УДК 517.927.21, 517.518.82

С.А. Марзан

канд. физ.-мат. наук, доцент, первый проректор
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Разработан алгоритм приближенного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 1$, основанный на применении модифицированного апроксимационно-итеративного метода В.К. Дзядыка и позволяющий без применения операции интегрирования получить почти такие же результаты, какие дает метод последовательных приближений. С использованием свойств дробных интегралов и производных Римана – Лиувилля в пространстве непрерывных функций получена оценка точного и приближенного решений рассматриваемой задачи.

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ - дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{1}$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \tag{2}$$

($[\mathrm{Re}(\alpha)]$ - целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4]. Обозначим через ${}^{c}D_{a+}^{\alpha}y$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right]\right)(x) \ (\alpha \in C,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0), \tag{3}$$

$n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N = \{1,2,\ldots\}$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$.

Если $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \le n$ $(n \in N)$ и $y(x) \in C^n[a,b]$ – функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$, то при $\alpha \in N$ производная ${}^{c}D_{a+}^{\alpha}y$ совпадает с обычной производной:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D^n y\right)(x) \quad \left(n \in N; D = \frac{d}{dx}\right),$$

а при $n-1 < \alpha < n$ оператор ${}^{c}D_{a+}^{\alpha}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I_{a+}^{n-\alpha}$ и оператора дифференцирования D^n:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha}D^n y\right)(x)\left(n-1 < \alpha < n, n \in N;\ D = \frac{d}{dx}\right). \tag{4}$$

Конструкция (4) введена итальянским механиком Капуто [2] в связи с решением задач вискоэластичности [2; 3], и поэтому выражения (3) и (4) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in C$.

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами (исторические сведения и обзор методов и результатов в [1, §§ 42–43] и обзорной статье [4]). Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук [5; 6].

Настоящая работа посвящена приближенному решению задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 1$:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = f[x,y],\ y^{(j)}(a) = b_j,\ b_j \in C\ \ (j = 0,1,\ldots,n-1), \tag{5}$$

где $n = [\alpha]+1$ при $\alpha \notin N$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$, посредством приближенного решения равносильного ей [7] интегрального уравнения Вольтерра

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt. \tag{6}$$

Положив

$$y_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j,$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y_{m-1}(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\ \ (m = 1,2,...) \tag{7}$$

и используя метод последовательных приближений, можно показать, что если функция $f[x,y]:[a,b]\times R \to R$ удовлетворяет условию липшицевости относительно второй переменной

$$\left|f[x,y] - f[x,y_1]\right| \le L\left|y - y_1\right|, \tag{8}$$

а также условиям

$$\max_{(x,y)\in[a,b]\times\overline{R}} \left|f[x,y]\right| = M < \infty,\ L\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{9}$$

то каждая из функций $y_m(x)$ $(m = 0,1,\ldots)$, определяемая равенством (7), приближает решение $y(x)$ задачи Коши (5) так, что имеет место неравенство

$$\left|y(x) - y_m(x)\right| \le \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{m+1} \frac{ML^m}{1 - L\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}}. \tag{10}$$

Неравенство (10) показывает, что функции $y_m(x)$ достаточно быстро сходятся к искомому решению $y(x)$ задачи Коши (5). Вместе с тем из-за содержащейся в процессе вычисления функций $y_m(x)$ операции интегрирования итеративный процесс (7) на практике, как правило, очень трудно использовать для эффективного построения функций $y_m(x)$. В настоящей работе будет изложен алгоритм, построенный на основании апроксимационно-итеративного метода В.К. Дзядыка [8, с. 98–120], который позволит, в частности, без применения операции интегрирования, получить почти такие же результаты, какие дает метод последовательных приближений.

