

УДК 517.5

**А.М. Пиддубный**

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. дифференциальных уравнений и математической физики  
 Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки  
 (г. Луцк, Украина)

### КЛАССЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе изучаются классы аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости. Найдены условия вложения рассматриваемых классов.

Сформулируем сначала некоторые определения понятий и некоторые известные факты, используемые в работе. Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  – единичный круг,  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  – единичная окружность комплексной плоскости,  $\bar{D} = D \cup T$ . В данной работе изложены результаты исследования поведения производных высших порядков аналитических функций в контексте такой теоремы.

**Теорема Харди – Литтлвуда [1].** Пусть  $f$  – функция, аналитическая в круге  $D$ ,  $0 < \alpha < 1$  и  $\beta > \alpha$ . Для того, чтобы  $f$  была непрерывной в  $\bar{D}$  и

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C |z_1 - z_2|^\alpha, \quad z_1, z_2 \in \bar{D}, \quad C = \text{const} > 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы  $|f^{(\beta)}(z)| \leq \frac{KC}{(1-|z|)^{\beta-\alpha}}, \quad \forall z \in D,$

где  $f^{(\beta)}(z) := \sum_{k=\lceil \beta \rceil}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\beta)} f_k z^{k-\lceil \beta \rceil}$ ,  $f_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ,  $z \in D$ , – дробная производная порядка  $\beta$  в смысле Римана – Лиувилля (например, [2, § 22]),  $K = K(\alpha, \beta) = \text{const}$ .

**Определение 1.** Пускай  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  – непрерывная возрастающая функция,  $\lambda(0) = 0$ . Будем говорить, что функция  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  принадлежит классу  $Lip_\lambda(D)$ , если

$$|f|_{Lip_\lambda} := \sup_{z_1, z_2 \in D} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty.$$

Если при этом функция  $f$  аналитическая в  $D$ , то будем писать  $f \in ALip_\lambda(D)$ , а если к тому же  $f$  является непрерывной в  $\bar{D}$ , то будем писать  $f \in ALip_\lambda(\bar{D})$ .

Обозначим через  $A(\bar{D})$  пространство функций, аналитических в  $D$  и непрерывных в  $\bar{D}$  с нормой  $\|f\| := \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$ .

**Замечание 1.** Если  $f \in ALip_\lambda(\bar{D})$ , то  $|f|_{Lip_\lambda} = \sup_{z_1, z_2 \in T} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\lambda(|z_1 - z_2|)} < \infty$ .

В этом легко убедиться, рассмотрев функции, которые являются алгебраическими многочленами, а затем воспользоваться теоремой о плотности алгебраических многочленов в пространстве  $A(\bar{D})$ .

Вполне понятно также, что  $ALip_\lambda(\bar{D}) \subset ALip_\lambda(D) \subset H_\infty$ , где  $H_\infty$  – пространство ограниченных аналитических функций.

**Определение 2.** Пускай  $\lambda : R_+ \rightarrow R_+$  – непрерывная возрастающая функция,  $\lambda(t) > 0, t > 0, \lambda(0) = 0$ . Будем говорить, что функция  $f : D \rightarrow C$  принадлежит классу  $\mathfrak{B}_\lambda^k$ , если  $|f|_{\mathfrak{B}_\lambda^k} := \sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^k}{|\lambda(1-|z|)|} |f^{(k)}(z)| < \infty$ .

**Замечание 2.** Для того, чтобы классы  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  были не тривиальными, т.е. состояли не только из алгебраических многочленов степени не выше  $k-1$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(t)}{t^k} > 0$ .

Действительно, достаточность этого утверждения очевидна, а необходимость можно установить с помощью следующих соображений.

Пускай функция  $f$  не является алгебраическим многочленом степени не выше  $k-1$ , т.е.  $f^{(k)} \neq 0$ . Тогда найдётся  $m \in Z_+$  такое, что

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2^m} \frac{(m+k)!}{m!} |f_{m+k}^r| \leq r^m \frac{(m+k)!}{m!} |f_{m+k}^r| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(k)}(re^{it}) e^{-imt} dt \right| \leq \frac{\lambda(1-r)}{(1-r)^k} \quad \forall r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Эти соотношения и доказывают достаточность.

Вернемся еще раз к теореме Харди – Литтлвуда. Пусть  $\lambda(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < 1$ , и  $\beta = k, k \in N$ . Тогда теорему Харди – Литтлвуда в принятых обозначениях можно переписать в таком виде: для аналитической в круге  $D$  функции  $f$

$$|f|_{Lip_\lambda} < \infty \Leftrightarrow |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^k} < \infty,$$

или в равносильной форме

$$ALip_\lambda(D) = \mathfrak{B}_\lambda^k, \quad k \in N. \quad (1)$$

Возникает задача: при каких условиях на функцию  $\lambda(t)$  равенство (1) будет иметь место в общем случае, т.е. описать множество всех неубывающих функций  $\lambda : R_+ \rightarrow R_+, \lambda(t) > 0, t > 0$ , для которых выполняется равенство (1).

