)^2} = \frac{[(E - \frac{K}{2})^2 - 1]}{4(1-z)^2} \rightarrow +\infty \ \left(\left(E - \frac{K}{2} \right)^2 > 1 \right) \end{aligned}$$

Исследуем поведение кривой для (эффективного) квадрата обобщенного импульса

$$p^2(z) = \frac{(E - Kz/2)^2 - 1}{4z(1-z)^2}. \quad (15)$$

Точки поворота – решения уравнения $p^2(z) = 0$ – задаются равенствами

$$z_1 = \frac{2(E-1)}{K}, \quad z_2 = \frac{2(E+1)}{K}. \quad (16)$$

Отмечаем, что два положительных корня могут возникнуть только при $E > 1$ – это согласуется с тем, что уровни энергии в нерелятивистском приближении положительные.

Найдем условия того, что точки поворота лежат в физической области переменной y :

$$y_1 = \frac{2(E-1)}{K} < 1 \Rightarrow (E-1) < \frac{K}{2}, \quad y_2 = \frac{2(E+1)}{K} < 1 \Rightarrow (E+1) < \frac{K}{2}.$$

На рисунке 3 приведен типичный график квадрата обобщенного импульса.

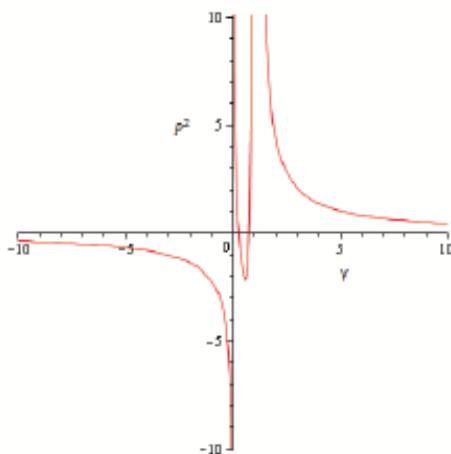


Рисунок 3. – График функции $p^2(r)$, $K=8$, $E=2$

Релятивистская частица в поле осциллятора в пространстве Минковского

Для сравнения рассмотрим аналогичную задачу в плоском пространстве. В безразмерных единицах ее можно описать уравнением

$$p^2 = \left(E - \frac{Kr^2}{2}\right)^2 - 1. \quad (17)$$

Соответствующий полином 4-й степени раскладывается на множители

$$p^2 = \left(E - \frac{Kr^2}{2} - 1\right) \left(E - \frac{Kr^2}{2} + 1\right).$$

Будем исследовать область $E > 1$ (так как в нерелятивистском пределе уровни энергии положительные). Точки поворота обозначим как

$$r_1 = \sqrt{\frac{E-1}{K/2}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{E+1}{K/2}}, \quad r'_1 = -\sqrt{\frac{E-1}{K/2}}, \quad r'_2 = -\sqrt{\frac{E+1}{K/2}}, \quad (18)$$

$$p^2 = \frac{K^2}{4} (r - r_1)(r - r_2)(r - r'_1)(r - r'_2).$$

Опишем точки локального экстремума (см. рисунок 4):

$$\frac{d}{dr} p^2 = 2 \left(E - \frac{Kr^2}{2}\right) (-Kr) = 0, \quad r_{extr} = 0, \pm \sqrt{\frac{2E}{K}}.$$

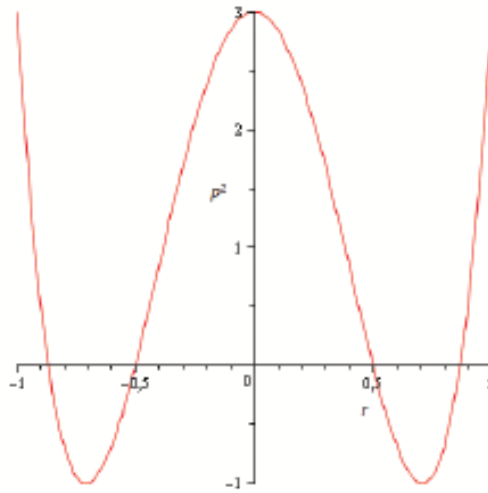


Рисунок 4. – Кривая $p^2(r)$ в плоском пространстве

Здесь мы также имеем квантово-механическую систему с квазистационарными состояниями и возможностью туннельного эффекта. Выясним принадлежность этого уравнения к известным классам. Уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon - \frac{kr^2}{2}\right)^2 - M^2 \right) F_2 = 0$$

