УДК 517.983.54 + 519.6

О.В. Матысик

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В гильбертовом пространстве для решения операторных уравнений первого рода с неограниченным линейным и самосопряжённым оператором предлагается неявный итерационный метод. Изучен случай неединственного решения уравнения. Показано, что в этом случае метод сходится к решению с минимальной нормой. Для предложенного метода доказана сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с неограниченным линейным и самосопряженным оператором A, для которого нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если точное решение уравнения (1) всё же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы [1–6]. В настоящей работе предлагается неявный итерационный метод

$$\left(A^{2k} + B\right)x_{n+1} = Bx_n + A^{2k-1}y,\ x_0 = 0, k \in N . \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный положительный и самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмём оператор $B = bE, b > 0$, E – тождественный оператор. Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$\left(A^2 + B\right)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N . \tag{3}$$

2. Сходимость метода в энергетической норме. Сходимость методов (2) и (3) в сходной норме пространства H была изучена в статье [7]. Там показано, что метод (3) сходится при условии $b > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{\frac{1}{2k}}\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, в [7] получены априорные оценки погрешности метода и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ (см. [9–10]). Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме гильбертова пространства.

Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{4}$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}B^n(A^{2k} + B)^{-n} y = B^n(A^{2k} + B)^{-n} x.$

Как было показано в [7], $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки требовалось дополнительное предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$, где E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(AB^n(A^{2k} + B)^{-n} x, B^n(A^{2k} + B)^{-n} x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{b}{\lambda^{2k} + b}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдём максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda\left(\frac{b}{\lambda^{2k} + b}\right)^{2n}$ при $\lambda \in (-\infty; +\infty)$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $2s = 1$ функций, оцененных в [7]. Там показано, что при условии $b > 0$ $\max_{\lambda \in (-\infty;+\infty)} f(x) \le \left(\frac{b}{8kn}\right)^{\frac{1}{2k}}$.

Следовательно, справедлива оценка $\|x - x_n\|_A^2 \le \left(\frac{b}{8kn}\right)^{\frac{1}{2k}} \|x\|^2$. Отсюда $\|x - x_n\|_A \le \left(\frac{b}{8kn}\right)^{\frac{1}{4k}} \|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $2s = \frac{1}{2}$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [7], справедливо равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - B^n(A^{2k} + B)^{-n}\right](y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n}\right]^2 d\left(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta\right)$. Обозначим через $g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n}\right]^2$ подынтегральную функцию, а через $g_1(x) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n}\right]$, тогда $g(\lambda) = g_1(\lambda)\left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n}\right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в [7], где показано, что при условии $b > 0$ $g_1(\lambda) \le 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}$. При $b > 0$ имеем $\frac{b}{\lambda^2 + b} \le 1$ для $\forall\lambda \in (-\infty;+\infty)$, поэтому $1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} \le 1$. Отсюда $g(\lambda) \le 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}$. Таким образом, $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A^2 \le 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}\delta^2$, следовательно, $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le (2k)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{4k}}\delta$, $n \ge 1$. Поскольку $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x - x_n\right\|_A + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x - x_n\right\|_A + (2k)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{4k}}\delta$ и $\left\|x - x_n\right\|_A \to 0,\ n \to \infty$, то для сходимости $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \to 0,\ n \to \infty$ достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{4k}}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Итак, доказана

Теорема 1. *При условии* $b > 0$ *итерационный метод* (3) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{\frac{1}{4k}}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left(\frac{b}{8kn}\right)^{\frac{1}{4k}}\|x\| + (2k)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{4k}}\delta. \tag{5}$$

Оптимизируем оценку (5) по n. Для этого при заданном δ найдём такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = b\,2^{-\frac{3+2k}{2}}\,k^{-\frac{1+2k}{2}}\,\|x\|^{2k}\,\delta^{-2k}. \tag{6}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдем её оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{\frac{10k-3}{8k}}\,k^{\frac{2k-1}{8k}}\,\delta^{\frac{1}{2}}\,\|x\|^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *при условии* $b > 0$ *в энергетической норме имеет вид* (7) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (6).

Замечание 1. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* b. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* b *и, поскольку* $b>0$, *то за счет его выбора можно получить* $n_{опт}=1$, *т.е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять* $b_{опт}=2^{\frac{3+2k}{2}}k^{\frac{1+2k}{2}}\|x\|^{-2k}\delta^{2k}$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε $(0<\varepsilon<\|A\|)$ было $P_\varepsilon x=0$, $P_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, где $P_\varepsilon=\int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$. Так как $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-B^n\left(A^{2k}+B\right)^{-n}\right]y_\delta$, то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta=0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x=0$ и $P_\varepsilon y_\delta=0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H и, следовательно, для сходимости в исходной норме гильбертова пространства H не требуется истокообразной представимости точного решения.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором A следует перейти к уравнению $A^*Ax=A^*y$. Тогда при приближенном элементе y_δ метод (3) примет вид

$$\left(\left(A^*A\right)^{2k}+B\right)x_{n+1,\delta}=Bx_{n,\delta}+\left(A^*A\right)^{2k-1}A^*y_\delta,\ x_{0,\delta}=0,\ k\in N.$$

3. Сходимость метода в случае неединственного решения. Ниже считаем, что нуль является собственным значением оператора A, следовательно, уравнение (1) имеет неединственное решение.

