

УДК 539.12

Е.М. Овсюк, К.В. Казмерчук**ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА: ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАУЛИ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА**

Частица со спином 1 в сферическом пространстве Римана S_3 исследуется в поле магнитного заряда. В релятивистском уравнении Даффина–Кеммера проведено разделение переменных с использованием D -функций Вигнера, при этом возникают три квантовых числа (E, j, m) : энергии, квадрата и третьей проекции обобщенного полного момента. В радиальной системе уравнений выполнен переход к нерелятивистскому приближению – задача сводится к трем зацепляющимся дифференциальным уравнениям второго порядка. Полученная система оказывается достаточно сложной. Полному анализу поддается только особый случай минимального значения квантового числа $j_{\min}$. При этом можно дополнительно учесть внешние сферически-симметричные электрические поля. Детально исследованы обобщенные на пространство Римана случаи кулоновского поля и поля осциллятора; построены точные волновые функции и найдены спектры энергий частицы.

1. Разделение переменных в релятивистском уравнении Даффина–Кеммера

Известно, что спин существенно влияет на поведение квантово-механической частицы в поле дираковского монополя [1; 2]. В частности, частица со спином 1/2 обнаруживает существование особого класса решений, которые можно сопоставлять связанным состояниям в системе «частица в потенциале монополя» (простое изложение вопроса см., например, в [3]). В [3] было показано, что такие простые и выделенные состояния возможны и для частицы со спином 1 в поле монополя. Однако до недавнего времени других точных решений в этой системе найти не удавалось. В работе [4] было проведено исследование нерелятивистского приближения в системе «векторная частица в поле монополя». Оказалось, что в таком подходе можно построить точные решения для всех значений обобщенного полного момента j ; удается также учесть дополнительное присутствие внешних сферически-симметричных потенциалов, тем самым получить спектры для частицы со спином 1, модифицированные присутствием внешнего монопольного потенциала. Этот анализ был обобщен на случай пространств Лобачевского в [5]. В настоящей работе аналогичное исследование выполнено в сферическом пространстве Римана S_3 . Напомним, что в этой геометрической модели сингулярная нить Дирака – это замкнутая линия конечных размеров.

Используя общековариантный тетрадный формализм Даффина–Кеммера [3], рассмотрим задачу о векторной частице в поле монополя. Исходное уравнение в сферической тетраде имеет следующий вид [3]:

$$\left[i \beta^0 \partial_t + i \left(\beta^3 \partial_r + \frac{1}{\sin r} (\beta^1 j^{31} + \beta^2 j^{32}) \right) + \frac{1}{\sin r} \Sigma_{\theta, \phi}^k - M \right] \Phi(x) = 0,$$

$$\Sigma_{\theta, \phi}^k = i \beta^1 \partial_\theta + \beta^2 \frac{i \partial_\phi + (i j^{12} - k) \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (1.1)$$

где $k = eg/\hbar c$ – квантующийся согласно Дираку (см. в [1]) параметр $|k| = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ Ниже применим циклическое представление для матриц Даффина–Кеммера [3], в котором матрица ij^{12} имеет диагональную структуру

$$iJ^{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_3 \end{vmatrix}, \quad t_3 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Три компонента сохраняющегося общего момента [1] задаются в этом базисе формулами [3]

$$J_1^k = l_1 + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} (iJ^{12} - \kappa), \quad J_2^k = l_2 + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} (iJ^{12} - \kappa), \quad J_3^k = l_3. \quad (1.2a)$$

Согласно общей методике [3], волновая функция векторной частицы с квантовыми числами (ε, j, m) должна строиться как

$$\Phi_{\varepsilon jm}(x) = e^{-i\varepsilon t} [f_1(r) D_k, f_2(r) D_{k-1}, f_3(r) D_\kappa, f_4(r) D_{k+1}, f_5(r) D_{k-1}, f_6(r) D_k, f_7(r) D_{k+1}, f_8(r) D_{k-1}, f_9(r) D_k, f_{10}(r) D_{k+1}], \quad (1.2b)$$

