УДК 917.948

В.М. Мадорский

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики и технологий программирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Для решения нелинейного операторного уравнения с гладким оператором рассматривается нелокальный нерегуляризованный итерационный процесс и на его примере исследуется общий подход для получения выпуклой области, где решение существует и единственно.

Для анализа проблемы рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(D \subset R^n \to R^n)$, для решения которого предлагается следующий квазиньютоновский нерегуляризованный итерационный процесс:

Шаг 1: Решается линейная система для определения поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n),\ n = 0, 1, 2 \ldots . \tag{2}$$

Шаг 2: Вносится поправка в x_n и определяется очередное приближение

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n . \tag{3}$$

Шаг 3: Проверяется условие окончания итерационного процесса:
если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon,\ \ \varepsilon << 1$, ε – параметр останова, то конец просчетов, иначе переход на
Шаг 4: Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе производится пересчёт β_{n+1} по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n}\right),\ \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n},\ \gamma_0 = \beta_0^2,\ \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \tag{4}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Пусть оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет условиям: отображение *f* является *G*-дифференцируемым на выпуклом множестве *D*,

$$\|f'(x)\| \le M < +\infty \quad \forall x \in D,\ \left\|[f'(x)]^{-1}\right\| \le B,\quad \forall x \in D, \tag{5}$$

производная $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L и в D существует решение x^* уравнения (1). Тогда относительно процесса $(2)-(4)$ справедлива

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (5). *Тогда итерационный процесс* $(2)-(4)$ *при* $\varepsilon_0 = LB^2\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\| < 1$, *со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к* x^* *– решению уравнения* (1). *Оценка погрешности* n*-ого приближения имеет вид* $\|x_n - x^*\| \le \dfrac{B\|f(x_0)\| q_0^n}{1 - q_0}$.

Доказательство. Докажем релаксационность процесса $(2)-(4)$. Используя условия теоремы, имеем

$$\|f(x_{n+1})\| \le \|f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\| + \sup_{0\le t\le 1}\|f'(x_n+t\Delta x_n)-f'(x_n)\|\|x_{n+1}-x_n\| \le$$

$$\le \left\|f(x_n)-\sqrt{\beta_n}f(x_n)\right\| + LB^2\beta_n\|f(x_n)\|^2 = \left(1-\sqrt{\beta_n}(1-\varepsilon_n)\right)\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|, \qquad (6)$$

здесь $\varepsilon_n = LB^2\sqrt{\beta_n}\|f(x_n)\|$, $q_n = 1-\sqrt{\beta_n}(1-\varepsilon_n)$.

Покажем, что имеет место равенство $\sqrt{\beta_{n+1}}\|f(x_{n+1})\| = \sqrt{\beta_n}\|f(x_n)\|$, для чего рассмотрим отношение

$$\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} = \frac{\gamma_{n+1}\|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+2})\|^2\beta_{n+1}^2} = \frac{\gamma_n\beta_{n+1}\|f(x_0)\|^2}{\beta_{n+1}\|f(x_{n+2})\|^2\beta_{n+1}^2}.$$

После несложных преобразований имеем, что

$$\sqrt{\beta_{n+2}}\|f(x_{n+2})\| = \sqrt{\beta_{n+1}}\|f(x_{n+1})\| . \qquad (7)$$

Из условий теоремы и (7) следует, что все $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ и если β_0 и x_0 таковы, что $\varepsilon_0 = LB^2\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\| < 1$, то $q_0 < 1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1$. Пусть $n = 0$, тогда из (6) следует, что

$$\|f(x_1)\| \le q_0\|f(x_0)\| \le \|f(x_0)\|, \qquad (8)$$

а из (7) имеем, что

$$\sqrt{\beta_1}\|f(x_1)\| = \sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\|. \qquad (9)$$

Сравнивая (9) и (8), имеем $\sqrt{\beta_1} > \sqrt{\beta_0}$ и $q_1 = 1-\sqrt{\beta_1}(1-\varepsilon_1) < 1-\sqrt{\beta_0}(1-\varepsilon_0) = q_0$.

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность $\{\beta_i\}\uparrow 1$, а последовательность $\{q_i\}\downarrow 0$.

Переходя к пределу в (6) при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x_n)\| \le \lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n} q_i\,\|f(x_0)\| = 0. \qquad (10)$$

Таким образом, из (10) следует, что $\{f(x_n)\} \to f(x^*) = 0$, тем самым сходимость итерационного процесса к решению доказана.

