УДК 519.6+517.983.54

В.Ф. Савчук

К ВОПРОСУ ОБ АПОСТЕРИОРНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В гильбертовом пространстве изучается неявный метод итераций решения операторных уравнений I рода с неотрицательным самосопряженным ограниченным оператором. Доказана сходимость метода в случае апостериорного выбора параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи. Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H,F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{1}$$

Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением.

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного метода итераций

$$(E + \alpha A^k) x_{n+1} = x_n + \alpha A^{k-1} y, \quad x_0 = 0,\ k \in N, \tag{2}$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный шаг. Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (1) заданы приближённо, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A - A_\eta\| \le \eta$. Тогда метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A_\eta^k) x_{(n+1)(\delta,\eta)} = x_{n(\delta,\eta)} + \alpha A_\eta^{k-1} y_\delta, \quad x_{0(\delta,\eta)} = 0,\ k \in N. \tag{3}$$

Предполагаем, что $0 \in \sigma(A_\eta)$ и $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$.

Случай приближенной правой части уравнения y_δ и точного оператора A для метода (2) изучен в работе [1]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи (1), доказана сходимость метода (2) в энергетической норме гильбертова пространства. Докажем сходимость метода (3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ и получим оценку погрешности метода и оценку для момента останова. Подобные вопросы изучались в [2], но только для других методов.

Считаем, что нуль не является собственным значением оператора A_η, но принадлежит его спектру.

2. Правило останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left.\begin{aligned}&\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon, (n < m),\\ &\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| \le \varepsilon,\end{aligned}\right\} \ \varepsilon = b(\delta + \left\|x^*\right\|\eta), b > 1. \tag{4}$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\left\|A_\eta x_{0(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4) к методу (3).

3. Случай самосопряжённой задачи. Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \le \eta_0$. Итерационный метод (3) запишем в виде:

$$x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta, \tag{3^1}$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{1}{(1+\alpha\lambda^k)^n}\right] \ge 0$. В [1] получены следующие условия для функций $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|g_n(\lambda)\right| \le \gamma n^{1/k}, \gamma = k\alpha^{1/k}, \ (n > 0), \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le \gamma_s n^{-s}, \ (n > 0), \ 0 < s < \infty, \quad \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha}\right)^{s/k}, \tag{6}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$);

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \ (n > 0), \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda\left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\| \le M$, *и выполнено условие* (6) с $s_0 > 1$. *Тогда для* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ *справедливо соотношение для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$:

$$n^{1/k}\left\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\right\| \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty, \ \eta \to 0. \tag{9}$$

Доказательство

Воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза [3, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \ldots$

ограничены не зависящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\|$ и по условию (6) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\| = n^{1/k}\|A_\eta(E - A_\eta g_n(A_\eta))\| = n^{1/k}\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda|1-\lambda g_n(\lambda)| \le n^{1/k}\gamma_1 n^{-1/k} = \gamma_1, (n>0, \eta>0).$$

Для элементов вида $\upsilon = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (6) имеем

$$n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| = n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}A\omega\| \le n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}(A - A_\eta)\omega\| +$$

$$+ n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}A_\eta\omega\| \le \left(\gamma_1\eta + n^{1/k}\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^2|1-\lambda g_n(\lambda)|\right)\|\omega\| \le$$

$$\le \left(\gamma_1\eta + n^{1/k}\gamma_2 n^{-2/k}\right)\|\omega\| = \left(\gamma_1\eta + \gamma_2 n^{-1/k}\right)\|\omega\| \to 0,\ n\to\infty, \eta\to 0.$$

По теореме Банаха-Штейнгауза $n^{1/k}\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0$ при $n\to\infty, \eta\to 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$, *и выполнены условия* (6) *и* (8). *Если для некоторых* $\upsilon_0 \in \overline{R(A)}$, $n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p}G_{n_p\eta_p}\upsilon_0 \to 0$ *при* $p\to\infty$, *то* $G_{n_p\eta_p}\upsilon_0 \to 0$.

Доказательство

В силу неравенства (7) последовательность $\upsilon_p = G_{n_p\eta_p}\upsilon_0$ ограничена, т. е. $\|\upsilon_p\| = \|G_{n_p\eta_p}\upsilon_0\| \le \gamma_0\|\upsilon_0\|$, $p\in N = \{1, 2, ...\}$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_p \rightharpoonup \upsilon, (p\in N'\subseteq N)$. Тогда $A_{\eta_p}\upsilon_p \rightharpoonup A_{\eta_p}\upsilon, (p\in N')$. По условию $\omega_p = A_{\eta_p}\upsilon_p \to 0$, значит, $A_{\eta_p}\upsilon = 0$. Но так как нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $\upsilon = 0$. Теперь

$$\|\upsilon_p\|^2 = \left(\upsilon_p, G_{n_p\eta_p}\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \left(E - A_{\eta_p}g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) -$$

$$-\left(A_{\eta_p}\upsilon_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) - \left(\omega_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) \to \left(\upsilon, \upsilon_0\right) = \left(0, \upsilon_0\right) = 0, \quad (p\in N'),$$

так как $\omega_p \to 0$, $\left\|g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right\| \le \gamma n_p^{1/k} \le \gamma\bar{n}^{1/k}$. Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $\upsilon_p \to 0, p\to\infty$ по норме. Лемма 2 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *и выполнены условия* (6), (7) *с* $s_0 > 1$.

