

УДК 512.542

А.А. Трофимук**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ФИТТИНГОВЫМИ
ФАКТОРАМИ СВОБОДНЫМИ ОТ КУБОВ**

Получены оценки производной длины, нильпотентной длины и p -длины разрешимой группы G , у которой факторы цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ являются свободными от кубов. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , а $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а p -длина группы G не превышает 2 для любого простого p .

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, а при $m = 3$ – от кубов.

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд (1), факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] группа G сверхразрешима.

В работе [2] получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и p -длины) разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов.

Хорошо известен результат Бэра [1, с. 720], [3]:

Если в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G) \quad (2)$$

такая, что G_i нормальна в G и $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i , то G сверхразрешима.

Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , а $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Легко проверить, что группа останется сверхразрешимой, если факторы цепочки вида (2) будут свободны от кубов.

Поэтому вполне естественно исследовать разрешимые группы, у которых факторы цепочки вида (2) имеют порядок, свободный от кубов. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – разрешимая группа. Предположим, что в G существует цепочка подгрупп вида (2) и факторы G_{i+1}/G_i имеют порядок, свободный от кубов, для всех i . Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

2. *$l_p(G) \leq 2$ для всех простых p .*

3. Если группа G A_4 -свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Здесь $l_p(G)$ – p -длина группы G . Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Конкретные группы обозначаются следующим образом: 1 – единичная группа; Z_n и D_n – циклическая и диэдральная группы порядка n ; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n .

В доказательствах теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций, см. [4, 5]. Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{G} состоит из всех групп G , для которых \mathfrak{G} -корадикал принадлежит формации \mathfrak{F} . Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через \mathfrak{N} и \mathfrak{A} соответственно.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно [5, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2. Предположим, что в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (2) такая, что G_i нормальны в G и факторы G_{i+1}/G_i являются свободными от кубов для всех i . Тогда индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами или квадратами простых чисел.

Доказательство. Уплотним участок ряда (2) между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга до главного следующим образом. Пусть $\bar{N} = N/G_i$ содержится в подгруппе $\overline{G_{i+1}} = G_{i+1}/G_i \leq F(G)/G_i$ и является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\bar{G} = G/G_i$. Так как \bar{G} разрешима, то \bar{N} – элементарная абелева p -подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$. Так как силовская p -подгруппа $(\overline{G_{i+1}})_p$ группы $\overline{G_{i+1}}$ свободна от кубов и \bar{N} содержится в $(\overline{G_{i+1}})_p$, то \bar{N} имеет порядок p или p^2 . Заменяя в (2) отрезок $G_i \leq G_{i+1}$ на $G_i \leq \bar{N} \leq G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге уплотним участок ряда от подгруппы Фраттини до подгруппы Фиттинга до ряда, факторы которого имеют порядки p или q^2 .

Итак, можно считать, что факторы ряда (2) имеют порядки p или q^2 . Пусть M – максимальная подгруппа группы G , не содержащая подгруппу Фиттинга. Очевидно, что $\Phi(G) = G_0 \subseteq M$, а $G_m = F(G) \not\subseteq M$. Поэтому обязательно найдется

такое i , что $G_i \subseteq M$, но $G_{i+1} \not\subseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G , то $G_{i+1}M = G$ и $|G : M| = |G_{i+1} : G_{i+1} \cap M|$. Поскольку $G_i \subseteq G_{i+1} \cap M$, то

$$|G_{i+1} : G_{i+1} \cap M| = \frac{|G_{i+1} : G_i|}{|G_{i+1} \cap M : G_i|}$$

и $|G : M|$ является простым числом или квадратом простого числа.

Лемма 3. [6, лемма 12] Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$. Тогда $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{N}^4$.

Лемма 4. [6, лемма 13] Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

2. Доказательство теоремы

1. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{N}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку G . Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и

$$\Phi(G/\Phi(G)) = G_0/\Phi(G) \subset G_1/\Phi(G) \subset \dots \subset G_m/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$$

участок нормального ряда фактор-группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $G_0 = \Phi(G)$, а по теореме III.4.2 [1] $G_m = F(G)$. Поэтому для произвольной подгруппы G_i , $i = \overline{0, m}$, верно, что $\Phi(G) \subseteq G_i \subseteq F(G)$. Поскольку

$$(G_{i+1}/\Phi(G))/(\Phi(G)/\Phi(G)) \cong G_{i+1}/G_i,$$

то $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как по лемме 1 формация \mathfrak{F} насыщена, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По теореме III.4.5 [1] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G , где $1 \leq i \leq k$. Поэтому по теореме I.4.5 [1] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $Aut(F_i)$. По лемме I.9.6 [1] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = C_G(F) = F \quad \text{и} \quad G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i) = G/F.$$

Пусть F_i – элементарная абелева p_i -подгруппа. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i , то M_i не содержит F . Поэтому по лемме 2 порядок $|F_i|$ равен p_i , либо p_i^2 , где p_i – простое число.

Поэтому возможны следующие варианты:

- 1) $Aut(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;
- 2) $Aut(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$;

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{N}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 3 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{N}^4$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^4$. Поскольку $F/\Phi(G)$ – абелева фактор-группа и $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F$,

то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^5$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

2. Учитывая тот факт, что p -длина метанильпотентной группы не превышает 1, из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p .

3. Пусть группа G является A_4 -свободной, то, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 4, получим, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^2$ и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^3$. Поэтому производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3. Теорема доказана.

Пример. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Полупрямое произведение $G = [S]GL(2,3)$ является разрешимой группой, у которой существует нормальный ряд вида (2) с факторами, свободными от кубов. Нильпотентная длина группы G равна 4, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ равна 5, 2-длина и 3-длина группы G равна 2. Значит, оценки, полученные в теореме, являются точными.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф13М-113).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
2. Монахов В.С. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика и математика. – 2010. – №1. – С. 118–126.
3. Baer R. Supersolvable immersion / R. Baer // Can. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.
4. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М: Наука. – 1978. – 272 с.
6. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

A.A. Trofimuk Finite Groups with Cube-free Fitting Factors

The estimations of the derived length, nilpotent length and p -length of solvable group G with cube-free factors of chain $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ are obtained. Here $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G and $F(G)$ is the Fitting subgroup of G . In particular, the derived length of $G/\Phi(G)$ is at most 5, the nilpotent length of G is at most 4, the p -length of G is at most 2 for every prime p .

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.13