где $D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$ обозначается для краткости символом D_σ . При нахождении 10 радиальных уравнений для $f_1, \dots, f_{10}$ предстоит воспользоваться рекуррентными соотношениями [6]

$$\begin{aligned} \partial_\theta D_{k-1} &= a D_{k-2} - c D_k, & \frac{-m - (k-1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{k-1} &= -a D_{k-2} - c D_k, \\ \partial_\theta D_k &= (c D_{k-1} - d D_{k+1}), & \frac{-m - k \cos \theta}{\sin \theta} D_k &= -c D_{k-1} - d D_{k+1}, \\ \partial_\theta D_{k+1} &= (d D_k - b D_{k+2}), & \frac{-m - (k+1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{k+1} &= -d D_k - b D_{k+2}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \sqrt{(j+k-1)(j-k+2)}, & b &= \frac{1}{2} \sqrt{(j-k-1)(j+k+2)}, \\ c &= \frac{1}{2} \sqrt{(j+k)(j-k+1)}, & d &= \frac{1}{2} \sqrt{(j-k)(j+k+1)}. \end{aligned}$$

Из (1.1) получаем систему радиальных уравнений

$$\begin{aligned} -i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_2 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_3 - M f_8 &= 0, \\ i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} f_3 - M f_{10} &= 0, \\ i\varepsilon f_5 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_8 + i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_9 - M f_2 &= 0, \\ i\varepsilon f_7 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_{10} - i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r} f_9 - M f_4 &= 0, \\ -i\varepsilon f_2 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_1 - M f_5 &= 0, & -i\varepsilon f_4 + \frac{\sqrt{2}d}{\sin r} f_1 - M f_7 &= 0, \\ -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) f_6 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_5 + d f_7) - M f_1 &= 0, \\ i\varepsilon f_6 + \frac{\sqrt{2}i}{\sin r} (-c f_8 + d f_{10}) - M f_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$i \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_2 - d f_4) - M f_9 = 0, \quad -i \varepsilon f_3 - \frac{d}{dr} f_1 - M f_6 = 0. \quad (1.4)$$

Величина j может принимать только следующие значения:

если $k = \pm 1/2$,

$$j = |k|, |k| + 1, \dots;$$

если $k = \pm 1, \pm 3/2, \dots$

$$j = |k| - 1, |k|, |k| + 1, \dots \quad (1.5)$$

Обратимся к состояниям с $j_{\min} = |k| - 1$. Вначале следует исследовать $j_{\min} = 0$ – ситуацию, возникающую при $k = \pm 1$; соответствующая волновая функция не будет зависеть от угловых переменных θ, ϕ . Пусть $k = +1$ и $j_{\min} = 0$, тогда подстановка имеет вид:

$$\Phi^0(t, r) = e^{-i\varepsilon t} (0, f_2, 0, 0, f_5, 0, 0; f_8, 0, 0). \quad (1.6a)$$

Легко проверяется, что угловой оператор $\Sigma_{\theta, \phi}$ действует на Φ_0 как нулевой оператор: $\Sigma_{\theta, \phi} \Phi_0 = 0$, поскольку $(j(j+1) - k) \Phi^0 \equiv 0$. В результате получаем только три нетривиальных радиальных уравнения:

$$\begin{aligned} i \varepsilon f_5 + i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_8 - M f_2 &= 0, \\ -i \varepsilon f_2 - M f_5 &= 0, \quad -i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_2 - M f_8 = 0. \end{aligned} \quad (1.6b)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} f_5 &= -i \frac{\varepsilon}{M} f_2, \quad f_8 = -\frac{i}{M} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_2, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + \varepsilon^2 - M^2 \right) f_2 &= 0; \end{aligned}$$

с помощью подстановки

$$f_2(r) = \frac{1 + \cos r}{\sin r} F_2(r)$$

приходим к уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - M^2 \right) F_2 = 0, \quad F_2 = e^{\pm \sqrt{M^2 - \varepsilon^2} r}, \quad r \in [0, \pi]. \quad (1.6c)$$