Представим уравнение (6) в виде

$$y(x) = g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt\ \ \ (\alpha > 1), \tag{11}$$

где

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j,$$

$$K(x,t)=(x-t)^{\alpha-1}.$$

Далее будем использовать стандартные интерполяционные многочлены Лагранжа $L_n(f;x)$, полученные в результате отображения с отрезка $[-1,1]$ на отрезок $[a,b]$ стандартного интерполяционного многочлена $L_n^*(f;x)$, построенного по узлам

$$\xi_j^{(l)}=-\cos\frac{j\pi}{l}\quad (j=0,...,l;\, l\in N),$$

[9, с. 399]. Это отображение осуществляется формулой

$$t=a+\frac{(b-a)(1+\xi)}{2},$$

и поэтому $L_n(f;x)$ – интерполяционный многочлен, построенный по узлам

$$t_j^{(l)}=a+\frac{(b-a)(1+\xi_j^{(l)})}{2}\quad (j=0,...,l). \tag{12}$$

Известно, что имеет место соотношение [8, с. 111]

$$\|L_n\|=\|L_n^*\|. \tag{13}$$

Поскольку узлы $\xi_j^{(l)}=-\cos\dfrac{j\pi}{l}$ $(j=0,...,l)$ служат корнями многочлена

$$\overset{0}{U}_{l+1}(x)=(1-x^2)U_{l-1}(x)=\sqrt{1-x^2}\,\sin l\arccos x,$$

где $U_{l-1}(x)$ – полином Чебышева 2-го рода степени $l-1$ [8, (I.1.27)], то фундаментальные многочлены $l_j^{*(l)}(\xi)$ могут быть представлены по формуле [8, (I.3.20)]

$$l_j^{*(l)}(\xi)=l_j^{*(l)}(l;\xi)=\frac{\overset{0}{U}_{l+1}(\xi)}{(\xi-\xi_j^{(l)})\overset{0}{U}{}'_{l+1}(\xi_j^{(l)})}=$$

$$=\frac{\varepsilon_j}{l}\left[1-(-1)^{l-j}T_l(\xi)+2\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu}\frac{\cos j\nu\pi}{l}T_{\nu}(\xi)\right], \tag{14}$$

где $\varepsilon_0=\varepsilon_l=\dfrac{1}{2}$ и $\varepsilon_j=1$ для любого $j=1,2,\ldots l-1$ и $T_{\nu}(\xi)$ – полином Чебышева первого рода.

Отправляясь от этих фундаментальных многочленов, построим при фиксированных натуральных l и m, матрицу чисел

$$a_{ij}^{(l,m)}=\int_{-1}^{\xi_i^{(l)}} l_j^{*(l)}(\xi)d\xi\quad (i=0,...,l;\ j=0,...,m),$$

явные выражения для которых будут получены ниже.

Обозначим через A интегральный оператор в правой части уравнения (11):

$$(Ay)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt. \tag{15}$$

Будем считать, что $K(x,t)\equiv 0$ при $x\le t$, и определим оператор (интерполяционный многочлен) $\widetilde{A}$ формулой

$$\left(\widetilde{A}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_{a}^{t_i^{(l)}}\sum_{j=0}^{m}f\left[t_j^{(m)},y\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(t_i^{(l)},t_j^{(m)}\right)l_j^{(m)}dt\cdot l_i^{(l)}(x). \tag{16}$$

Здесь узлы $t_i^{(l)}$ и $t_j^{(m)}$ определяются по формуле (12), а $l_i^{(l)}(x)$ и $l_i^{(m)}(x)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам $t_i^{(l)}$ и $t_i^{(m)}$ соответственно.

Построим при помощи итерационного процесса по v функции $\widetilde{y}_v(x)$ вида

$$\widetilde{y}_0=g(x),\ \widetilde{y}_v=g(x)+\widetilde{A}\widetilde{y}_{v-1},\quad v=1,2,... \tag{17}$$

Лемма 1. *Функции $\widetilde{y}_v(x)$ являются алгебраическими многочленами вида*

$$\widetilde{y}_0(x)=g(x),\ \widetilde{y}_v(x)=g(x)+\frac{b-a}{2\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}^{(l,m)}f\left[t_j^{(m)},\widetilde{y}_{v-1}\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(x_i^{(l)},t_j^{(m)}\right)l_i^{(l)}(x), \tag{18}$$

где $l_i^{(l)}$, $l_j^{(m)}$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам $t_i^{(l)}$ и $t_i^{(m)}$ соответственно.

