

УДК 917.948

В.М. Мадорский**О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В работе рассматриваются способы приближенного решения нелинейных дифференциальных задач второго порядка. Для получения приближенного сеточного решения используется метод конечных разностей и квазиньютоновские методы. Сеточное решение восстанавливается с помощью сплайн-аппроксимации и отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева.

Среди приближенных методов решения краевых задач разностные методы в идейном плане наиболее прозрачны. Рассмотрим этот метод на примере решения 2π – периодической нелинейной задачи.

Пусть дана дифференциальная задача

$$F(x^{(n)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), t) = 0, \quad (1)$$

$$x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi), \dots, x^{(n-1)}(0) = x^{(n-1)}(2\pi), \quad (2)$$

где $x(t)$ – 2π -периодическая n раз дифференцируемая по t функция. Если же функция $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическая, то всегда можно перейти от $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодической задачи к 2π -периодической, введя замену $u = \omega t$.

Для решения дифференциальной задачи (1), (2) разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на N частичных отрезков точками $t_i = ih, h = \frac{2\pi}{N}, i = 0, 1, \dots, N$. Заменяем производные в дифференциальной задаче (1), (2) линейными комбинациями значений $x_i = x(t_i), i = 0, 1, \dots, N$, следующим образом:

$$x^{(n)}(t_i) = \sum_{j=0}^{N_A-1} c_{jmn} x_{m+i+j}, \quad (3)$$

где N_A – число точек аппроксимации производной, i – номер точки, в которой вычисляется значение производной, m – номер точки, по которой происходит аппроксимация значения производной (может принимать значения от 0 до N_A-1), n – порядок аппроксимируемой производной. Недостающие значения x_{-1}, x_{-2}, \dots и x_{N+1}, x_{N+2}, \dots определяем, используя периодичность функции. С помощью метода неопределенных коэффициентов находим значения коэффициентов c_{jmn} .

Осуществляя, таким образом, дискретизацию дифференциальной задачи (1), (2), получаем систему нелинейных уравнений в следующем операторном виде:

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \rightarrow R^n). \quad (4)$$

Уравнение (4) решаем одним из регуляризованных методов, предлагаемых в монографии [1].

Замечание. Матрицы регуляризованных процессов являются положительно-определенными, что позволяет рационально организовать вычисления. Рациональная организация вычислений позволяет утверждать, что количество операций умножения и деления на каждом шаге вычислительного процесса в регуляризованных процессах лишь незначительно выше, чем в стандартном методе Ньютона.

Рассмотрим краевую периодическую задачу Дуффинга:

$$x'' + \alpha x' + \beta x^m + \gamma x = F(\sin t, \cos t) \quad (5)$$

$$x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi). \quad (6)$$

Заменяя дифференциальную краевую задачу ее разностной аппроксимацией на сетке, получим систему нелинейных уравнений. При решении нелинейной системы квазиньютоновскими методами на каждой итерации необходимо решать линейную систему, матрица которой представляет собой матрицу Якоби системы нелинейных уравнений и является диагональной, причем количество диагоналей матрицы равно количеству точек, по которым были аппроксимированы производные. Если исходная матрица содержит n диагоналей, то при применении регуляризованных алгоритмов используют матрицу, которая содержит $(2n-1)$ диагоналей. Частным, но важным случаем рассмотренных выше подходов является метод, использующий пятидиагональную прогонку.

Так как производная функции, как правило, изменяется более плавно, чем сама функция, то для расчетов мы можем использовать матрицу Якоби, которая бы получалась при аппроксимации производных по трём точкам. При таком подходе мы практически не проигрываем в точности, но при этом можем очень значительно (на порядки) сократить количество операций, а значит и время решения задачи. Эта экономия возможна вследствие того, что матрица Якоби при таком подходе будет трехдиагональной, а матрица $f'(x_n)f'(x_n)$ пятидиагональной, следовательно, при решении линейной системы мы можем использовать вместо классического метода Гаусса, его вариант – метод матричной прогонки, который учитывает специфику таких систем и является очень быстрым.

Метод трёхдиагональной прогонки достаточно широко освещен в литературе. Гораздо больший интерес представляет метод пятидиагональной прогонки.

Метод прогонки для пятидиагональной матрицы.

Пусть необходимо найти решение системы n линейных уравнений с n неизвестными, причем матрица системы имеет пятидиагональный вид.

