

УДК 517.518.2

А.Н. Нестеренко**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТРЕТЬЕГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ**

В работе получены новые неравенства для третьих равномерных модулей непрерывности функций, равномерно непрерывных на оси.

Пусть $UC(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ рассматриваем ее k -ый модуль непрерывности при $k=1$, $k=2$ и $k=3$:

$$\omega_k(f, t) = \sup \left\{ \left| \Delta_h^k(f, x) \right| : x \in \mathbb{R}, 0 < h \leq t \right\}, \quad t > 0,$$

где $\Delta_h^k(f, x)$ – k -ая конечная разность функции f в точке $x \in \mathbb{R}$ с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^1(f, x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2(f, x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$

$$\Delta_h^3(f, x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Отметим, что свойства модулей непрерывности функций, заданных на \mathbb{R} , в целом аналогичны свойствам модулей непрерывности функций, заданных на отрезке, которые детально изложены, например, в монографиях [1], [2].

Для модулей непрерывности первого порядка хорошо известен критерий того, что данная функция является модулем непрерывности некоторой функции ([1] – [3]). Для модулей непрерывности старших порядков такой критерий до сих пор не получен. В связи с этим представляет интерес неравенство для второго модуля непрерывности, установленное С.В. Конягиным [4]:

$$2\omega_2(f, T) \leq \omega_2(f, T+t) + \omega_2(f, T-t) + 2\omega_2(f, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f \in UC(\mathbb{R}).$$

В работе [5] доказан аналог неравенства С.В. Конягина для третьего модуля непрерывности в следующей форме:

$$2\omega_3(f, Nu) \leq \omega_3(f, (N+1)u) + \omega_3(f, (N-1)u) + 6N\omega_3(f, u), \quad u > 0, \quad N \in \mathbb{N}.$$

В настоящей работе получены некоторые аналоги и обобщения этого неравенства.

Лемма 1. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k < N$, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$ верно тождество

$$\begin{aligned} & \Delta_{(N+k)h}^3(f, x - kh) + \Delta_{(N-k)h}^3(f, x + kh) - 2\Delta_{Nh}^3(f, x) = \\ & = \Delta_{kh}^2(f, x + 3Nh) + 2\Delta_{kh}^2(f, x + (3N - k)h) + \Delta_h^2(f, x + (3N - 2k)h) - \\ & \quad - 3\Delta_{kh}^2(f, x + (2N - k)h) - \Delta_{kh}^2(f, x - kh). \end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая определение третьей конечной разности и выражение для второй конечной разности с шагом $2h$ через такую же разность с шагом h [1, с. 158], получаем

$$\begin{aligned} & \Delta_{(N+k)h}^3(f, x - kh) + \Delta_{(N-k)h}^3(f, x + kh) - 2\Delta_{Nh}^3(f, x) = \\ & = f(x + (3N + 2k)h) - 3f(x + (2N + k)h) + 3f(x + Nh) - f(x - kh) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+f(x+(3N-2k)h)-3f(x+(2N-k)h)+3f(x+Nh)-f(x+kh)- \\
 &\quad -2f(x+3Nh)+6f(x+2Nh)-6f(x+Nh)+2f(x)= \\
 &= \Delta_{2kh}^2(f, x+(3N-2k)h)-3\Delta_{kh}^2(f, x+(2N-k)h)-\Delta_{kh}^2(f, x-kh)= \\
 &= \Delta_{kh}^2(f, x+3Nh)+2\Delta_{kh}^2(f, x+(3N-k)h)+\Delta_h^2(f, x+(3N-2k)h)- \\
 &\quad -3\Delta_{kh}^2(f, x+(2N-k)h)-\Delta_{kh}^2(f, x-kh).
 \end{aligned}$$

Лемма 2. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $u > 0$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, Nu) \leq \omega_3(f, (N+k)u) + \omega_3(f, (N-k)u) + 8\omega_2(f, ku).$$

Доказательство следует из тождества леммы 1 и очевидного неравенства

$$|\Delta_h^2(f, x)| \leq \omega_2(f, u), \quad 0 < h \leq u, \quad x \in \mathbb{R},$$

при этом случай $N = k$ тривиален.

Теорема 1. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T+t) + \omega_3(f, T-t) + 8\omega_2(f, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Далее через $[a]$ обозначим целую часть числа $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для заданных чисел $T \geq 0$ и $t \geq 0$, $t \leq T$, положим $N_n := [nT]$, $k_n := [nt]$, $n \geq 1$. Применим неравенство леммы 2 к числам N_n , k_n и $u = \frac{1}{n}$ и перейдем в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Учитывая непрерывность функции ω_3 на промежутке $[0, +\infty)$ [1, с. 162], а также соотношения $N_n \frac{1}{n} \rightarrow T$, $n \rightarrow \infty$, и $k_n \frac{1}{n} \rightarrow t$, $n \rightarrow \infty$, получим доказываемое неравенство.