Доказательство. При $v=0$ утверждение леммы вытекает из (17) и (13).

Осуществляя замену

$$t=a+\frac{b-a}{2}(\xi+1)$$

и введя обозначение $l_j^{(m)}(t):=l_j^{*(m)}\left[-1+\frac{2}{b-a}(t-a)\right]$, имеем:

$$\int_{a}^{t_i^{(l)}}l_j^{(m)}(t)dt=\int_{a}^{t_i^{(l)}}l_j^{*(m)}\left[-1+\frac{2}{b-a}(t-a)\right]dt=$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\xi_i^{(l)}}l_j^{*(m)}(\xi)d\xi=\frac{b-a}{2}a_{ij}^{(l,m)},\quad i=0,...,l,\ j=0,...,m. \tag{19}$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение устанавливает явный вид чисел $a_{ij}^{(l,m)}$.

Лемма 2. *Пусть $l,m\in N$, $i=0,\dots,l$, $j=0,\dots,m$. Тогда*

$$a_{ij}^{(l,m)}=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{1-C_i^{(l)}+\frac{1}{2}C_j^{(m)}\left(1-C_{2i}^{(l)}\right)+\sum_{v=2}^{m}\varepsilon_v C_{jv}^{(m)}\left[\frac{C_{(v-1)i}^{(l)}}{v-1}-\frac{C_{(v+1)i}^{(l)}}{v+1}-\frac{2}{v^2-1}\right]\right\},$$

где $\varepsilon_0=\varepsilon_m=\frac{1}{2}$, $\varepsilon_v=1$ при $v=1,\dots,m-1$ и $C_k^{(s)}=\cos\frac{k\pi}{s}$.

Доказательство. Учитывая (18) и тот факт, что при каждом $v=2,3,\dots$ имеет место равенство [8, с. 105]

$$\int_{0}^{x}T_v(\xi)d\xi=\int_{\arccos x}^{\frac{\pi}{2}}\cos vs\sin s ds=\frac{1}{2}\left\{\frac{T_{v+1}(x)}{v+1}-\frac{T_{v-1}(x)}{v-1}\right\}+c_v,\ c_v=const,$$

получаем:

$$a_{ij}^{(l,m)}=\int_{-1}^{\xi_i^{(l)}}l_j^{*(m)}(\xi)d\xi=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{\xi-\xi^2\cos\frac{j\pi}{m}+\sum_{v=2}^{m}(-1)^v\frac{\cos j\pi v}{m}\left(\frac{T_{v+1}(\xi)}{v+1}-\frac{T_{v-1}(\xi)}{v-1}\right)-\right.$$

$$-\frac{(-1)^{m-j}}{2}\left[\frac{T_{m+1}(\xi)}{m+1}-\frac{T_{m-1}(\xi)}{m-1}\right]\Bigg\}\Bigg|_{-1}^{\xi_i^{(l)}}=\left\{1-\cos\frac{i\pi}{l}-\cos\frac{j\pi}{m}\left(\cos^2\frac{i\pi}{l}-1\right)+\right.$$

$$+\sum_{v=2}^{m}(-1)^v\frac{\cos jv\pi}{m}\left[\frac{\cos\left[(v+1)\left(1-\frac{i}{\pi}\right)\pi\right]}{v+1}-\frac{\cos\left[(v-1)\left(1-\frac{i}{\pi}\right)\pi\right]}{v-1}-\right.$$