Последнее дает знакомое по электронному случаю решение экспоненциального типа, пригодное для описания «связанных состояний» при $\varepsilon < M$. Однако, никакого квантования уровней энергии на решениях (1.6c) из-за компактности сферического пространства получить не удастся. С требованиями непрерывности совместим единственный выбор $\varepsilon = M$. Предположим теперь, что $\varepsilon > M$, тогда имеем решения:

$$F_2 = e^{\pm i \sqrt{\varepsilon^2 - M^2} r}, \quad r \in [0, \pi]; \quad (1.6d)$$

требуя выполнения равенства $F_2(0) = F_2(\pi) = 1$, можно получить правило квантования:

$$\varepsilon^2 = M^2 + 4n^2. \quad (1.6e)$$

Ситуация при $j_{\min} = 0$ и $k = -1$ выглядит аналогично:

$$\Phi^0(t, r) = e^{-i\varepsilon t} (0, 0, 0, f_4, 0, 0, f_7, 0, 0, f_{10}); \quad (1.7a)$$

система радиальных уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} i \varepsilon f_7 - i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_{10} - M f_4 &= 0, \\ -i f_4 - M f_7 &= 0, \quad i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_4 - M f_{10} = 0; \end{aligned} \quad (1.7b)$$

в итоге находим

$$\begin{aligned} f_7 &= -i \frac{\varepsilon}{M} f_4, \quad f_{10} = \frac{i}{M} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r} \right) f_4, \\ f_4 &= \frac{1 + \cos r}{\sin r} F_4, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - M^2 \right) F_4 = 0. \end{aligned} \quad (1.7c)$$

Теперь переходим к анализу случая минимального $j_{min} = |k| - 1$ с полуцелыми значениями $k = \pm 3/2, \pm 2, \dots$. Вначале рассмотрим положительные k ; должны исходить из подстановки

$$k \geq 3/2, \quad \Phi^0 = e^{-i\varepsilon t} (0, f_2 D_{k-1}, 0, 0; f_5 D_{k-1}, 0, 0; f_8 D_{k-1}, 0, 0). \quad (1.8)$$

Используя рекуррентные соотношения

$$\partial_\theta D_{k-1} = \sqrt{\frac{k-1}{2}} D_{k-2}, \quad \frac{-m - (k-1) \cos \theta}{\sin \theta} D_{k-1} = -\sqrt{\frac{k-1}{2}} D_{k-2},$$

получаем

$$i\beta^1 \Phi^0 = i \sqrt{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} -if_5 D_{k-2} \\ 0 \\ +f_8 D_{k-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_2 D_{k-2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 \frac{i \partial_\phi + (ij^{12} - k) \cos \theta}{\sin \theta} \Phi^0 = \sqrt{\frac{k-1}{2}} \begin{pmatrix} -f_5 D_{k-2} \\ 0 \\ -if_8 D_{k-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +if_2 D_{k-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и дальше находим $\Sigma_{\theta, \phi} \Phi^0 = 0$. Следовательно, радиальная система для функций f_2, f_5, f_8 удовлетворяет (1.6b). Случай $j_{min} = |k| - 1$ с отрицательными k выглядит аналогично предыдущему:

$$k \leq -3/2, \quad \Phi^0 = e^{-i\varepsilon t} (0, 0, 0, f_4 D_{k+1}, 0, 0, f_7 D_{k+1}, 0, 0, f_1 D_{k+1}); \quad (1.9)$$

тождество $\Sigma_{\theta, \phi} \Phi^0 \equiv 0$ выполняется, и система радиальных уравнений аналогична (1.7b). Итак, описание состояний с $j_{min} = |k| - 1$ завершено; все они дают решения экспоненциального типа. В то же время это единственный случай, который удастся решить до конца, т. е. решить радиальные уравнения.