Покажем, что в процессе счёта существует номер k_0, что при $i \ge k_0$ все $\beta_i := 1$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n\|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2\beta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n-1}\|f(x_0)\|^2}{\beta_{n-1}\|f(x_{n+1})\|^2} = \ldots = \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_0\|f(x_0)\|^2}{\beta_0\|f(x_{n+1})\|^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_0\|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2} > \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_0\|f(x_0)\|^2}{\prod_{i=0}^{n} q_i\,\|f(x_0)\|} \to +\infty. \qquad (11)$$

Из (11) и (4) следует, что $\exists k_0$ такое, что для всех $i \ge k_0$, $\beta_i := 1$. С этого момента процесс $(2)-(4)$ переходит в классический метод Ньютона, с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. Теорема 1 доказана.

Пусть при некотором i $\beta_i := 1$ тогда в силу условий теоремы

$$\|f(x_{i+1})\| = \left\|f(x_i - [f'(x_i)]^{-1} f(x_i)\right\| \le \|f'(x_n + t\Delta x_n) - f'(x_n)\| \|x_{n+1} - x_n\| \le$$

$$\le L\left\|\Delta x_i{}^2\right\| = l_i \|\Delta x_i\| / B; l_i = LB\|\Delta x_i\|.$$

$$\|f(x_{i+2})\| = l_{i+1}\|\Delta x_{i+1}\| / B \le \mathrm{BL}\|\Delta x_{i+1}\| l_i \|\Delta x_i\| / B \le l_i^3 \|\Delta x_i\| / B.$$

Индуктивно получим оценку

$$\|f(x_{i+n})\| \le l_i^{2n-1}\|\Delta x_i\| / B .$$

Нетрудно найти радиус сферы с центром x_i. Если $l_i < 1$, то

$$\begin{aligned} r_\exists \le \sum_{j=i}^{\infty} \left\|\Delta x_j\right\| = \|\Delta x_i\| + B\|f(x_{i+1})\| + B\|f(x_{i+2})\| + \ldots \le \\ \le \|\Delta x_i\| + l_i\|\Delta x_i\| + l_i^3\|\Delta x_i\| + \ldots < \|\Delta x_i\| / (1 - l_i). \end{aligned} \quad (12)$$

Наряду с (12) имеем

$$r_\exists \le \|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| / (1 - l_i) . \quad (13)$$

Найдем радиус области единственности решения уравнения в сфере $S(x_i, r)$, где r – радиус области, где решение единственно, точнее найдем условия, при выполнении которых в области $S(x_i, r)$ не более одного решения. Положим, что $S(x_i, r)$ существуют два решения x^* и x^{**}. Тогда справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \left\|x^* - x^{**}\right\| = \left\|x^* - x^{**} - [f'(x_i)]^{-1}\left(f(x^*) - f(x^{**})\right)\right\| \le \\ \le \left\|[f'(x_i)]^{-1}\right\| \cdot \left\|f'(x_i)(x^* - x^{**}) - \left(f(x^*) - f(x^{**})\right)\right\| \le \\ \le B \sup_{0\le\Theta\le1} \left\|f'(x^{**} + \Theta(x^* - x^{**})) - f'(x_i)\right\| \left\|x^* - x^{**}\right\| \le B\ Lr\left\|x^* - x^{**}\right\| . \end{aligned} \quad (14)$$

Если в (14) потребовать, чтобы $BLr = q < 1$ или

$$r = \frac{q}{BL} = \frac{q\|\Delta x_i\|}{BL\|\Delta x_i\|} = \frac{q\|\Delta x_i\|}{l_i}, \quad (15)$$

то в сфере $S(x_i, r)$ будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса Ньютона рассмотрим неравенство

$$\|\Delta x_i / (1 - l_i)\| \le \frac{q}{BL} = q\|\Delta x_i\| / l_i , \quad (16)$$

которое равносильно утверждению $r_\exists \le r$. Из (13) следует оценка l_i:

$$l_i \le q / (1 + q) = F(q) < 1 . \quad (17)$$

Если в качестве $r_\exists$ взять правую часть соотношения (13) и потребовать выполнения условия

$$\|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| / (1 - l_i) \le \frac{q\|\Delta x_i\|}{l_i}, \quad (18)$$

то неравенство (18) также равносильно утверждению того, что $r_\exists \le r$.