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 x_1 + d_1 x_2 + e_1 x_3 = g_1, \\ b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3 + e_2 x_4 = g_2, \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4 + e_3 x_5 = g_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n-2} x_{n-4} + b_{n-2} x_{n-3} + c_{n-2} x_{n-2} + d_{n-2} x_{n-1} + e_{n-2} x_n = g_{n-2}, \\ a_{n-1} x_{n-3} + b_{n-1} x_{n-2} + c_{n-1} x_{n-1} + d_{n-1} x_n = g_{n-1}, \\ a_n x_{n-2} + b_n x_{n-1} + c_n x_n = g_n. \end{array} \right. \quad (7)$$

Метод прогонки состоит из двух этапов — прямой прогонки и обратной.

1 этап: прямая прогонка.

Прямая прогонка состоит в том, что каждое неизвестное x_i выражается через x_{i+1} и x_{i+2} с помощью прогоночных коэффициентов A_i, B_i, C_i :

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i x_{i+2} + C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (8)$$

Из первого уравнения системы (7) найдём: $x_1 = -\frac{d_1}{c_1} x_2 - \frac{e_1}{c_1} x_3 + \frac{g_1}{c_1}$. С другой стороны, в силу (8) $x_1 = A_1 x_2 + B_1 x_3 + C_1$. Приравняв коэффициенты в обоих выражениях для x_1 , имеем, $A_1 = -d_1/c_1$, $B_1 = -e_1/c_1$, $C_1 = g_1/c_1$.

Используя простые рассуждения, нетрудно найти:

$$A_i = \frac{-a_i A_{i-2} B_{i-1} - b_i B_{i-1} - d_i}{p_i}, \quad B_i = -\frac{e_i}{p_i}, \quad C_i = \frac{-a_i (A_{i-2} C_{i-1} + C_{i-2}) - b_i C_{i-1} + g_i}{p_i},$$

где $p_i = c_i + a_i (A_{i-2} A_{i-1} + B_{i-2}) + b_i A_{i-1}$, $i = 3, 4, \dots, n-2$.

2 этап: обратная прогонка

Обратная прогонка состоит в последовательном вычислении неизвестных x_i . Воспользуемся формулой (8) при $i=n-2$ и последним уравнением системы (7), после несложных преобразований имеем формулы, по которым находим x_n и x_{n-1} :

$$x_n = \frac{C_n A_{n-1} - A_n C_{n-1}}{B_n A_{n-1} - B_{n-1} A_n}, \quad x_{n-1} = \frac{C_{n-1} - B_{n-1} x_n}{A_{n-1}}.$$

Далее, используя формулу (8) и найденные на первом этапе значения прогоночных коэффициентов, последовательно вычисляем все неизвестные $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_1$.

Нетрудно подсчитать число действий умножения и деления, необходимых для решения системы (7) с помощью метода прогонки. Получим, что при реализации метода прогонки для пятидиагональной матрицы выполняется $14n$ операций умножения и деления. Для сравнения отметим, что при использовании метода Гаусса число действий умножения и деления близко к $n^3/3$. Естественно, если матрица системы позволяет использовать метод прогонки, то следует использовать именно его.

Перейдем к обсуждению численного эксперимента, где показаны преимущества использования регулировки шага β_n .

Рассмотрим задачи:

$$x'' + x^3 = -\cos t + \cos^3 t, \quad x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi), \quad (9)$$

$$x'' + x^3 = -10 \sin t + 1000 \sin^3 t, \quad x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \quad (10)$$

$$x'' + x^3 = -10 \cos t + 1000 \cos^3 t, \quad x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \quad (11)$$