в переменной $y = r^2$ примет вид:

$$\left(4y \frac{d^2}{dy^2} + 2 \frac{d}{dy} + \varepsilon^2 - M^2 - \varepsilon ky + \frac{k^2 y^2}{4} \right) F_2 = 0. \quad (19)$$

Пусть для простоты $k=1$ (в общем случае замена переменной и решение выглядят сложнее). Сделаем замену переменной $y = 3^{-1/3} ir$:

$$\frac{d^2 F_2}{dy^2} - 3^{2/3} \left[\left(\varepsilon + \frac{3^{2/3} y^2}{2} \right)^2 - M^2 \right] F_2 = 0. \quad (20)$$

Ищем решение в виде:

$$F_2(y) = e^{Ay} e^{By^3} f(y), \quad \frac{d^2 f}{dy^2} - (-2A - 6By^2) \frac{df}{dy} + \left[A^2 - 3^{2/3} \varepsilon^2 + 3^{2/3} M^2 + (6AB - 3^{4/3} \varepsilon) y^2 + 6By + \left(-\frac{9}{4} + 9B^2 \right) y^4 \right] f = 0.$$

При A, B , выбранных согласно $A = -3^{1/3} \varepsilon$, $B = -\frac{1}{2}$, уравнение упрощается

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - (3y^2 + 2 \cdot 3^{1/3} \varepsilon) \frac{df}{dy} - [3y - 3^{2/3} M^2] f = 0 \quad (21)$$

и является уравнением для трижды вырожденной функции Гойна $H(\alpha, \beta, \gamma; z)$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - (3z^2 + \gamma) \frac{dH}{dz} - [(3 - \beta)z - \alpha] H = 0$$

с параметрами

$$\alpha = 3^{2/3} M^2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2 \cdot 3^{1/3} \varepsilon; \quad (22)$$

при других значениях $k \neq 1$ также будем иметь равенство $\beta = 0$.

Можно проследить за переходом от релятивистского описания к нерелятивистскому. Ограничимся случаем плоского пространства. Релятивистский обобщенный импульс в квадрате равен

$$\begin{aligned} p^2 &= \left(\varepsilon - \frac{Kr^2}{2} \right)^2 - M^2 = \left[M + E - \frac{Kr^2}{2} \right]^2 - M^2 = \\ &= 2M \left(E - \frac{Kr^2}{2} \right) + 2M \left(E - \frac{Kr^2}{2} \right) \frac{(E - \frac{Kr^2}{2})}{2M}. \end{aligned} \quad (23)$$

Нерелятивистская величина квадрата импульса равна

$$p_0^2 = 2M \left(E - \frac{Kr^2}{2} \right).$$

Чтобы две величины мало различались около $r = 0$, необходимо требовать

$$2ME + 2ME \frac{E}{2M} \approx 2ME \quad \Rightarrow \quad E \ll 2M. \quad (24)$$

Чтобы две величины мало различались при других значениях переменной r , нужно предполагать (учитываем и предыдущее неравенство)

$$\frac{(E - \frac{Kr^2}{2})}{2M} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 \ll \frac{4M}{K}. \quad (25)$$

Конфлюэнтное уравнение Гойна

Исходим из канонической формы уравнения

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left(-t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} \right) \frac{dH}{dz} + \frac{-az + \lambda}{z(z-1)} H = 0. \quad (26)$$

Точки $z = 0, 1$ – регулярные особенности. Точка $z = \infty$ – иррегулярная особенность, ее ранг равен $R(z = \infty) = 2$.