Из (18) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\frac{\|\Delta x_{i+1}\|}{\|\Delta x_i\|} \le \left(\frac{q}{l_i} - 1\right) \cdot (1 - l_i) = G(l_i) \,. \tag{19}$$

Так как $G'(l_i) < 0$, то имеет место соотношение

$$\frac{\|\Delta x_{i+1}\|}{\|\Delta x_i\|} \le \left(\frac{q}{F(q)} - 1\right) \cdot (1 - F(q)) \,, \tag{20}$$

откуда будет следовать соотношение (19), которое является следствием утверждения того, что $r_{\exists} \le r$.

Пусть выполняется неравенство (20). Тогда соотношение (20) можно переписать в следующем виде:

$$\|\Delta x_i\| + \|\Delta x_{i+1}\| + \frac{F(q)}{1 - F(q)} \cdot \|\Delta x_{i+1}\| + \left(\frac{F(q)}{1 - F(q)}\right)^2 \|\Delta x_{i+1}\| + \ldots \le \frac{q\|\Delta x_i\|}{F(q)} \,. \tag{21}$$

Левая часть неравенства (21) мажорирует левую часть соотношения (18), а правая часть (21) минорирует правую часть (18). Следовательно, из выполнения (20) следует выполнение (19), которое есть условие того, что $r_{\exists} \le r$.

Таким образом, для проверки того, что в области D решение существует и единственно, в условиях сходящегося ньютоновского процесса (с $\beta_i = 1 \quad \forall i$) производим проверку выполнимости условия (20) с $q \in (0,1)$.

Если это условие при некотором $k \ge i$ выполняется, то мы находимся в сфере $S(x_k, r)$, в которой решение x^* существует и единственно. Радиус этой сферы находим из соотношения $r = \sum\limits_{i=k}^{n} \|\Delta x_i\|$, где номер n находим из условия

$$\|f(x_n)\| \le \varepsilon, \ \varepsilon << 1, \ \varepsilon \sim (1e-9) - (1e-11) \text{, или } r = \frac{q\|\Delta x_i\|}{F(q)} \ .$$

Радиус сферы $D = S(x_i, r)$ и оценку погрешности $n-$го приближения, используя метод математической индукции, находим стандартным образом:

$$\|x_n - x^*\| \le \sum_{i=n}^{\infty} \|\Delta x_i\| \le \sum_{i=n}^{\infty} B\sqrt{\beta_i}\,\|f(x_i)\| \le B\|f(x_i)\|(q_i^n + q_i^{n+1} + \ldots) < \frac{B\|f(x_i)\|q_i^n}{1 - q_i} \,,$$

при этом радиус сферы, где имеют место соотношения (5), имеет вид

$$r = \frac{B\|f(x_0)\|}{1 - q_0} \,, \ q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0).$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Пусть в условиях сходящегося процесса Ньютона и выполнения условий теоремы* 1 *имеет место соотношение* (20) *при некотором i. Тогда в сфере* $S(x_i, r), \quad r = \dfrac{q\|\Delta x_i\|}{F(q)}$ *решение уравнения* (1) *существует и единственно.*

Замечание 1. *Обратимость оператора* $f'(x)$ *в области* D *является также достаточно обременительным условием.*

В связи с вышесказанным, следуя идее работы [1], найдем условия, при которых при переходе от точки x_0, в которой $[f'(x_0)]^{-1}$ существует, к точке x_1 будет существовать ограниченный обратный оператор $[f'(x_1)]^{-1}$. Если $f \in C_D^{(2)}$, имеем оценку

$$\left\|E-[f'(x_0)]^{-1}f'(x_0)\right\| = \left\|[f'(x_0)]^{-1}\left(f'(x_0)-f'(x_1)\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|[f'(x_0)]^{-1}\right\| \cdot \left\|f'(x_0)-f'(x_1)\right\| \le B_0K\|x_1-x_0\| = B_0K\|\Delta x_0\| = l_0.$$

Здесь $\left\|[f'(x_0)]^{-1}\right\| = B_0$, E – единичный оператор.

Если $l_0 < 1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору $[f'(x_0)]^{-1}f'(x_1)$, и справедлива оценка $\left\|[f(x_1)]^{-1}\right\| \le B_0(1-l_0)^{-1}$.