$$\left.-(-1)^{v+1}\left(\frac{1}{v+1}-\frac{1}{v-1}\right)\right]-\frac{(-1)^{m-j}}{2}\left[\frac{\cos\left[(m+1)\left(1-\frac{i}{l}\right)\pi\right]}{m+1}-\frac{\cos\left[(m-1)\left(1-\frac{i}{l}\right)\pi\right]}{m-1}+\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^m\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m-1}\right)\right]\right\}=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{1-\cos\frac{i\pi}{l}-\cos\frac{j\pi}{m}\left(\cos^2\frac{i\pi}{l}-1\right)-\right.$$

$$-\sum_{v=2}^{m}\cos\frac{jv\pi}{m}\left[\frac{\cos\frac{(v+1)i\pi}{l}}{v+1}-\frac{\cos\frac{(v-1)i\pi}{l}}{v-1}+\frac{2}{v^2-1}\right]-\frac{(-1)^j}{2}\left[\frac{\cos\frac{(m-1)i\pi}{l}}{m-1}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos\frac{(m+1)i\pi}{l}}{m+1}-\frac{2}{m^2-1}\right]\right\}=\frac{\varepsilon_j}{m}\left\{1-\cos\frac{i\pi}{l}-\frac{1}{2}\cos\frac{j\pi}{m}\left(1-\cos\frac{2i\pi}{l}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{v=2}^{m}\varepsilon_v\cos\frac{j\pi v}{m}\left[\frac{\cos\frac{(v-1)i\pi}{l}}{v-1}-\frac{\cos\frac{(v+1)i\pi}{l}}{v+1}-\frac{2}{v^2-1}\right]\right\}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $W^r = W^r C[a,b]$ $(r>1)$ класс функций $F(x)$, заданных на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси R и представимых интегралом

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^x (x-t)^{r-1}h(t)dt,\ \max_{a\le x\le b}|h(t)|=\mu<\infty\,. \tag{20}$$

Оценим модуль непрерывности функции $F(x)\in W^r$.

$$|F(x+\delta)-F(x)|=\frac{1}{\Gamma(r)}\left|\int_a^{a+\delta}\frac{h(t)dt}{(x+\delta-t)^{1-r}}-\int_a^x\frac{h(t)dt}{(x-t)^{1-r}}\right|\le$$

$$\le\frac{\|h(t)\|_C}{\Gamma(r)}\left(\int_a^x\left|(x+\delta-t)^{r-1}-(x-t)^{r-1}\right|dt+\int_x^{x+\delta}(x+\delta-t)^{r-1}dt\right)\le$$

$$\le\frac{\mu}{\Gamma(r)}\left(\delta(b-a+\delta)^{r-1}\right). \tag{21}$$

В силу неравенства Лебега для интерполяционных операторов, прямой теоремы Джексона для алгебраических многочленов [10], с учетом неравенства (21) получим:

$$\sup_{F\in W^r}\left|F(x)-L_m(F;x)\right|\le\frac{\mu(\ln m+\pi)(b-a)^r}{\Gamma(r)(m+1)}\left(1+\frac{\pi}{2(m+1)}\right)^{r-1}, \tag{22}$$

где $L_m(F;x)$ – интерполяционный полином Лагранжа функции $F(x)$, построенный по узлам (12).

Для $\alpha>1$, $r>1$ и $l,m\in N$ обозначим:

$$\delta_{lm}=S(l,\alpha)+\left(\frac{2}{\pi}\ln l+1\right)S(m,r), \tag{23}$$

$$S(m,r)=\frac{r(\ln m+\pi)}{m+1}\left(1+\frac{\pi}{2(m+1)}\right)^{r-1}. \tag{24}$$

Теорема. Пусть $\alpha>1$, $K_H=\{y\in R,|y|<H\}$ $(H>0)$, функция $f[t,y]:[a,b]\times K_H\to R$ удовлетворяет условиям (8), (9) и такая, что при любых фиксированных $x\in[a,b]$, $y\in K_H$ и некоторых $r>1$, $\mu>0$

$$f[t,y](x-t)^{\alpha-1}\in W^rC[a,b]. \tag{25}$$

Пусть

$$q=\frac{L(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}<1, \tag{26}$$

где L определяется условием (8), и для некоторого $\varepsilon>0$

$$\max\left\{\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(1+\varepsilon),\frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\right\}\le H, \tag{27}$$

где M определяется условием (9).