Построим основной степенной ряд в окрестности точки $z=0$. Для этого запишем уравнение в виде:

$$(z^2 - z) \frac{d^2 H}{dz^2} + [-t z^2 + (t + d + c) z - c] \frac{dH}{dz} + (\lambda - a z) H = 0. \quad (27)$$

При построении решений в виде степенного ряда в уравнении возникнут следующие степени переменной z : z^{k+1}, z^k, z^{k-1} ; т. е. возникнут 3-членные рекуррентные соотношения. Найдем их. Для этого учтем равенства:

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad H' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k z^{k-1}, \quad H'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k z^{k-2};$$

тогда уравнение для H дает

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n d_{n+1} z^n - \\ & - t \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} z^n + (t + d + c) \sum_{n=1}^{\infty} n d_n z^n - c \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} z^n + \\ & + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n - a \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} z^n = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях переменной z , получаем трех-членные рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} n=0, \quad & c d_1 + \lambda d_0 = 0, \\ n=1, \quad & -a d_0 + (t + c + d + \lambda) - 2(1+c) d_2 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ [t(n-1) + a] d_{n-1} - [n(n-1+t+d+c) + \lambda] d_n + (n+1)(n+c) d_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что случай $n=1$ уже описывается общей рекуррентной формулой. Таким образом, основной ряд конфлюэнтного уравнения Гойна определяется рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} & c d_1 + \lambda d_0 = 0, \\ & -a d_0 + (t + c + d + \lambda) - 2(1+c) d_2 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & P_n d_n - (Q_n + \lambda) d_{n+1} + R_n d_{n+2} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$P_n = t(n-1+a), \quad Q_n = n(n-1+t+d+c), \quad R_n = (n+1)(n+c). \quad (29)$$

Рекуррентное соотношение переписывается в форме:

$$\frac{1}{n^2} P_n - \frac{1}{n^2} (Q_n + \lambda) \frac{d_{n+1}}{d_n} + \frac{1}{n^2} R_n \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 0;$$

отсюда при устремлении $n \rightarrow \infty$, получаем квадратичное уравнение

$$-r + r^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = r.$$

Отсюда заключаем, что согласно методу Пуанкаре–Перрона (гарантированный) радиус сходимости степенного ряда равен $R_{conv} = 1$. Существует возможность обрывания ряда до полинома. Пусть

$$P_{n+1} = 0, \quad a = -n, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (30)$$

Тогда, если λ выбран так, что $d_{n+1} = 0$, то из рекуррентных соотношений получаем

$$0 \cdot d_n - (Q_{n+1} + \lambda) \cdot 0 + R_{n+1} d_{n+2} = 0 \Rightarrow d_{n+2} = 0;$$

следовательно, все последующие коэффициенты при степенях ряда обращаются в ноль, т.е. ряд превращается в полином степени n . Если ограничиться только наложением требования $a = -n$, не добавляя условия $d_{n+1} = 0$, получим (неполиномиальные) трансцендентные конфлюэнтные функции Гойна. Можно убедиться, что второе условие $d_{n+1} = 0$ эквивалентно полиномиальному уравнению степени $(n+1)$ относительно параметра λ . Действительно,

$$\begin{aligned} n=0, \quad c d_1 - \lambda d_0 &= 0, \\ P_1 d_0 - (Q_1 + \lambda) d_1 + R_1 d_2 &= 0, \\ P_2 d_1 - (Q_2 + \lambda) d_2 + R_2 d_3 &= 0, \\ P_3 d_2 - (Q_3 + \lambda) d_3 + R_3 d_4 &= 0, \\ P_4 d_3 - (Q_4 + \lambda) d_4 + R_4 d_5 &= 0, \\ &\dots \\ P_n d_{n-1} - (Q_n + \lambda) d_n + R_n d_{n+1} &= 0, \\ P_{n+1} d_n - (Q_{n+1} + \lambda) d_{n+1} + R_{n+1} d_{n+2} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть $a = -n$, $P_{n+1} = 0$, пусть дополнительно $d_{n+1} = 0 \Rightarrow d_{n+2} = 0$. Это обеспечивает обрывание ряда до полинома степени n . Возникающую систему уравнений можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -\lambda & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ P_1 & -(Q_1 + \lambda) & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & P_2 & -(Q_2 + \lambda) & R_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & P_3 & -(Q_3 + \lambda) & R_3 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & -(Q_4 + \lambda) & R_4 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-2} & -(Q_{n-2} + \lambda) & R_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-1} & -(Q_{n-1} + \lambda) & R_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_n & -(Q_n + \lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \cdot \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = 0. \quad (32)$$

Условие существования нетривиальных решений у линейной однородной системы имеет вид равенства нулю ее определителя, что дает алгебраическое уравнение степени $(n+1)$ относительно параметра λ .