Обозначим через $N(A)=\{x\in H \mid Ax=0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $A=A^*\geq 0$, $\|A\|\leq M$, $y\in H$, $b>0$, *тогда для итерационного метода* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n\to\Pi(A)y$, $\|Ax_n-y\|\to I(A,y)=\inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) *итерационный метод* (2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо. В последующем случае* $x_n\to P(A)x_0+x^*$, *где* x^* *– минимальное решение.*

Доказательство

Применим оператор A к (2), получим $A\left(A^{2k}+B\right)x_n=ABx_{n-1}+A^{2k}y$, где $y=P(A)y+\Pi(A)y$. Так как $AP(A)y=0$, то получим $\left(A^{2k}+B\right)\left(Ax_n-\Pi(A)y\right)=B\left(Ax_{n-1}-\Pi(A)y\right)$. Обозначим $Ax_n-\Pi(A)y=v_n$, $v_n\in M(A)$, тогда $\left(A^{2k}+B\right)v_n=Bv_{n-1}$. Отсюда $v_n=B\left(A^{2k}+B\right)^{-1}v_{n-1}$, следовательно, $v_n=B^n\left(A^{2k}+B\right)^{-n}v_0$. Имеем $A\geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т.е.

$(Ax,x)>0 \quad \forall x\in M(A)$. Так как $b>0$, то $\left\|B(A^{2k}+B)^{-1}\right\|\le 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|B^n\left(A^{2k}+B\right)^{-n}v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}\frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}dE_\lambda v_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon_0}\frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}dE_\lambda v_0\right\| + \left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|}\frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}dE_\lambda v_0\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0}dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+ q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|}dE_\lambda v_0\right\| = \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon_0)\|v_0\| < \varepsilon$$

при $n\to\infty$, $\varepsilon\to 0$. Здесь $\dfrac{b}{\lambda^{2k}+b}\le q(\varepsilon_0)<1$ при $\lambda\in\left[\varepsilon_0,\|A\|\right]$. Следовательно, $v_n\to 0$, откуда $Av_n\to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y\in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n-y\|\to\|\Pi(A)y-y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ (см. [8]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax=\Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\}\in H$ к $z\in H$ и из а) следует, что $Ax_n\to Az=\Pi(A)y$, значит, $\Pi(A)y\in A(H)$, и уравнение $\Pi(A)y=Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y\in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y=Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y=Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax=y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$\left(A^{2k}+B\right)x_n = Bx_{n-1}+A^{2k-1}\Pi(A)y = Bx_{n-1}+A^{2k}x^* =$$
$$=\left(A^{2k}+B\right)x_{n-1}-A^{2k}x_{n-1}+A^{2k}x^* = \left(A^{2k}+B\right)x_{n-1}-A^{2k}\left(x_{n-1}-x^*\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1}+A^{2k}\left(A^{2k}+B\right)^{-1}\left(x^*-x_{n-1}\right)$. Последнее равенство разобьем на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1}+\left(A^{2k}+B\right)^{-1}A^{2k}P(A)\left(x^*-x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1}+\left(A^{2k}+B\right)^{-1}A^{2k}\Pi(A)\left(x^*-x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} +$$
$$+\left(A^{2k}+B\right)^{-1}A^{2k}\left[\Pi(A)x^*-\Pi(A)x_{n-1}\right] = \Pi(A)x_{n-1}+\left(A^{2k}+B\right)^{-1}A^{2k}\left[x^*-\Pi(A)x_{n-1}\right],$$

так как $x^*\in M(A)$. Обозначим $\omega_n=\Pi(A)x_n-x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n-x^* = \Pi(A)x_{n-1}-x^*+\left(A^{2k}+B\right)^{-1}A^{2k}\left[x^*-\Pi(A)x_{n-1}\right]$ получим $\omega_n = \omega_{n-1}-\left(A^{2k}+B\right)^{-1}A^{2k}\omega_{n-1} = B\left(A^{2k}+B\right)^{-1}\omega_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n\to 0$, $n\to\infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n\to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n+\Pi(A)x_n\to P(A)x_0+x^*$. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. *Так как* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т.е. итерационный процесс* (2) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задач математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М: Наука, 1986. – 178с.
3. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
4. Денисов, А. М. Введение в терию обратных задач / А. М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
5. Бакушинский, А.Б. О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений / А.Б. Бакушинский, В.Н. Страхов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 181 – 185.
6. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рукицкий, В.Я. Стеценко. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
7. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 77–83.
8. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166 – 176.
9. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I – го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Известия АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1976. – № 2. – С. 19 – 23.
10. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решении операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37 – 42.

O.V. Matysik **On the Approximate Solution of Linear Equations with Unbounded Operator in the Hilbert Space**

In the Hilbert space for the solution of operator equations of the first kind with unlimited linear and self-adjoint operators to offer an implicit iterative method. The case of nonunique solutions of the equation. It is shown that in this case the method converges to the solution with a minimum norm. To prove the convergence of the proposed method in the energy norm of the Hilbert space, apriori error estimates. The use of the energy norm can make the method effective and when there is no information about sourcewise representation of the exact solution of the equation.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.09.13