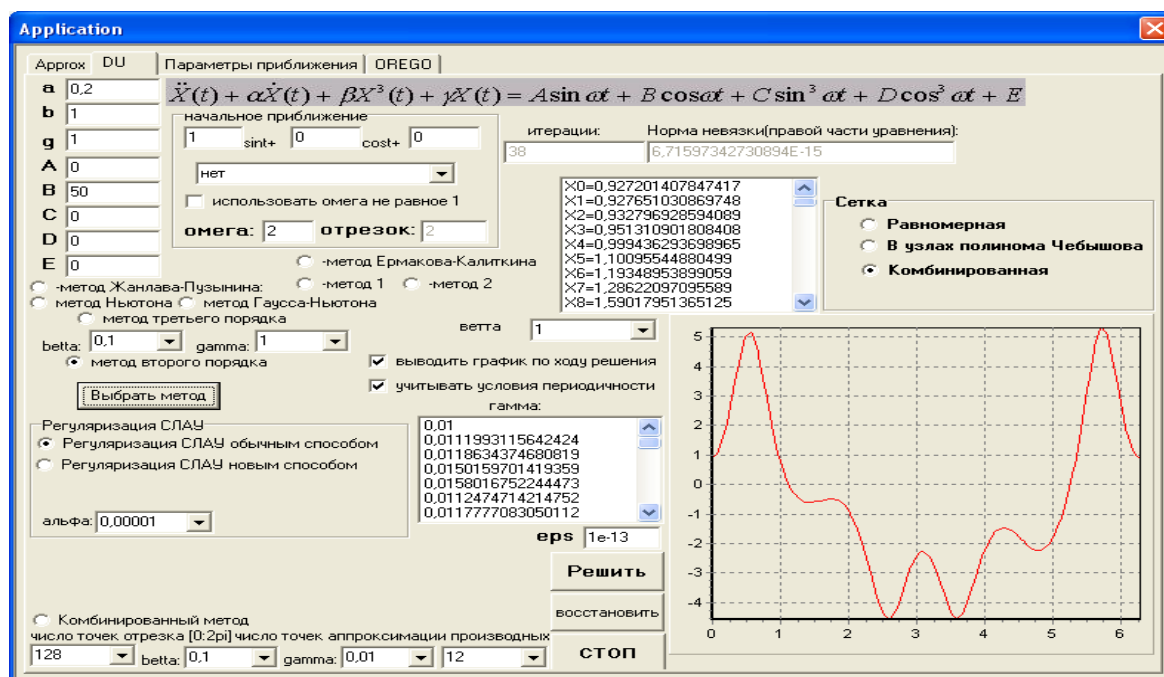
Нетрудно заметить, что точное решение для задач (9), (10), (11) будет соответственно $x(t) = \cos t$, $x(t) = 10 \sin t$, $x(t) = 10 \cos t$.

Результаты просчетов сведены в таблицу.