Связь между классами  $ALip_\lambda(D)$  и  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  описывается следующими двумя утверждениями.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda : R_+ \rightarrow R_+$  – непрерывная неубывающая функция,  $\lambda(t) > 0, t > 0$ , и  $\lambda(0) = 0$ . Тогда

$$ALip_\lambda(D) \subset \mathfrak{B}_\lambda^1 \subset \mathfrak{B}_\lambda^2 \subset \dots \subset \mathfrak{B}_\lambda^k \subset \dots \quad (2)$$

**Доказательство.**

Первое вложение можно считать известным фактом [3], но не будет лишним привести его доказательство, которое основывается на технике К-функционала. Известно, что К-функционал дробного порядка  $r$  в пространстве  $A(\overline{D})$  определяется так:

$$K_r(\delta, f) := \inf_{g: g^{(r)} \in H_p} \left( \|f - g\| + \delta \|g^{(r)}\| \right), \quad 0 < p \leq \infty.$$

Пусть  $f \in ALip_\lambda(D)$ . По формуле Коши для произвольной аналитической функции  $g$ , такой, что  $g' \in A(\overline{D})$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it}) - g(e^{it})}{(Re^{it} - z)^2} Re^{it} dt + g'\left(\frac{z}{R}\right), \quad |z| < R < 1.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \|f(R\cdot) - g\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{|Re^{it} - z|^2} dt + \|g'\| \leq \\ &\leq \|f(R\cdot) - g\| \frac{1}{R - |z|} + \|g'\|. \end{aligned}$$

Следовательно  $(R - |z|)|f'(z)| \leq \|f(R\cdot) - g\| + (1 - |z|)\|g'\|$ .

Поскольку функция  $g$  является произвольной, то последнее неравенство значит, что

$$(R - |z|)|f'(z)| \leq K(1 - |z|, f_R), \quad (3)$$

где  $f_R(z) := f(Rz)$ .

Известно (например, [4, с. 177]), что для произвольной функции  $F \in A(\overline{D})$

$$K(\delta, F) \leq C\omega(\delta, F), \quad \delta > 0,$$

где  $C$  – абсолютная константа и  $\omega(\delta, F) := \sup_{|t-\delta|} |F(e^{it}) - F(\square)|$  – модуль непрерывности функции  $F$ . Поэтому, сочетая этот факт с (3), а также учитывая определение величины  $|f|_{Lip_\lambda}$  и монотонность функции  $\lambda$ , получим

$$\begin{aligned} (R - |z|)|f'(z)| &\leq C\omega(1 - |z|, f_R) = \\ &= C \sup_{|t|\leq 1-|z|} \|f(Re^{it}\square) - f(R\square)\|_{C(T)} \leq C|f|_{Lip_\lambda} \sup_{|t|\leq 1-|z|} \lambda(R|e^{it} - 1|) = \\ &= C|f|_{Lip_\lambda} \sup_{|t|\leq 1-|z|} \lambda\left(2R\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right) \leq C|f|_{Lip_\lambda} \lambda(R(1 - |z|)). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow 1-$ , получим  $\frac{1 - |z|}{\lambda(1 - |z|)}|f'(z)| \leq C|f|_{Lip_\lambda} < \infty \quad z \in D$ ,

а это значит, что  $f \in \mathfrak{B}_\lambda^1$ .

Для доказательства остальных вложений в (2) достаточно показать, что  $\mathfrak{B}_\lambda^1 \subset \mathfrak{B}_\lambda^2$ . Для этого воспользуемся формулой:

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad |z| < R < 1.$$

Получаем

$$\begin{aligned} |f''(z)| &\leq \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta \leq \\ &\leq |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \frac{\lambda(1 - R)}{1 - R} \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 - 2R|z|\cos\theta - |z|^2} = \\ &= |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \frac{\lambda(1 - R)}{1 - R} \frac{R}{R^2 - |z|^2} \leq |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \frac{\lambda(1 - R)}{1 - R} \frac{1}{R - |z|}. \end{aligned}$$

Положим теперь  $R = \frac{1 + |z|}{2}$ . Тогда из предыдущей оценки следует соотношение

$$|f|_{\mathfrak{B}_\lambda^2} = \sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^2}{\lambda(1-|z|)} |f''(z)| \leq 4 |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1} \sup_{z \in D} \frac{\lambda \left( \frac{1-|z|}{2} \right)}{\lambda(1-|z|)} \leq 4 |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1},$$

которое и требовалось доказать.

Вложения  $\mathfrak{B}_\lambda^k \subset \mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$ ,  $k \geq 2$ , следуют из доказанного с помощью подстановки  $f' := f^k$ .

