

УДК 512.542

Д.Д. Даудов¹, А.А. Трофимук²¹магістрант спецыяльнасці «Матэматыка»

Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

²канд. фіз.-мат. навук, доц. каф. алгебры, геаметрыі і матэматычнага мадэлявання

Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.С. Пушкіна

**РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ
КОФАКТОРОВ ИМЕЮТ МАЛЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ**

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G , у которой нормальный ранг силовских подгрупп кофакторов подгрупп ограничен. В частности, производная длина такой группы G не превышает b , а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Введение

Все рассматриваемые группы в данной работе предполагаются конечными. Кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $\overline{H^G} = H / \text{core}_G H$, где $\text{core}_G H$ – ядро подгруппы H в группе G , т.е. наибольшая нормальная подгруппа в G , содержащаяся в H .

Важным направлением теории групп является изучение групп, у которых определённая система подгрупп обладает заданными свойствами. В данной работе в качестве определяющей системы подгрупп мы выбрали силовские подгруппы кофакторов подгрупп группы, а в качестве определяющего свойства – цикличность, бицикличность, ограничение на нормальный ранг.

Напомним, что группу $G = AB$ называют бициклической, когда она является произведением двух циклических групп A и B .

В.С. Монахов [1] ввел понятие нормального ранга p -группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X , а запись $X \triangleleft P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P .

Очевидно, что для нечетного простого числа p класс p -групп, у которых нормальный ранг ≤ 2 шире, чем класс всех бициклических p -групп. Так, экстраспециальная группа S порядка 27 имеет нормальный ранг равный 2, но S не является бициклической. Кроме того, существуют бициклические 2-группы, которые имеют нормальный ранг 3. Так, группа

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1, [a, b] = c, [b, c] = b^4, [a, c] = 1 \rangle$$

является бициклической и $r_n(G) = 3$. При этом класс 2-групп, у которых нормальный ранг ≤ 3 шире, чем класс всех бициклических 2-групп.

Исследованию строения групп, у которых кофакторы подгрупп имеют малые порядки или порядки кофакторов подгрупп имеют известные канонические разложения, посвящены работы С.М. Евтуховой и В.С. Монахова [2; 3].

В работе [4] Говеньбинь изучил строение группы с циклическими кофакторами примарных подгрупп. Из основного результата этой работы вытекают оценки инвариантов групп (производной и нильпотентной длины), у которых порядки кофакторов подгрупп свободны от квадратов.

Естественным является развитие результатов, предложенных выше, за счёт исследования разрешимых групп с силовскими подгруппами кофакторов фиксированного нормального ранга. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G – разрешимая группа и $(\overline{H^G})_p$ имеет нормальный ранг ≤ 2 для нечётного p и нормальный ранг ≤ 3 для $p = 2$, где H – произвольная подгруппа группы G . Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, а нильпотентная длина группы G не превышает 4. Здесь $(\overline{H^G})_p$ – силовская p -подгруппа кофактора $\overline{H^G}$.

Основные определения и вспомогательные результаты

В настоящей работе применяют термины с соответствующими обозначениями, принятые в монографиях [5; 6].

Прописными готическими буквами обозначаются классы групп, т.е. всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, изоморфные ей.

Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{B} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{G} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{G} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через \mathfrak{N} и \mathfrak{A} соответственно.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно ([6], с. 36), произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.2 ([7], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^{k-1}$.

Лемма 1.3. ([5], теорема 2.8). Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut } H$.

Лемма 1.4. ([5], теорема 1.65). Для каждой группы G и её силовской подгруппы P справедливы следующие утверждения:

- 1) если $K \triangleleft G$, то $P \cap K$ – силовская p -подгруппа в K ;
- 2) если $K \triangleleft G$, то PK/K – силовская p -подгруппа в G/K .

Лемма 1.5. ([7], лемма 13).

1) Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

2) Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathfrak{N}^4$.