Таблица – Влияние шаговой длины на сходимость итерационных процессов

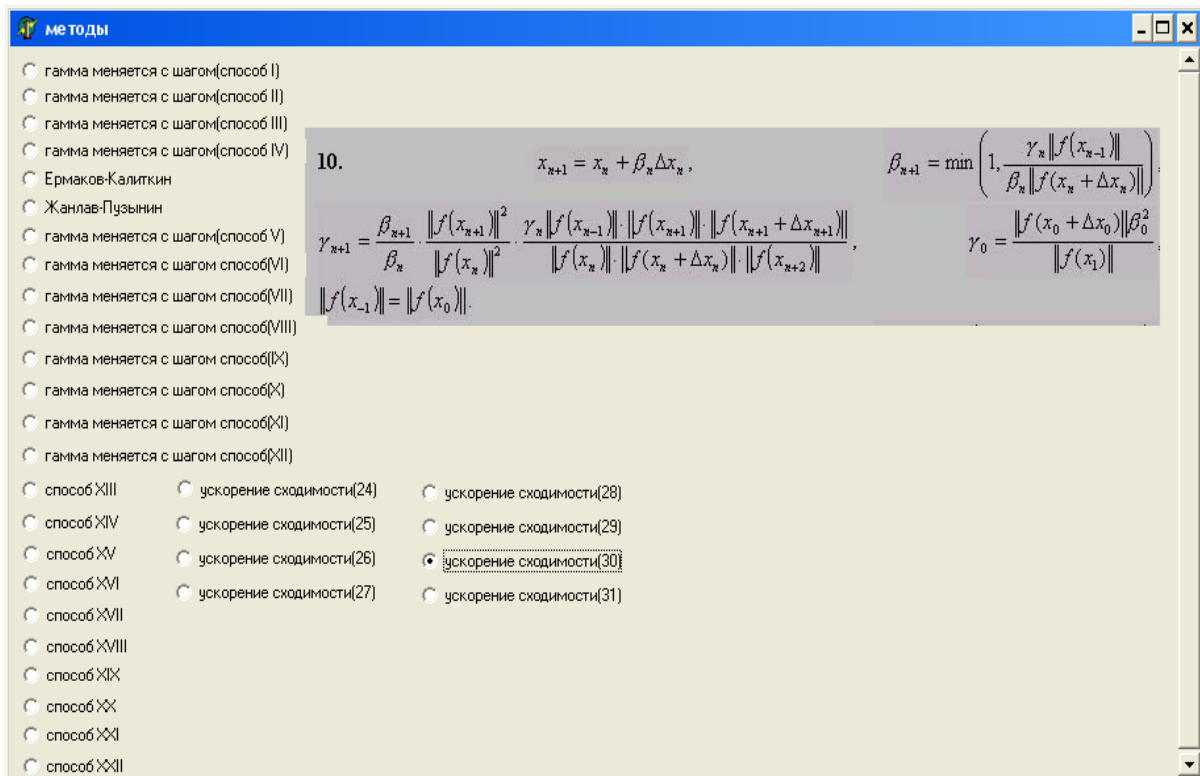
| Метод | Задача | Входные данные | Результат |
|--------------------------------------|--------|---|-------------|
| Стрельбы | (9) | a=1.4, b=0.1, m=2π | Не работает |
| Стрельбы с множителем β _n | (9) | a=1.4, b=0.1, m=2π, eps=10 ⁻⁵ | 23 итерации |
| Стрельбы | (10) | a=10.3, b=2, m=π/2 | Не работает |
| Стрельбы с множителем β _n | (10) | a=10.3, b=2, m=π/2, eps=10 ⁻⁵ | 41 итерация |
| Стрельбы с множителем β _n | (11) | a=10.3, b=2, m=0 | Не работает |
| Параллельной пристрелки | (9) | l=3, a _i =2cost _i , b _i =-2sint _i | Не работает |
| Пар.пристр. с множ. β _n | (9) | l=3, a _i =2cost _i , b _i =-2sint _i , eps=10 ⁻⁵ | 45 итераций |
| Параллельной пристрелки | (10) | l=2, a _i =16sint _i , b _i =16cost _i | Не работает |
| Пар.пристр. с множ. β _n | (10) | l=2, a _i =16sint _i , b _i =16cost _i , eps=10 ⁻⁵ | 38 итераций |
| Квазилинеаризации | (10) | x _j ⁰ =sint _j | Не работает |
| Квазилинеар. с множ. β _n | (10) | x _j ⁰ =sint _j , eps=10 ⁻⁵ | 10 итераций |
| Квазилинеаризации | (11) | x _j ⁰ =11cost _j +2 | Не работает |
| Квазилинеар. с множ. β _n | (11) | x _j ⁰ =11cost _j +2, eps=10 ⁻⁵ | 16 итераций |

Как видно из предлагаемой выше таблицы, методы стрельбы, параллельной пристрелки и квазилинеаризации являются неэффективными при данных начальных приближениях. Если же применять стрельбу, параллельную пристрелку и квазилинеаризацию в сочетании с квазиньютоновскими методами, где шаговые длины находятся по различным формулам [1], то методы начинают «работать», при этом скорость сходимости существенно зависит от способа выбора шаговой длины.



В предлагаемом выше окне программы решается существенно нелинейная периодическая задача Дуффинга. Программа позволяет менять вид уравнения, способ регулирования шага, начальное приближение, порядок метода и способ восстановления сеточного решения.

Среди способов восстановления сеточного решения, как показывает вычислительная практика решения существенно нелинейных задач теории колебаний, наиболее эффективным является метод восстановления решения отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева первого рода. Это связано с тем, что ошибки вычислений на компьютере подчиняются нормальному закону. Тем не менее, требовать точности вычислений большей чем $1e - 10$ по норме невязки нецелесообразно, поскольку может наступить так называемая «разболтка» (приближенные решения начинают хаотически блуждать вокруг точного решения). В приведенной выше таблице приближенные решения получены значительно более грубыми в связи с тем, что при рассмотренных начальных приближениях, которые являлись весьма «плохими», разболтка наступала уже при норме невязки порядка $1e - 5$. Для получения более точного решения целесообразно применять методы более высокого порядка, например, методы локально сходящиеся с кубической скоростью [1].