Если для получения элемента x_1 использовать метод Ньютона, имеем оценку

$$\|f(x_1)\| = \left\|f\left(x_0-[f'(x_0)]^{-1}f(x_0)\right)\right\| \le L\|\Delta x_0\|^2 < l_0\|\Delta x_0\|/B_0. \tag{22}$$

Определим l_0 так, чтобы при переходе от точки x_0 к точке x_1 выполнялось неравенство $l_1 \le l_0$. Имеем

$$l_1 = B_1L\|\Delta x_1\| \le B_0(1-l_0)^{-1}LB_1\|f(x_1)\| \le \frac{B_0^2(1-l_0)^2Ll_0\|\Delta x_0\|}{B_0} =$$
$$= B_0L\|\Delta x_0\|l_0/(1-l_0)^2 = l_0{}^2/(1-l_0)^2.$$

Неравенство $l_1 \le l_0$ справедливо при $l_0 \le \frac{1}{2}$. Нетрудно найти радиус области существования решения уравнения (1) в сфере $S(x_0, r_\exists)$. Учитывая (22), имеем оценку для сходящегося процесса Ньютона

$$\begin{aligned} r_\exists &\le \sum_{i=0}^{\infty}\|\Delta x_i\| \le \|\Delta x_0\| + B_1\|f(x_1)\| + B_2\|f(x_2)\| + \ldots \le \\ &\le \|\Delta x_0\| + \frac{l_0}{1-l_0}\|\Delta x_0\| + \left(\frac{l_0}{1-l_0}\right)^2\|\Delta x_0\| + \ldots \le \frac{1-l_0}{1-2l_0}\|\Delta x_0\|. \end{aligned} \tag{23}$$

Наряду с оценкой (20) может быть получена оценка (23).

$$\begin{aligned} r_\exists &\le \sum_{i=0}^{\infty}\|\Delta x_i\| \le \|\Delta x_0\| + \|\Delta x_1\| + \frac{l_1}{1-l_1}\|\Delta x_1\| + \\ &+ \left(\frac{l_1}{1-l_1}\right)^2\|\Delta x_1\| + \ldots \le \|\Delta x_0\| + \frac{1-l_0}{1-2l_0}\|\Delta x_1\|. \end{aligned} \tag{24}$$

Условия, при выполнении которых в области $S(x_0, r)$ не более одного решения, рассмотрены нами выше.

В условиях сходящегося процесса Ньютона рассмотрим неравенство

$$\frac{1-l_0}{1-2l_0}\|\Delta x_0\| \le \frac{q}{B_0L} = \frac{q\|\Delta x_0\|}{l_0}, \tag{25}$$

которое равносильно утверждению $r_\exists \le r$. Из (25) следует оценка l_0:

$$l_0 \le \frac{1+2q-\sqrt{1+4q^2}}{2} = F_1(q) < 1\,. \tag{26}$$

Если в качестве $r_\exists$ взять правую часть соотношения (24) и потребовать выполнения условия

$$\|\Delta x_0\| + \frac{1-l_0}{1-2l_0}\|\Delta x_1\| \le \frac{q\|\Delta x_0\|}{l_0}\,, \tag{27}$$

то неравенство (27) также равносильно утверждению того, что $r_\exists \le r$.

Из (27) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|} \le \left(\frac{q}{l_0} - 1\right) \cdot \frac{1-2l_0}{1-l_0} = G(l_0)\,. \tag{28}$$

Так как $G'(l_0) < 0$, тогда из выполнения соотношения

$$\frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|} \le \left(\frac{q}{F(q)} - 1\right) \cdot \frac{1-2F_1(q)}{1-F_1(q)} \tag{29}$$

будет следовать соотношение (28), которое является следствием утверждения того, что $r_\exists \le r$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда если в условиях сходящегося вычислительного процесса* (2) – (4) *при некотором* x_0 *выполняется условие* (29), *то в сфере* $S\left(x_0, \dfrac{q\|\Delta x_0\|}{F_1(q)}\right)$ *решение уравнения* (1) *существует и единственно*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
2. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных граничных задач / В. М. Мадорский // Изв. ВУЗов СССР. Сер. матем. наук. – 1986. – № 12. – С. 45–57.
3. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 2. – С. 113–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2015

Madorski V.M. **On the Existence and Uniqueness Solutions of Nonlinear Equations**

For solving nonlinear operator equation with a smooth operator is considered a non-local nonregularized iterative process and his example we study the general approach for convex region where a solution exists and is unique.