Последовательность многочленов $\tilde{y}_\nu(x)$, определяемых условием (18), приближает решение $y(x)$ задачи Коши (5) таким образом, что при всех натуральных l и m, таких, что $\delta_{mn}<\varepsilon$, выполняется неравенство:

$$\left\|y(x)-\tilde{y}_\nu(x)\right\|_C\le D\frac{q^\nu+\delta_{lm}(1-q^\nu)}{1-q},$$

где

$$D=\max\left\{\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)};\frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $C_H[a,b]=\{y(x)\in C[a,b],\|y(x)\|_C\le H\}$. В силу (15) и (16) для любой функции $y(x)\in C_H[a,b]$ имеем:

$$\left|(Ay)(x)-(\tilde{A}y)(x)\right|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt-\right.$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_{a}^{t_i^{(l)}}\sum_{j=0}^{m} f\left[t_j^{(m)}, y\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}\right)l_j^{(m)}(t)dt\cdot l_i^{(l)}(x)\Bigg| \le$$

$$\le\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y(t)]K(x,t)dt-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_a^{t_i^{(l)}} f[t,y(t)]K\left(t_i^l,t\right)dt\cdot l_i^{(l)}(x)\right|+$$

$$+\Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_a^{t_i^{(l)}} f[t,y(t)]K\left(t_i^{(l)},t\right)dt\cdot l_i^{(l)}(x)-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{l}\int_{a}^{t_i^{(l)}}\sum_{j=0}^{m} f\left[t_j^{(m)}, y\left(t_j^{(m)}\right)\right]K\left(t_i^{(l)}, t_j^{(m)}\right)l_j^{(m)}(t)dt\cdot l_i^{(l)}(x)\Bigg| = I_1+I_2. \qquad (28)$$

Обозначим через $L_l(F;x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по узлам (12), функции $F(x)$, определяемой равенством

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Используя обозначение (24) и неравенство (22), имеем:

$$I_1=\left|F(x)-L_l(F,x)\right|\le\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}S(l,\alpha)\,. \qquad (29)$$

Далее, используя (25), (22) и (24), находим:

$$I_2\le\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\|L_l\|_C\max_{0\le i\le l, a\le t\le b}\left|f[t,y(t)]K\left(t_i^{(l)},t\right)-L_m(f\cdot K,t)\right|\le$$

$$\le\frac{(b-a)\|L_l\|_C}{\Gamma(\alpha)}\frac{\mu(b-a)^r}{\Gamma(r+1)}S(m,r)\le\frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\left(\frac{2}{\pi}\ln l+1\right)S(m,r)\,. \qquad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (28), получаем:

$$\left\|(Ay)(x)-\left(\widetilde{A}y\right)(x)\right\|_C\le\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}S(l,\alpha)+\frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\left(\frac{2}{\pi}\ln l+1\right)S(m,r). \qquad (31)$$

Докажем, что A – сжимающий оператор. В силу свойств дробных интегралов Римана – Лиувилля имеем:

$$\left\|(Ay_1)(t)-(Ay_2)(t)\right\|_C=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f[t,y_1(t)]-f[t,y_2(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right\|\le\frac{L(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1(x)-y_2(x)\|_C\,.$$

С учетом (26) заключаем, что A – сжимающий оператор.