Следствие 1. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T+t) + \omega_3(f, T-t) + 16\omega_1(f, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Доказательство следует из теоремы 1 и неравенства [1, с. 164]

$$\omega_2(f, u) \leq 2\omega_1(f, u), \quad u \geq 0.$$

Теорема 2. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$, $u > 0$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, Nu) \leq \omega_3(f, (N+k)u) + \omega_3(f, (N-k)u) + 6Nk^2\omega_3(f, u).$$

Доказательство. Пусть $h \in (0, u]$ – произвольное фиксированное число. Рассматривая третью конечную разность как разность вторых конечных разностей, для произвольных $l \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
 &|\Delta_h^2(f, x+(l+m)h) - \Delta_h^2(f, x+lh)| = \\
 &\quad \left| \sum_{k=0}^{m-1} (\Delta_h^2(f, x+(l+k+1)h) - \Delta_h^2(f, x+(l+k)h)) \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_h^3(f, x+(l+k)h) \right| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |\Delta_h^3(f, x+(l+k)h)| \leq \omega_3(f, u)m.
 \end{aligned}$$

Учитывая эту оценку и выражение для второй конечной разности с шагом kh через такую же разность с шагом h [1, с. 158], для произвольных $l \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} & \left| \Delta_{kh}^2(f, x + (l+m)h) - \Delta_{kh}^2(f, x + lh) \right| = \\ & \left| \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_h^2(f, x + (i+j+l+m)h) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_h^2(f, x + (i+j+l)h) \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \omega_3(f, u) m = mk^2 \omega_3(f, u). \end{aligned}$$

Применим это неравенство для оценки правой части тождества леммы 1:

$$\begin{aligned} & \left| \Delta_{kh}^2(f, x + 3Nh) + 2\Delta_{kh}^2(f, x + (3N-k)h) + \Delta_h^2(f, x + (3N-2k)h) - \right. \\ & \quad \left. - 3\Delta_{kh}^2(f, x + (2N-k)h) - \Delta_{kh}^2(f, x - kh) \right| = \\ & = \left| \Delta_{kh}^2(f, x + 3Nh) - \Delta_{kh}^2(f, x + (2N-k)h) + 2(\Delta_{kh}^2(f, x + (3N-k)h) - \right. \\ & \quad \left. - \Delta_{kh}^2(f, x + (2N-k)h)) + \Delta_{kh}^2(f, x + (3N-2k)h) - \Delta_{kh}^2(f, x - kh) \right| \leq \\ & \leq (N+k+2N+3N-k)k^2 \omega_3(f, u) = 6Nk^2 \omega_3(f, u). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \Delta_{(N+k)h}^3(f, x - kh) + \Delta_{(N-k)h}^3(f, x + kh) - 2\Delta_{Nh}^3(f, x) \right| \leq 6Nk^2 \omega_3(f, u),$$

откуда

$$\begin{aligned} 2 \left| \Delta_{Nh}^3(f, x) \right| & \leq \left| \Delta_{(N+k)h}^3(f, x - kh) \right| + \left| \Delta_{(N-k)h}^3(f, x + kh) \right| + 6Nk^2 \omega_3(f, u) \leq \\ & \leq \omega_3(f, (N+k)u) + \omega_3(f, (N-k)u) + 6Nk^2 \omega_3(f, u). \end{aligned}$$

Если h пробегает весь промежуток $(0, u]$, то Nh пробегает весь промежуток $(0, Nu]$, поэтому из полученного неравенства и определения точной верхней грани и следует утверждение теоремы 2.

Следствие 2. Для функции $f \in UC(\mathbb{R})$ и чисел $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $0 < t \leq T$ верно неравенство

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T + (k+1)t) + \omega_3(f, T - (k-1)t) + 6 \left(\left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil + 1 \right) k^2 \omega_3(f, t),$$

в частности, при $k = 2$

$$2\omega_3(f, T) \leq \omega_3(f, T + 3t) + \omega_3(f, T - t) + 24 \left(\left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil + 1 \right) \omega_3(f, t).$$

Доказательство. Для произвольных $0 < t \leq T$ положим $N := \left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil$. Тогда

$Nt \leq T < (N+1)t$, поэтому

$$\begin{aligned} 2\omega_3(f, T) & \leq 2\omega_3(f, (N+1)t) \leq \\ & \leq \omega_3(f, (N+1+k)t) + \omega_3(f, (N+1-k)t) + 6(N+1)2^k \omega_3(f, t) \leq \\ & \leq \omega_3(f, T + (k+1)t) + \omega_3(f, T - (k-1)t) + 6 \left(\left\lceil \frac{T}{t} \right\rceil + 1 \right) 2^k \omega_3(f, t). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 512 с.

2. Шевчук, И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций / И.А. Шевчук. – К. : Наукова думка, 1992. – 224 с.
3. Никольский, С.М. Ряд Фурье с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // ДАН СССР. – 1946. – Т. 52, № 3. – С. 191 – 194.
4. Конягин, С.В. О вторых модулях непрерывности / С.В. Конягин // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 1–3.
5. Безкрила, С. І. Про треті модулі неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Украин. матем. журн. (в печати).

O.N. Nesterenko Some Properties of the Third Modulus of Continuity

We obtain new inequalities for third uniform modulus of continuity of functions uniformly continuous on an axis.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.10.13