2. Нерелятивистское приближение

При осуществлении перехода к нерелятивистскому описанию будем пользоваться известной методикой [7]. В системе (1.4) выделим уравнения, с помощью которых можно исключить нединамические переменные:

$$\begin{aligned}
\left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) f_6 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_5 + d f_7) \right] &= M f_1, \\
\left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_2 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} f_3 \right] &= M f_8, \\
\left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c f_2 - d f_4) \right] &= M f_9, \quad \left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} f_3 \right] = M f_{10}. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

В оставшихся шести уравнениях исключаем нединамические переменные (2.1) и одновременно переходим к более симметричным обозначениям:

$$(f_2, f_3, f_4) \rightarrow (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \quad (f_5, f_6, f_7) \rightarrow (E_1, E_2, E_3); \quad (2.2)$$

в результате получим

$$\begin{aligned}
&i\varepsilon M E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \Phi_2 \right] + \\
&\quad + i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2 \Phi_1 = 0, \\
&i\varepsilon M E_2 + \frac{\sqrt{2}i}{\sin r} \left[-c \left(-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \Phi_2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + d \left(i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} \Phi_2 \right) \right] - M^2 \Phi_2 = 0, \\
&i\varepsilon M E_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r} \Phi_2 \right] - \\
&\quad - i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2 \Phi_3 = 0, \\
&-i\varepsilon M \Phi_1 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c E_1 + d E_3) \right] - M^2 E_1 = 0, \\
&-i\varepsilon M \Phi_2 - \frac{d}{dr} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c E_1 + d E_3) \right] - M^2 E_2 = 0, \\
&-i\varepsilon M \Phi_3 + \frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right) E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c E_1 + d E_3) \right] - M^2 E_3 = 0. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Большие и малые компоненты будут вводиться соотношениями:

$$\Psi_j = \Phi_j + iE_j, \quad \psi_j = \Phi_j - iE_j. \quad (2.4)$$

Перепишем уравнения (2.3), собирая их в пары. Одновременно выделяя энергию поля формальной заменой $\varepsilon = (M + E)$, получаем

$$\begin{aligned}
&i(M + E) M E_1 + i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \Phi_2 \right] + \\
&\quad + i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r} (c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2 \Phi_1 = 0,
\end{aligned}$$

$$-i(M+E)M\Phi_1 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1 + dE_3) \right] - M^2 E_1 = 0, \quad (2.5a)$$

$$i(M+E)ME_2 + \frac{\sqrt{2}i}{\sin r} \left[-c \left(-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right)\Phi_1 - i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\Phi_2 \right) + \right. \\ \left. + d \left(i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right)\Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2 \right) \right] - M^2 \Phi_2 = 0,$$

$$-i(M+E)M\Phi_2 - \frac{d}{dr} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1 + dE_3) \right] - M^2 E_2 = 0, \quad (2.5b)$$

$$i(M+E)ME_3 - i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right) \left[i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{\sin r}\right)\Phi_3 + \frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2 \right] - \\ -i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\Phi_1 - d\Phi_3) \right] - M^2 \Phi_3 = 0,$$

$$-i(M+E)M\Phi_3 + \frac{\sqrt{2}d}{\sin r} \left[-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1 + dE_3) \right] - M^2 E_3 = 0. \quad (2.5c)$$

Рассматриваем пару (2.5a):

$$iM^2 E_1 + iEME_1 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}\right)\Phi_1 + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}\Phi_2 - \\ - \frac{2c}{\sin^2 r}(c\Phi_1 - d\Phi_3) - M^2 \Phi_1 - \frac{\cos r - 1}{\sin^2 r}(\Phi_1 + \sqrt{2}c\Phi_2) = 0, \\ -iM^2 \Phi_1 - iEM\Phi_1 - \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)E_2 - \frac{2c}{\sin^2 r}(cE_1 + dE_3) - M^2 E_1 = 0; \quad (2.6a)$$