Триконфлюэнтное уравнение Гойна

Исходим из канонической формы триконфлюэнтного уравнения Гойна [3]:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + (-z^2 - t) \frac{dH}{dz} + (\lambda - az)H = 0. \quad (33)$$

Здесь имеем единственную особую точку $z = \infty$. Пусть $z = y^{-1}$, тогда

$$\frac{d^2 H}{dy^2} + \left(\frac{1}{y^4} + \frac{t}{y^2} + \frac{2}{y} \right) \frac{dH}{dy} + \left(\frac{\lambda}{y^4} - \frac{a}{y^5} \right) H = 0. \quad (34)$$

Ранг этой сингулярности равен

$$R(z = \infty) = \max \left\{ 4, \frac{5}{2} \right\} = 4.$$

Делаем подстановку

$$H(y) = y^A \exp^{[By^{-1} + Cy^{-2} + Dy^{-3}]} f(y). \quad (35)$$

Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} y^5 \frac{d^2 f}{dy^2} + \left[2(A+1)y^4 + (t-2B)y^3 - 4Cy^2 + (1-6D)y \right] \frac{df}{dy} + \\ + \left[A(A+1)y^3 + A(t-2B)y^2 + (-4AC + B^2 - tB + 2C + \lambda)y + \right. \\ \left. + (-6AD + 4BC - 2tC + A + 6D - a) + \right. \\ \left. + \frac{6BD + 4C^2 - 3Dt - B}{y} + \frac{2C(6D-1)}{y^2} + \frac{3D(3D-1)}{y^3} \right] f = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Занулим коэффициенты при $y^{-3}, y^{-2}, y^{-1}, y^0$:

$$\begin{aligned} D(3D-1) &= 0, \quad C(6D-1) = 0, \\ 6BD + 4C^2 - 3Dt - B &= 0, \\ -6AD + 4BC - 2tC + A + 6D - a &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следуют два решения:

$$1) C_1 = 0, \quad D_1 = 0, \quad 2) C_2 = 0, \quad D_2 = 1/3.$$

Третье уравнение дает $B_1 = 0, B_2 = t$; четвертое уравнение дает $A_1 = a, A_2 = 2 - a$.

Таким образом, находим два решения:

$$1) A = a, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad H(y) = y^a f(y); \quad (37)$$

$$2) A = 2 - a, \quad B = t, \quad C = 0, \quad D = 1/3,$$

$$H(y) = y^{2-a} \exp^{[ty^{-1} + \frac{1}{3}y^{-3}]} f(y). \quad (38)$$

При этом уравнение для $f(y)$ упрощается и принимает соответственно вид:

$$1) y^4 f'' + [2(a+1)y^3 + ty^2 + 1] f' + [a(a+1)y^2 + aty + \lambda] f = 0; \quad (39)$$

$$2) y^4 f'' + [2(3-a)y^3 - ty^2 - 1] f' + [(2-a)(3-a)y^2 - t(2-a)y + \lambda] f = 0. \quad (40)$$

Если раскладывать функцию $f(y)$ в степенной ряд, то в уравнениях (39) и (40) возникнут степени

$$y^{n+2}, \quad y^{n+1}, \quad y^n, \quad y^{n-1},$$

что приведет к 4-членным рекуррентным соотношениям. Получим эти соотношения.