Рассмотренные выше методы, обладая достаточно широкой областью сходимости и локально квадратичной скоростью сходимости, в случае большой размерности нелинейных систем могут потребовать значительных временных затрат для их решения. Предлагаемые в [1] нелокальные методы, локально сходящиеся с кубической скоростью, обладают более узкой областью сходимости, но, как показала вычислительная практика решения существенно нелинейных задач теории колебания, если построить гибридный из нелокальных методов, локально сходящихся с квадратичной скоростью и методов локально сходящихся с кубической скоростью, гибридный алгоритм оказывается существенно эффективнее. Переход может осуществляться при

норме невязки порядка $10^{-1} \div 10^{-2}$. В предлагаемом ниже окне программы показана работа «гибрида». Как видно из окна программы, начальное приближение может быть достаточно «плохим», и тогда на первом этапе мы применяем нелокальный квазиньютоновский метод, локально сходящийся с квадратичной скоростью. Метод «работает» до тех пор, пока норма невязки на приближенном решении нестановится достаточно малой, например, норма невязки становится порядка $1e-1 - 1e-3$. Далее включается нелокальный, как правило, нерегуляризованный метод третьего порядка. Этот метод позволяет получить достаточно точное приближенное сеточное решение. Норма невязка на этом сеточном решении получается порядка $1e-10 - 1e-13$. После получения такого достаточно точного сеточного решения включается механизм восстановления с помощью сплайн-аппроксимации или аппроксимации рядами Фурье по полиномам Чебышева первого рода. Второй способ аппроксимации, как видно из окна программы, оказывается предпочтительнее.

Form1
Рассматривается уравнение
 $X'' + UX' + VX^3 + SX = F(\cos(t), \sin(t)), X(0) = X(2\pi)$ $U = 0.2$ $V = 1$ $S = 1$

Правая часть $F(\cos(t), \sin(t)) = E\cos(t) + H\sin(t) + G(\text{Acos}(t) + \text{Bsin}(t))^3$
 $E = 50$ $H = 0$ $G = 0$ $A = 0$ $B = 5$

Начальные приближения: $C\cos(t) + D\sin(t)$ Радиус единственности
 $C = 10$ $D = 10$ $q = 0,1$ $0,000466301254152411$

Точность метода НЬЮТОНА $1E-1$
Точность метода 3-ГО ПОРЯДКА $1E-13$
Начальное количество шагов 48

Количество шагов 48
Бета(-1) 1 Бета(0) $1E-1$

НЕЛОК. РЕГУЛЯРИЗ. МЕТОД НЬЮТОНА
Кол-во итераций 36
Норма функции $0,00609784610089848$
Бета 1

МЕТОД 3-го ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ
Кол-во итераций 2
Норма функции $8,50211395273947E-16$
Бета $0,999999997309124$

Аппроксимация
ФУРЬЕ 90 СПЛАЙНЫ 5
Точность аппроксимации
 $2,82349478552357E-8$ $14,9418330277041$

График функции

Найденное решение
 $x[1] = 1,58397195906578$
 $x[2] = 1,8499436667217$
 $x[3] = 2,78957347031581$
 $x[4] = 4,05888642967312$
 $x[5] = 4,8647389747942$
 $x[6] = 4,46880726104952$
 $x[7] = 3,21451998771832$
 $x[8] = 1,9262501199394$
 $x[9] = 1,00381943393614$
 $x[10] = 0,486308251348564$
 $x[11] = 0,293533724407296$
 $x[12] = 0,318240425301736$
 $x[13] = 0,446143101945733$
 $x[14] = 0,561407181377737$
 $x[15] = 0,551060886323436$
 $x[16] = 0,310600763244739$
 $x[17] = -0,252454888379721$
 $x[18] = -1,2165957599522$
 $x[19] = -2,6001289886436$
 $x[20] = -4,14396070943592$
 $x[21] = -5,03272489469843$

Начать работу Продолжить Прервать процесс Выход

Метод конечных разностей также эффективно применяется при решении неперриодических краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. В качестве тестового примера может быть рассмотрена краевая задача с полиномиальной правой частью:

$$x'' + \alpha x' + \beta x + \gamma x^m = f(t), \text{ где } f(t) - \text{полином}$$

$$A_1 x(a) + A_2 x'(a) = A; B_1 x(b) + B_2 x'(b) = B, x \in [a, b]$$

Ниже предлагается скриншот реализации программы решения существенно нелинейной неперриодической задачи с полиномиальной правой частью. При восстановлении полученного приближенного решения, как показала вычислительная практика, целесообразно использовать аппроксимацию кубическими сплайнами или сплайнами пятого порядка. Количество точек разбиения отрезка интегрирования должно быть в пределах 200–500. Значительное увеличение числа точек разбиения

может привести к нежелательному накоплению ошибок округления и счета. Аппроксимацию производных, участвующих в задаче, целесообразно осуществлять достаточно точно. С учетом требуемой точности приближенного решения 7–11 точек достаточно для хорошей аппроксимации первой и второй производной задачи.