переходим в ней к большим и малым компонентам:

$$M^2(\Psi_1 - \psi_1) + EM(\Psi_1 - \psi_1) + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}\right)(\Psi_1 + \psi_1) + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}(\Psi_2 + \psi_2) - \\ - \frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 + \psi_1) - d(\Psi_3 + \psi_3)] - M^2(\Psi_1 + \psi_1) - \frac{\cos r - 1}{\sin^2 r}[(\Psi_1 + \psi_1) + \sqrt{2}c(\Psi_2 + \psi_2)] = 0, \\ -iM^2(\Psi_1 + \psi_1) - iEM(\Psi_1 + \psi_1) + i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)(\Psi_2 - \psi_2) + \\ + i\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 - \psi_1) + d(\Psi_3 - \psi_3)] + iM^2(\Psi_1 - \psi_1) = 0. \quad (2.6b)$$

После приведения подобных слагаемых система упрощается

$$-2M^2\psi_1 + EM(\Psi_1 - \psi_1) + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}\right)(\Psi_1 + \psi_1) + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}(\Psi_2 + \psi_2) - \\ - \frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 + \psi_1) - d(\Psi_3 + \psi_3)] - \frac{\cos r - 1}{\sin^2 r}[(\Psi_1 + \psi_1) + \sqrt{2}c(\Psi_2 + \psi_2)] = 0, \\ -2M^2\psi_1 - EM(\Psi_1 + \psi_1) + \frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{\sin r}\right)(\Psi_2 - \psi_2) + \\ + \frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1 - \psi_1) + d(\Psi_3 - \psi_3)] = 0. \quad (2.6c)$$

Из первого уравнения вычитаем второе, одновременно пренебрегая малыми компонентами на фоне больших:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_1 - \frac{4c^2}{\sin^2 r} \Psi_1 - \frac{\sqrt{2}c(1 + \cos r)}{\sin^2 r} \Psi_2 = 0; \quad (2.6d)$$

полученное уравнение содержит только большие компоненты.

Аналогично рассмотрев пары уравнений (2.5c) и (2.5b), приходим к системе уравнений Паули:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_1 - \\ & - \frac{4c^2}{\sin^2 r} \Psi_1 - \frac{\sqrt{2}c(1 + \cos r)}{\sin^2 r} \Psi_2 = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_2 - \\ & - \frac{2(c^2 + d^2)}{\sin^2 r} \Psi_2 - \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \Psi_2 - \sqrt{2}c \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \Psi_1 - \sqrt{2}d \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \Psi_3 = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \Psi_3 - \\ & - \frac{4d^2}{\sin^2 r} \Psi_3 - \frac{\sqrt{2}d(1 + \cos r)}{\sin^2 r} \Psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Легко можно убедиться в справедливости тождества

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{\sin r} \frac{d}{dr} + \frac{1 - \cos r}{\sin^2 r} + 2EM \right) \frac{\cos r + 1}{\sin r} F = \frac{\cos r + 1}{\sin r} \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2ME \right) F,$$

которое позволяет преобразовать систему (2.7) к виду:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2EM - \frac{4c^2}{\sin^2 r} \right) F_1 = \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \left(\sqrt{2}c F_2 \right), \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2EM - \frac{2(c^2 + d^2)}{\sin^2 r} \right) F_2 = \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \left(\sqrt{2}c F_1 + F_2 + \sqrt{2}d F_3 \right), \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2EM - \frac{4d^2}{\sin^2 r} \right) F_3 = \frac{1 + \cos r}{\sin^2 r} \left(\sqrt{2}d F_2 \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

К сожалению, система (2.8) оказывается очень сложной. Используемый в аналогичной ситуации в случае плоского пространства метод диагонализации смешивающей матрицы здесь не применим.

3. Частица в присутствии монополя в состояниях минимального j : учет кулоновского и осцилляторного потенциалов

Рассмотрим уравнение, описывающее состояния векторной частицы с минимальным значением квантового числа j в присутствии монополя, добавив кулоновский потенциал:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\varepsilon + \frac{\alpha}{\tan r} \right)^2 - M^2 \right) F_2 = 0. \quad (3.1)$$

В уравнении (3.1) перейдем к переменной $x = 1 - e^{-2ir}$:

$$x(1-x)\frac{d^2 F_2}{dx^2} - x\frac{dF_2}{dx} + \left[\frac{1}{4} \frac{M^2 x}{1-x} + \frac{1}{4} \frac{(\alpha x - 2\alpha + i\varepsilon x)^2}{x(1-x)} \right] F_2 = 0. \quad (3.2)$$