Из (31) следует оценка

$$\delta=\sup_{y\in C_H[a,b]}\left\|Ay-\widetilde{A}y\right\|_C\le\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}S(l,\alpha)+\frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\left(\frac{2}{\pi}\ln l+1\right)S(m,r)\,. \qquad (32)$$

Используя (9) и (31), для любой $y(x)\in C_H[a,b]$ имеем:

$$\left\|\widetilde{A}y\right\|_C\le\|Ay\|_C+\left\|\widetilde{A}y-Ay\right\|_C\le\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}S(l,\alpha)+$$

$$+\frac{(b-a)^{r+1}\mu}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\left(\frac{2}{\pi}\ln l+1\right)S(m,r)\le D(1+\delta_{lm}).$$

Отсюда в силу предположения (27) при всех l и m, удовлетворяющих условию $\delta_{lm}<\varepsilon$, получим неравенство $\left\|\widetilde{A}y\right\|_C\le D(1+\varepsilon)\le H$, т.е. $\widetilde{A}(C_H[a,b])\subset C_H[a,b]$. Поэтому с учетом [8, с. 113] (26) и (32) получаем:

$$\left\|y_\nu-\widetilde{y}_\nu\right\|_C\le D\delta_{lm}\frac{1-q^\nu}{1-q}. \tag{33}$$

Применяя (10) и (33), получим:

$$\left\|y-\widetilde{y}_\nu\right\|_C\le\left\|y-y_\nu\right\|_C+\left\|y_\nu-\widetilde{y}_\nu\right\|_C\le\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{Mq^\nu}{1-q}+D\delta_{lm}\frac{1-q^\nu}{1-q}\le D\frac{q^\nu+\delta_{lm}(1-q^\nu)}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто

$$\left({}^cD_{0+}^{\frac{5}{2}}y\right)(x)=y^2(x)+\frac{105\sqrt{\pi}}{16}x-x^7,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0. \tag{34}$$

В результате применения рассмотренного выше итеративного метода получен полином, приближающий решение $y(x)=\sqrt{x^7}$ задачи типа Коши (34):

$$y_4(x)=8{,}90217\cdot10^{-8}x-0{,}000112757x^2+0{,}0691963x^3+4{,}11891x^4.$$

В таблице приведены значения точного и приближенного решения, а также модули их разностей.

Таблица. – Сравнение точного и приближённого решений

x	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y(x)$	$3{,}57777\cdot10^{-9}$	$4{,}04772\cdot10^{-9}$	$1{,}67313\cdot10^{-8}$	$4{,}57947\cdot10^{-8}$	$\approx1\cdot10^{-7}$
$y_4(x)$	$3{,}46489\cdot10^{-9}$	$4{,}03498\cdot10^{-9}$	$1{,}67594\cdot10^{-8}$	$4{,}57953\cdot10^{-8}$	$\approx1\cdot10^{-7}$
$\lvert y(x)-y_4(x)\rvert$	$1{,}12816\cdot10^{-11}$	$1{,}27323\cdot10^{-11}$	$2{,}81094\cdot10^{-11}$	$6{,}38602\cdot10^{-13}$	$3{,}62857\cdot10^{-14}$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost freguancy independent / M. Caputo // Geophis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

3. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mcinardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.

4. Kilbas, A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.

5. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics / R. Gorenflo, F. Mainardi // Viena : Springer. – 1997. – P. 223–276.

6. Oldham, K. B. The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.

7. Килбас, А. А. Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 399, № 1. – С. 7–11.

8. Дзядык, В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К. : Наук. думка, 1988. – 302 с.

9. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1970. – 420 с.

10. Даугавет, И. К. Введение в теорию приближения функций / И. К. Даугавет. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.2015

Marzan S.A. **Iterative Learning Method of Approximate Computation of Cauchy Problem for non-linear Differentiation Equation with Kaputo Fractional Derivative**

The algorithm of approximate solution to the Cauchy problem for non-linear differential equation with Kaputo fractional derivative is worked out. The algorithm is based on the modified Dzyadyko approximate-integrative method. It allows getting the same results as by the method of successive approximations. The assessed value of exact and approximate solutions to the problem in question is valid for application of fractional integral qualities and Riemann-Liouville derivatives in the space of continuous functions.