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda: R_+ \rightarrow R_+$  — непрерывная неубывающая функция,  $\lambda(t) > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\lambda(0) = 0$ . Тогда:

- 1)  $\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t} dt = O(1)\lambda(x)$ ,  $x > 0 \Rightarrow ALip_\lambda(\bar{D}) \supset \mathfrak{B}_\lambda^1$ ;
- 2) если  $k \in N$ , то  $\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt = O(1) \frac{\lambda(x)}{x^k}$ ,  $0 < x < 1 \Rightarrow \mathfrak{B}_\lambda^k \supset \mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$ ;
- 3)  $\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2} dt = O(1) \frac{\lambda(x)}{x}$ ,  $0 < x < 1 \Rightarrow \mathfrak{B}_\lambda^1 \supset \mathfrak{B}_\lambda^2 \supset \dots \supset \mathfrak{B}_\lambda^k \supset \dots$

**Доказательство.** Утверждение пункта 1) является непосредственным следствием теоремы Я.Л. Геронимуса [5, теорема 4].

Докажем теперь пункт 2). Прежде всего отметим, что при условии

$$\int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt = O(1) \frac{\lambda(x)}{x^k}, \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

для функции  $\lambda$  имеет место неравенство

$$\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{\lambda(t)}{t^k} > 0. \quad (5)$$

Пусть теперь  $f \in \mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$ . Исходя из равенства

$$f^{(k)}(z) = \int_0^z f^{(k+1)}(\zeta) d\zeta + f^{(k)}(0), \quad z \in D,$$

где интегрирование ведётся вдоль отрезка, который соединяет точки 0 и  $z$ , на основании условия (4) получаем оценку

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| &\leq \int_0^{|z|} |f^{(k+1)}(\zeta)| d\zeta + |f^{(k)}(0)| \leq \\ &\leq |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}} \int_0^{|z|} \frac{\lambda(1-\zeta)}{(1-\zeta)^{k+1}} d\zeta + |f^{(k)}(0)| = \\ &= O(1) |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}} \frac{\lambda(1-|z|)}{(1-|z|)^k} + |f^{(k)}(0)|. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (5), получаем соотношение

$$\frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} |f^{(k)}(z)| < O(1) |f|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}} + |f^{(k)}(0)| \frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} < \infty,$$

которое и доказывает, что  $f \in \mathfrak{B}_\lambda^k$ .

Чтобы доказать пункт 3), отметим, что условие (4), как показано в [6], равно-

сильно такому:  $\exists C > 1: \limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)} < C^k$ .

Следовательно, если выполняется условие (4) при  $k = 1$ , то существует постоянная  $C > 1$ , такая, что  $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)} < C < C^2 < C^3 < \dots < C^k \dots$ , т.е. условие (4) выполняется для каждого натурального  $k$ . Этот факт на основании уже доказанного пункта 2) доказывает пункт 3).

Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 получаем

**Следствие.** Пусть  $\lambda: R_+ \rightarrow R_+$  — непрерывная неубывающая функция,  $\lambda(t) > 0$ ,  $t > 0$ ,  $\lambda(0) = 0$ . Если выполняется условие

$$\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t} dt + x \int_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2} dt = O(1)\lambda(x), \quad 0 < x < 1,$$

то  $ALip_\lambda(\bar{D}) = ALip_\lambda(D) = \mathfrak{B}_\lambda^1 = \mathfrak{B}_\lambda^2 = \dots = \mathfrak{B}_\lambda^k = \dots$

**Замечание 3.** Последнее утверждение характеризует классы  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  в терминах модуля непрерывности первого порядка. Характеристики классов  $\mathfrak{B}_\lambda^k$  в терминах модулей непрерывности высших порядков получены в работах [7–9].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy, G. Some properties of fractional integrals. II / G. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Zeitschr. — 1931. — Vol. 34. — P. 403–439.
2. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск, 1987. — 688 с.
3. Брудный, Ю. А. Обобщение одной теоремы Харди и Литтлвуда / Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз // Матем. сб. — 1960. — Т. 52, № 3. — С. 891–894.
4. DeVore, R. A. Constructive Approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorentz. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1993. — 462 p.
5. Геронимус, Я. Л. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе / Я. Л. Геронимус // Матем. сб. — 1956. — Т. 38, № 3. — С. 319–330.
6. Бари, Н. К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н. К. Бари, С. Б. Стечкин // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т. 5 — С. 483–522.
7. Zygmund, A. Smooth functions / A. Zygmund // Duke Mathematics Journal. — 1945. — Vol. 12. — P. 47–76.
8. Ковальчук, Р. Н. О некоторых свойствах интегрального модуля гладкости граничной функции класса  $H_p$  ( $p \geq 1$ ) / Р. Н. Ковальчук // Теор. функций, функционал. анализ и их приложения. — 1969. — Т. 9. — С. 14–20.
9. Kryakin, Y. q-Moduli of Continuity in  $H_p(D)$ ,  $p > 0$ , and an Inequality of Hardy and Littlewood / Y. Kryakin, W. Trebels // Journal Approx. Theory. — 2002. — Vol. 115. — P. 238–259.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 09.04.2015

**Piddubny O.M. Classes of Analytic Functions in the Unit Disk of the Complex Plane**

*In this paper we researched classes of analytic functions in the unit disc of the complex plane. Conditions are found investments considered classes.*