После подстановки $F_2 = x^A (1-x)^B f(x)$ уравнение (3.2) примет вид:

$$x(1-x)\frac{d^2 f}{dx^2} - [(1+2A+2B)x - 2A]\frac{df}{dx} - \left[(A+B)^2 + \left(\frac{i\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{M^2}{4} - \frac{A(A-1) + \alpha^2}{x} - \frac{1}{4} \frac{(i\varepsilon - \alpha)^2 + 4B^2 + M^2}{1-x} \right] f = 0. \quad (3.3a)$$

Требуя

$$A = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}, \quad B = \pm \sqrt{-\left(\frac{i\varepsilon}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{M^2}{4}}, \quad (3.3b)$$

из (3.3a) получим более простое уравнение

$$x(1-x)\frac{d^2 f}{dx^2} - [(1+2A+2B)x - 2A]\frac{df}{dx} - \left[(A+B)^2 + \left(\frac{i\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{M^2}{4} \right] f = 0. \quad (3.3c)$$

Это уравнение можно сопоставить с уравнением для гипергеометрических функций

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} f + [c - (a+b+1)x]\frac{df}{dx} - ab f = 0, \\ a = A+B - \frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon + \alpha)^2 - M^2}, \quad b = A+B + \frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon + \alpha)^2 - M^2}. \quad (3.4)$$

Выбираем

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon - \alpha)^2 - M^2}. \quad (3.5)$$

Условие полиномиальности $a = -n$ дает

$$1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2} - \sqrt{-(i\varepsilon - \alpha)^2 - M^2} - \sqrt{-(i\varepsilon + \alpha)^2 - M^2} = -2n,$$

откуда приходим к формуле для спектра энергий:

$$\varepsilon = \frac{M}{\sqrt{1 + \alpha^2/\nu^2}} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 + \nu^2}{M^2}}, \quad \nu = n + \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2}. \quad (3.6)$$

В обычных единицах выражение для спектра энергий имеет вид:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \alpha^2/\nu^2}} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m^2 c^2 R^2} (\alpha^2 + \nu^2)}. \quad (3.7)$$

Теперь на фоне присутствия монополя в состояниях минимального значения j учтем внешний осцилляторный потенциал. Если обратиться к релятивистской частице в поле монополя, то возникающее уравнение не решается в гипергеометрических функциях. Поэтому рассматриваем здесь только нерелятивистской задачу – она описывается уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + 2M\left(\varepsilon - \frac{K \tan^2 r}{2}\right) \right) F_2 = 0. \quad (3.8)$$

В уравнении (3.8) перейдем к переменной $y = \cos^2 r$:

$$\left(4y(y-1)\frac{d^2}{dy^2} + (4y-2)\frac{d}{dy} - 2ME - MK\frac{y-1}{y} \right) F_2 = 0. \quad (3.9a)$$

Решения будем искать в виде $F_2(y) = y^a (1-y)^b f(y)$:

$$y(1-y)f'' + \left[2a + \frac{1}{2} - (2a+2b+1)y \right] f' - \left[-\frac{EM}{2} - \frac{KM}{4} + (a+b)^2 \right] f - \frac{1}{y} \left(-a^2 + \frac{a}{2} + \frac{KM}{4} \right) f + \frac{1}{1-y} \left(b^2 - \frac{b}{2} \right) f = 0.$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при $y^{-1}, (1-y)^{-1}$, получаем

$$a = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{1+4KM}, \quad b = 0, \frac{1}{2}. \quad (3.9b)$$

Уравнение принимает более простой вид:

$$y(1-y)f'' + \left[2a + \frac{1}{2} - (a+b+1)y \right] f' - \left[-\frac{EM}{2} - \frac{KM}{4} + (a+b)^2 \right] f = 0. \quad (3.9c)$$