Лемма 1.6. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит \mathfrak{F} , но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Лемма 1.7. ([5], теорема 4.42). Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой группой порядка p^n для некоторого простого p ;

3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

Лемма 1.8. Пусть H – разрешимая неприводимая подгруппа группы $GL(4, 2)$. Тогда производная длина подгруппы не превышает 5, а нильпотентная длина не превышает 3.

Доказательство. Заключение леммы проверяется элементарными вычислениями в компьютерной системе GAP.

Лемма 1.9. ([5], следствие из теоремы 4.24). В разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп.

Лемма 1.10. ([7], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{K}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{K}^5$.

Лемма 1.11. ([5], лемма 2.33). Если N_1 и N_2 нормальные подгруппы группы G , то фактор-группа $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе, являющейся подпрямым произведением прямого произведения $(G/N_1) \times (G/N_2)$.

Лемма 1.12. ([5], следствие, стр. 86). Минимальная нормальная подгруппа группы либо элементарная абелева p -группа для некоторого простого p , либо является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп.

Лемма 1.13. ([2], леммы 1, 2).

1. Если H и K подгруппы группы G и $K \subseteq H$, то $\text{core}_G K \leq \text{core}_G H$.

2. Пусть N – нормальная подгруппа группы G , H – подгруппа из G и $N \subseteq H$. Тогда $N \leq \text{core}_G H$ и $(\text{core}_G H)/N \leq \text{core}_{G/N}(H/N)$.

Лемма 1.14. ([1], лемма 8). Если N – нормальная подгруппа p -группы P , то $r_n(P/N) \leq r_n(P)$.

Доказательство теоремы

Выделим два вспомогательных результата.

Лемма 2.1. Пусть G – группа и H – произвольная подгруппа в G . Если все силовские подгруппы из $\overline{H^G}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, то для любой собственной подгруппы X группы G все силовские подгруппы из $\overline{H_1^X}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, где H_1 – произвольная подгруппа в X .

Доказательство. Так как $X < G$ и $H_1 \leq X$, то $H_1 < G$. Из леммы 1.13 следует, что $\text{core}_G H_1 \leq \text{core}_X H_1$. Тогда $\overline{H_1^X} = H_1 / \text{core}_X H_1 \cong (H_1 / \text{core}_G H_1) / (\text{core}_X H_1 / \text{core}_G H_1)$. Пусть $\overline{S} = \text{core}_X H_1 / \text{core}_G H_1$. Поэтому $\overline{H_1^X} \cong \overline{H_1^G} / \overline{S}$ и $(\overline{H_1^X})_p \cong (\overline{H_1^G})_p \overline{S} / \overline{S}$ по лемме 1.4. Так как по условию нормальный ранг $(\overline{H_1^G})_p$ не превышает k , то по лемме 1.14 нормальный ранг $(\overline{H_1^X})_p$ также не превышает k .

Лемма 2.2. Пусть G – разрешимая группа, H – произвольная подгруппа в G и $N \triangleleft G$. Если все силовские подгруппы в $\overline{H^G}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, то в фактор-группе $\overline{G} = G/N$ группы G все силовские подгруппы из $\overline{H_1^G}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, где $\overline{H_1}$ – произвольная подгруппа из \overline{G} .

Доказательство. Так как $\overline{H_1} = H_1/N \leq \overline{G} = G/N$, то $N \leq H_1 \leq G$. Тогда $N \leq \text{core}_G H_1$ и $\text{core}_G H_1 / N \leq \text{core}_{\overline{G}} \overline{H_1}$ по лемме 1.13. Таким образом, получаем

$$\overline{H_1^G} = \overline{H_1} / \text{core}_{\overline{G}} \overline{H_1} \cong (H_1/N) / (\text{core}_G H_1 / N) \cong H_1 / \text{core}_G H_1 = \overline{H_1^G}.$$

Очевидно, что $\left(\overline{H_1^G}\right)_p \cong \left(H_1^G\right)_p$. Так как по условию $\left(H_1^G\right)_p$ имеет нормальный ранг $\leq k$, то $\left(\overline{H_1^G}\right)_p$ имеет нормальный ранг $\leq k$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}^5 \cap \mathfrak{N}^4$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $\Phi(G) \neq 1$, то по лемме 2.2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда, ввиду насыщенности формации \mathfrak{F} , получим, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

По лемме 1.9 подгруппа Фиттинга $F(G) = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Предположим, что $k \geq 2$. Тогда из леммы 2.2 следует $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.11. Таким образом, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа G и $F(G) = N$. Тогда N – элементарная абелева группа порядка p^n по лемме 1.12.