Пусть параметр $m(\delta,\eta)$ *выбран по правилу* (4). *Тогда* $(\delta+\eta)^k m(\delta,\eta)\to 0$, $x_{m(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0$, $\eta\to 0$.

Доказательство

Имеем $x_{n(\delta,\eta)}=g_n(A_\eta)y_\delta$, тогда

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}x^*-$$
$$-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+\left(E-A_\eta g_n\left(A_\eta\right)\right)x^*-$$
$$-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+x^*-A_\eta g_n\left(A_\eta\right)x^*-x^*+$$
$$+g_n\left(A_\eta\right)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+g_n\left(A_\eta\right)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \tag{10}$$

Отсюда,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-A_\eta x^*=-A_\eta G_{n\eta}x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta-A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}=A_\eta x^*-A_\eta G_{n\eta}x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta-A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-y_\delta+\left(E-A_\eta g_n(A_\eta)\right)A_\eta x^*+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta=$$
$$=-A_\eta G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}A_\eta x^*-\left(E-A_\eta g_n(A_\eta)\right)y_\delta=$$
$$=-A_\eta G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}A_\eta x^*-G_{n\eta}y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-G_{n\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right).$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta=-A_\eta G_{n\eta}x^*-G_{n\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \tag{11}$$

Покажем, что $\left\|G_{n\eta}x^*\right\|\to 0$ при $n\to\infty,\ \eta\to 0$. В силу (7) имеем $\left\|G_{n\eta}\right\|=\left\|E-A_\eta g_n(A_\eta)\right\|\le\gamma_0$, $(n>0,\ 0<\eta\le\eta_0)$. Для элементов вида $u=A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, на основании (8) имеем

$$\left\|G_{n\eta}u\right\|=\left\|G_{n\eta}A\omega\right\|\le\left\|G_{n\eta}\left(A-A_\eta\right)\omega\right\|+\left\|G_{n\eta}A_\eta\omega\right\|\le$$
$$\le\left(\gamma_0\eta+\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\right)\|\omega\|\le\left(\gamma_0\eta+\gamma_1 n^{-1/k}\right)\|\omega\|\to 0,$$

при $n\to\infty,\ \eta\to 0$. Итак,

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{12}$$

Покажем, что

$$\left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\gamma n^{1/k}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{13}$$

По условию (5) $\left\|g_n\left(A_\eta\right)\right\|\le\sup_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right|\le\gamma n^{1/k}$, а $\left\|y_\delta-A_\eta x^*\right\|\le\left\|y_\delta-y\right\|+$

$+\left\|y-A_\eta x^*\right\|=\left\|y_\delta-y\right\|+\left\|Ax^*-A_\eta x^*\right\|\le\delta+\left\|(A-A_\eta)x^*\right\|\le\delta+\left\|x^*\right\|\eta,$ поэтому получим $\left\|g_n(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\gamma n^{1/k}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$

В силу леммы 1

$$\sigma_{n\eta}=n^{1/k}\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{14}$$

Применим правило останова (4), тогда $\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|\le b\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right),\ b>1$ и из (7) и (11) получим

$$\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\|\le(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{15}$$

Действительно, из (11) $\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\|\le\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|+\left\|G_{m\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le b\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)+$ $+\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)=(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$ Для $\forall n<m\quad\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|>\varepsilon,$ поэтому

$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\|\ge\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)}-y_\delta\right\|-\left\|G_{n\eta}\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Следовательно, для $\forall n<m$

$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\|\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{16}$$

Из (16) и (14) при $n=m-1$ $\dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{(m-1)^{1/k}}=\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\|\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)$ или $(m-1)^{1/k}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\le\dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1}\to 0,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0$ (так как из (14) $\sigma_{m\eta}\to 0,\ m\to\infty,\ \eta\to 0$). Если при этом $m(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$, то, используя (10), (12) и (13), получим

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\left\|G_{m\eta}x^*\right\|+\left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\left\|G_{m\eta}x^*\right\|+$$
$$+\gamma m^{1/k}(\delta,\eta)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0,$$