Это уравнение можно сопоставить с уравнением для гипергеометрической функции:

$$x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} f + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{df}{dx} - \alpha\beta F = 0, \quad \gamma = 2a+1,$$

$$\alpha = a+b - \sqrt{\frac{2EM}{4} + \frac{KM}{4}}, \quad \beta = a+b + \sqrt{\frac{2EM}{4} + \frac{KM}{4}},$$

$$F_2(y) = y^a (1-y)^b F(\alpha, \beta, \gamma, y) = (\cos r)^{2a} (\sin r)^{2b} F(\alpha, \beta, \gamma, \cos^2 r). \quad (3.10a)$$

Для связанных состояний выбираем положительные значения параметров a, b :

$$2b = 1 > 0, \quad 2a = \frac{1 + \sqrt{1+4KM}}{2} > 0, \quad (3.10b)$$

при этом

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1+4KM}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2EM + KM},$$

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1+4KM}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2EM + KM}. \quad (3.10c)$$

Условие обращения гипергеометрического ряда в полином $\alpha = -n$ дает

$$N + \frac{\sqrt{1+4KM}}{2} = \sqrt{2EM + KM}, \quad N = 2n + \frac{3}{2}.$$

Откуда находим формулу для спектра энергии

$$E = N \sqrt{\frac{K}{M} + \left(\frac{1}{2M}\right)^2} + \frac{1}{2M} \left(N^2 + \frac{1}{4}\right). \quad (3.11)$$

В обычных единицах формула имеет вид:

$$\varepsilon = \hbar \left(N \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{\hbar^2}{4m^2 R^4}} + \frac{\hbar}{2mR^2} \left(N^2 + \frac{1}{4}\right) \right), \quad N = 2n + \frac{3}{2}. \quad (3.12)$$

Авторы благодарны В.М. Редькову за интерес к данной работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В.И. Электродинамика с магнитным зарядом / В.И. Стражев, Л.М. Томильчик. – Минск: Наука и техника, 1975. – 322 с.
2. Fushchych, W.I. Relativistic particle of arbitrary spin in the Coulomb and magnetic monopole field / W.I. Fushchych, A.G. Nikitin, W.M. Susloparow // Nuovo Cimento A. – 1985. – Vol. 87. – P. 415–424.

3. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.
4. Ovsyuk, E.M. Quasi-plane waves for a electromagnetic and spinor fields on the background of Lobachevsky geometry: simulating of a special medium / E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // BGL-8 International Conference on Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics: programme and abstracts, Uzhgorod, 22–25 May 2012 / укл. А.М. Завілопуло. – Ужгород: ФОП Бреза А.Е., 2012. – С. 31.
5. Ovsyuk, E. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / E. Ovsyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk, V. Kisel, V. Red'kov // Quantum groups and quantum integrable systems: Program and Abstracts of International Conference, Kiev, June 18–21, 2013 / National Academy of Sciences of Ukraine, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Institute of Mathematics. – Kiev, 2013. – Р. 42.
6. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.
7. Квантовая механика в однородном магнитом поле: новые задачи / Е.М. Овсиук, В.В. Кисель, Г.Г. Крылов, В.М. Редьков. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. – 232 с.

E.M. Ovsyuk, K.V. Kazmerchuk Particle with Spin 1 in the Spherical Riemann Space: Pauli Approximation in the Magnetic Monopole Potential

A particle with spin 1 in the spherical Riemann space S_3 is treated in presence of the Dirac magnetic monopole in non-relativistic approximation. In the relativistic Duffin–Kemmer–Peteau equation we have separated the variables using the Wigner D -functions. Thus there arise three quantum numbers (E, j, m) : the energy, the square and the third projection of the generalized total angular momentum. In the radial system of equations, transition to the non-relativistic approximation is performed and the problem is reduced to the system of three interrelated equations of second order. The resulting system is complex, complete analysis is possible only for a special case of minimal value of the quantum number $j_{\min}$, at this external spherically symmetric electric fields can be taken into account. The cases of Coulomb and oscillator potential are studied in detail – the exact wave functions and energy spectra of the particle have been constructed.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.09.2013