Для сокращения записи и большей общности рассмотрим уравнение со структурой (обращаем внимание, что в уравнениях (39) и (40) параметр $\gamma = 0$):

$$y^4 f'' + (\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta) f' + (\mu y^2 + \sigma y + \lambda) f = 0.$$

Ищем решение в виде ряда:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^k, \quad f' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k y^{k-1}, \quad f'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k y^{k-2};$$

в результате получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3) d_{n-2} y^n + \\ & + \alpha \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) d_{n-2} y^n + \beta \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} y^n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n d_n y^n + \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} y^n + \\ & + \mu \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} y^n + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} y^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n = 0. \end{aligned}$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при всех степенях:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3) d_{n-2} + \\ & + \alpha \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) d_{n-2} + \beta \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n d_n + \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} + \\ & + \mu \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n = 0, \end{aligned}$$

далее находим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} n=0, \quad & \lambda d_0 + \delta d_1 = 0, \\ n=1, \quad & \sigma d_0 + (\gamma + \lambda) d_1 + 2\delta d_2 = 0, \\ n=2, \quad & \mu d_0 + (\beta + \sigma) d_1 + (2\gamma + \lambda) d_2 + 3\delta d_3 = 0, \\ n=3, \quad & (\alpha + \mu) d_1 + (2\beta + \sigma) d_2 + (3\gamma + \lambda) d_3 + 4\delta d_4 = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

т.е.

$$\begin{aligned} n \geq 2, \quad & [(n-2)(n-3) + \alpha(n-2) + \mu] d_{n-2} + \\ & + [\beta(n-1) + \sigma] d_{n-1} + (\gamma n + \lambda) d_n + \delta(n+1) d_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

При $n \rightarrow \infty$ рекуррентное соотношение дает

$$R^3 = 0, \quad R^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} \frac{d_{n-1}}{d_n} \frac{d_n}{d_{n+1}}.$$

Это означает, что радиус сходимости степенного ряда равен бесконечности.

Таким образом, в окрестности точки $z = \infty$ строятся два линейно независимых решения ($i = 1, 2$):

$$H_i(z) = \frac{1}{z^A} \exp^{(Bz + Cz^2 + Dz^3)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_k}{z^n}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = a, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad D_1 = 0; \\ A_2 = 2-a, \quad B_2 = t, \quad C_2 = 0, \quad D_2 = 1/3. \end{aligned} \quad (44)$$

Эти ряды сходятся везде, кроме точки $z = 0$.

Заклучение

На основе использования уравнения Клейна – Фока – Гордона выполнено аналитическое исследование релятивистской квантово-механической задачи о частице (со спином ноль) в поле осциллятора на фоне плоского пространства Минковского. Задача сведена к трижды вырожденному уравнению Гойна с одной иррегулярной особой точкой ранга 4 в $z = \infty$. Приведены основные свойства локальных решений в окрестности этой особой точки, описаны 34-членные рекуррентные соотношения для возникающих степенных рядов. Качественный анализ показал, что у этой системы могут быть только квазистационарные состояния с возможностью туннелирования частицы через потенциальный барьер. Аналогичный анализ выполнен в случае использования геометрии гиперболического пространства Лобачевского. В этой системе также возможны только квазистационарные связанные состояния, ее аналитическое описание сводится к вырожденному уравнению Гойна с двумя регулярными и одной иррегулярной ранга 2 особенностями. Выполненный анализ распространен также на случай сферической геометрии Римана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ronveaux, A. Heun's Differential Equations / A. Ronveaux. – Oxford : Oxford Univ. Press, 1995.
2. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford : Oxford Univ. Press, 2000.
3. Квантовая механика в космологических моделях де Ситтера / О. В. Веко [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2015. – 560 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.09.2015

Ovsiyuk E.M., Red'ko A.N., Red'kov V.M. Relativistic Scalar Particle in Oscillator Field, Studying in Terms of Heun Functions

On the basis of the Klein – Gordon – Fock equation performed analytical study of relativistic quantum-mechanical problem of a particle (with spin zero) in the oscillator on a background of flat Minkowski space. The problem is reduced to triply degenerate Heun equation with one irregular singular point of rank 4 in $z = \infty$. Shows the basic properties of local solutions in a neighborhood of this singular point, described 34-membered recurrence relations for the emerging power series. Qualitative analysis showed that this system can only be quasi-stationary states of the particle with the ability of tunneling through the potential barrier. A similar analysis was done in the case of the hyperbolic geometry of Lobachevsky space. In this system also possible only quasi-stationary bound states, its analytical description is reduced to degenerate Heun equation with two regular and one irregular rank 2 singularities.