В подтверждение всего вышесказанного можно рассмотреть предлагаемое окно программы.

Решение нелинейной краевой задачи ДUFFинга

О программе

Решение краевой задачи ДUFFинга | Процесс решения СДУ

Уравнение

Правая часть
 периодическая многочлен

Общий вид
 $x'' + \alpha x + \beta x^m + \gamma x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^p$

$\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 0$ $m = 4$ $p = 8$

| a0 | a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 | a7 | a8 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Решаемое уравнение: $x'' + x^4 = 2 + t^8$

Отрезок
 a=0 b=2 n=250 h=0.008
 Число узлов для аппроксимации производных= 11

Краевые условия
 $a_1 x(a) + b_1 x'(a) = A_1$ a1=1 b1=0 A1=0
 $a_2 x(b) + b_2 x'(b) = A_2$ a2=1 b2=1 A2=8

Метод решения СДУ
 Регуляриз. метод Ермакова-Калиткина
 Регуляриз. модифицир. метод Ньютона
 Модифицированный метод Ньютона
 Метод Ермакова-Калиткина
 Метод Жанлава-Пузырина

Аппроксимация
 ряд Фурье сплайн
 Гармоники= 16 Число узлов= 500 Порядок сплайна= 5
 Ошибка (Фурье)= 1.62550E+04
 Ошибка (сплайн)= 8.08346E-12

Решение Количество итераций= 83
 Норма невязки = 7.19688E-14

| | |
|---------|-----------------------------|
| t=0,0 | x[0]=0,0 |
| t=0,008 | x[1]=0,0000639999999999998 |
| t=0,016 | x[2]=0,0002599999999999995 |
| t=0,024 | x[3]=0,0005759999999999993 |
| t=0,032 | x[4]=0,0010239999999999991 |
| t=0,04 | x[5]=0,0015999999999999988 |
| t=0,048 | x[6]=0,0023039999999999986 |
| t=0,056 | x[7]=0,0031359999999999983 |
| t=0,064 | x[8]=0,0040959999999999981 |
| t=0,072 | x[9]=0,0051839999999999979 |
| t=0,08 | x[10]=0,0063999999999999976 |
| t=0,088 | x[11]=0,0077439999999999974 |
| t=0,096 | x[12]=0,0092159999999999971 |
| t=0,104 | x[13]=0,0108159999999999969 |
| t=0,112 | x[14]=0,0125439999999999967 |
| t=0,12 | x[15]=0,0143999999999999964 |
| t=0,128 | x[16]=0,0163839999999999962 |
| t=0,136 | x[17]=0,018495999999999996 |
| t=0,144 | x[18]=0,0207359999999999957 |
| t=0,152 | x[19]=0,0231039999999999955 |
| t=0,16 | x[20]=0,0255999999999999952 |
| t=0,168 | x[21]=0,028223999999999995 |
| t=0,176 | x[22]=0,0309759999999999948 |
| t=0,184 | x[23]=0,0338599999999999945 |
| t=0,192 | x[24]=0,0368639999999999943 |
| t=0,2 | x[25]=0,039999999999999994 |
| t=0,208 | x[26]=0,0432639999999999938 |
| t=0,216 | x[27]=0,0466559999999999935 |
| t=0,224 | x[28]=0,0501759999999999933 |
| t=0,232 | x[29]=0,0538239999999999931 |
| t=0,24 | x[30]=0,0575999999999999928 |
| t=0,248 | x[31]=0,0615039999999999926 |
| t=0,256 | x[32]=0,0655359999999999923 |
| t=0,264 | x[33]=0,0696959999999999921 |

Старт Стоп Формулы дифференцирования График не выводить результаты

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005 – 186 С.

V.M. Madorski On Approximate Solution of Non-linear Differential Problem of Second Order

The ways of approximate solution of non-linear differential problems of second order are considered in the article. The method of finite difference and quasiNewton methods are used to get approximate grid solution. Grid solution is restored with the help of spline-approximate and the segment of Furie by Chebushov's polynomial

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.10.13