т. е. что $x_{m(\delta,\eta)}\to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n,\eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)}\to x^*,\ \delta_n\to 0,\ \eta_n\to 0.$ Действительно, из (15) выполняется $\left\|A_{\eta_n}G_{m\eta_n}x^*\right\|\le(b+1)\left(\delta_n+\left\|x^*\right\|\eta_n\right)\to 0,\ \delta_n\to 0,\ \eta_n\to 0.$ Следовательно, имеем $A_{\eta_n}G_{m\eta_n}x^*\to 0,\ \delta_n\to 0,\ \eta_n\to 0$ и по лемме 2 получаем, что при $\delta_n\to 0,\ \eta_n\to 0$ выполняется $G_{m\eta_n}x^*\to 0.$ Отсюда

$$\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)}-x^*\right\|\le\left\|G_{m\eta_n}x^*\right\|+\gamma m^{1/k}(\delta_n,\eta_n)\left(\delta_n+\left\|x^*\right\|\eta_n\right)\to 0,\ \ \delta_n\to 0,\ \eta_n\to 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $x^*=A^s z,\ s>0,\ \left\|z\right\|\le\rho,$ *то справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha} \frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{k/(s+1)}}; \tag{17}$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho + \left[c_s\gamma_1\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} +$$
$$+ k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha}\frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{k/(s+1)}}\right\}^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{18}$$

Доказательство

Оценим заново элемент $\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\|$. В силу (6) и леммы 1.1 [2, с. 91]

$$\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\| = \left\|A_\eta G_{m-1,\eta}A^s z\right\| \le \left\|A_\eta G_{m-1,\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right)z\right\| +$$
$$+ \left\|A_\eta^{s+1}G_{m-1,\eta}z\right\| \le \left(\beta_{m-1,s}\eta + \gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)/k}\right)\rho,$$

где $\beta_{m-1,s} = c_s \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda\left(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)\right) \le \left[2k(m-1)\alpha\right]^{-1/k} c_s = c_s\gamma_1(m-1)^{-1/k}$, $\beta_{m-1,s} \to 0$, $m \to \infty$. Здесь $c_s = \mathrm{const}$ (при $0 < s \le 1$ $c_s \le 2$). Сопоставляя это с (16), получим $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \left(\beta_{m-1,s}\eta + \gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)/k}\right)\rho.$ Отсюда $\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)/k}\rho \ge$ $\ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \beta_{m-1,s}\eta\rho$, тогда

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \beta_{m-1,s}\eta\rho}\right]^{k/(s+1)}.$$

Поскольку $\beta_{m-1,s} = c_s\gamma_1\frac{1}{(m-1)^{1/k}} \le c_s\gamma_1$ (так как при $m > 1$ $\frac{1}{(m-1)^{1/k}} \le 1$), то $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \beta_{m-1,s}\eta\rho \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho$, и, значит, получим следующую оценку для m: $m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha}\frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{k/(s+1)}}$.

Из (10) и (13) имеем $\left\|G_{m\eta}x^*\right\| = \left\|G_{m\eta}A^s z\right\| \le \left\|G_{m\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right)z\right\| + \left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$. По лемме 1.1 [2, с. 91] $\left\|G_{m\eta}\left(A^s - A_\eta^s\right)z\right\| \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho$, что даёт в оценку $\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\|$ вклад $O\left((\delta + \eta)^{s/(s+1)}\right)$ [2, с. 111]. Норму $\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$ оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [2, с. 91] и (15):

$$\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\| = \left\|A_\eta^s G_{m\eta} z\right\| = \left\|A_\eta^{s+1} G_{m\eta} z\right\|^{s/(s+1)} \left\|G_{m\eta} z\right\|^{1/(s+1)} \le$$
$$\le \left\|A_\eta G_{m\eta} A_\eta^s z\right\|^{s/(s+1)} \left\|z\right\|^{1/(s+1)} \le \left(\left\|A_\eta G_{m\eta}\left(A_\eta^s - A^s\right)z\right\| +\right.$$
$$\left. + \left\|A_\eta G_{m\eta} A^s z\right\|\right)^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \le \left[\beta_{ms}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta} x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \left[\beta_{ms}\eta\rho + (b+1)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \gamma m^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \left[c_s\gamma_1\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} +$$
$$+ k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha}\frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{k/(s+1)}}\right\}^{1/k}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Порядок оценки* (18) *есть* $O\left(\left(\delta+\eta\right)^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [2], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Хотя формулировка теоремы* 2 *даётся с указанием степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 39–44.

2. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука. – 1986. – 178 с.

3. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

V.F. Savchuk **To the Question of Aposteriori Choice of Regularization Parameter in the Implicit Method of Iterations for Solving Operator Equations with Approximate Operator**

In a Hilbert space is studied implicit iterative method for solving operator equations of type I with non-negative self-adjoint bounded operator. The convergence of the method of choice in the case of aposteriori regularization parameter in the initial norm of a Hilbert space, assuming that the errors are not only in the right side of the equation, but also the operator. Obtain an estimate for error of the method the estimate for the moment stop.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.10.13