Пусть X – максимальная подгруппа в $F = F(G)$, тогда $|F(G) : X| = p$. Очевидно, что $\overline{X^G} = X / \text{core}_G X \cong X$, так как $\text{core}_G X = 1$ ($\text{core}_G X \leq X \leq F(G) = N$). Так как X имеет нормальный ранг ≤ 2 для нечётного p и нормальный ранг ≤ 3 для $p = 2$ и является элементарной абелевой p -группой, то $|X| \leq p^2$ или равен 8. Значит, $|F(G)| \leq p^3$ или равен 16. Таким образом, из леммы 1.3 G/F изоморфна циклической группе порядка $p-1$ либо неприводимой подгруппе группы $GL(2, p) = \text{Aut} F$, либо неприводимой подгруппе группы $GL(3, p)$, либо неприводимой подгруппе группы $GL(4, 2)$. Из лемм 1.8, 1.10 следует, что $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{U}^5$ и $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^5$ и по лемме 1.2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}^6$. Значит, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Следствие 2.1. Пусть G – разрешимая группа и $\left(H^G\right)_p$ – бициклическая для любого $p \in \pi\left(H^G\right)$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Следствие 2.2. Пусть G – A_4 -свободная разрешимая группа, $\left(H^G\right)_p$ бициклическая для любого $p \in \pi\left(H^G\right)$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство. Учитывая все этапы доказательства теоремы и лемму 1.5, получим заключение следствия.

Следствие 2.3. Если G – разрешимая группа, $(\overline{H^G})_p$ – циклическая для любого $p \in \pi(\overline{H^G})$. Тогда производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$. По лемме 1.1 \mathfrak{F} – насыщенная формация. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, не принадлежащая \mathfrak{F} . Из леммы 2.2 следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G . По лемме 1.6 G – примитивная группа. Тогда согласно лемме 1.7 в группе существует единственная минимальная подгруппа $F = F(G)$, F – элементарная абелева порядка p^n и $G = [F]M$, где M – примитиватор группы G . Так как $F \leq G$ и X – максимальная подгруппа в F , то $|F:X| = p$. Очевидно, что $\overline{X^G} = X/\text{core}_G X \cong X$. Так как X – циклическая и элементарная абелева, то $|X| = p$. Значит, $|F| = p^2$. Поэтому из леммы 1.3 $G/F \cong \leq \text{Aut}F$. Так как $\text{Aut}F = GL(2, p)$, то из леммы 1.10 $G/F \in \mathfrak{U}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{U}^4$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Следствие 2.4. Пусть G – разрешимая A_4 -свободная группа, $(\overline{H^G})_p$ циклическая для любого $p \in \pi(\overline{H^G})$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3.

Доказательство. Повторяя доказательство следствия 2.3 и учитывая лемму 1.5, получим заключение следствия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
2. Евтухова, С. М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 26–29.
3. Евтухова, С. М. О порядках кофакторов подгрупп конечной разрешимой группы / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 15–18.
4. Wenbin, Guo. Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors / Guo Wenbin, Yi Xiaolan, Huang Jianhong // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2011. – 34, № 2. – P. 337–344.
5. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006.
6. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978.
7. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2015

Daudov D.D., Trofimuk A.A. On Solvable Groups with Small Normal Rank of Sylow Subgroups of the Cofactors Subgroup

We obtain estimates of the derived length and the nilpotent length of a solvable group G whose normal rank of Sylow subgroups of the cofactors subgroup is fixed. In particular, the derived length of such group does not exceed 6 and the nilpotent length of such group does not exceed 4.