УДК 513.82

Е.В. Зубей, А.А .Юдов

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО, КАСАТЕЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА К КОТОРЫМ ВО ВСЕХ ТОЧКАХ ЯВЛЯЮТСЯ ИЗОТРОПНЫМИ

В работе изучаются одномерные подмногообразия пространства Минковского. Рассматривается класс многообразий, касательные подпространства к которым во всех точках являются изотропными. Для таких многообразий строится канонический репер, и находятся дифференциальные инварианты, определяющие указанные многообразия с точность до движений пространства Минковского.

Группу Ли G движений пространства ${}^1R_4$ (пространства Минковского) будем задавать как совокупность матриц вида

$$a=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & A\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $t=\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\\ t_4\end{pmatrix}$, а 4×4 матрица A удовлетворяет условию:

$$A\varepsilon_{4,1}A^T=\varepsilon_{4,1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{4,1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ будет задаваться как совокупность матриц вида:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ t & B\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где 4×4 матрица B удовлетворяет условию $B\varepsilon_{4,1}+\varepsilon_{4,1}B=0$.

Точки пространства ${}^1R_4$ будем задавать в виде:

$$\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=x. \tag{4}$$

Группа G действует в пространстве ${}^1R_4$ слева по правилу:

$$x\to a\cdot x. \tag{5}$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства ${}^1R_4$ и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства:

$$^1R_4 : G = H \otimes T_4. \tag{6}$$

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_4 группы Ли T_4:

$$\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4. \tag{7}$$

Базис в алгебре Ли $\overline{G}$ группы Ли G движений пространства $^1R_4$ берется следующим образом:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_2 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52},$$

$$i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}, \tag{8}$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5)-матрица, у которой в α-й строке, β-м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули.

Причем векторы $i_5, i_6, ... i_{10}$ образуют базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H, векторы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют базис алгебры τ_4, а операция коммутирования в алгебре Ли $\overline{G}$ задается в виде:

$$[A, B] = AB - BA \;\; A, B \in \overline{G}. \tag{9}$$

С точностью до изоморфизма получается 13 подгрупп Ли группы Ли вращений пространства $^1R_4$: G_1 – G_{13}. Алгебры Ли $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}, \overline{G_3}$, $\overline{G_4}$, $\overline{G_5}$, $\overline{G_6}$, $\overline{G_7}$, $\overline{G_8}$, $\overline{G_9}$, $\overline{G_{10}}$, $\overline{G_{11}}$, $\overline{G_{12}}$, $\overline{G_{13}}$, задаются соответственно базисами $\{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}$, $\{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}$, $\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Классификация кривых пространства Минковского

Рассмотрим одномерные подмногообразия пространства $^1R_4$. Пусть (D_0, f) – одномерное подмногообразие (кривая) пространства $^1R_4$, причем D_0 – интервал на числовой прямой, содержащий точку ноль и $\pi(e) = f(0)$. Рассмотрим касательное пространство $K_1 = T_{\pi(e)}(I_m f)$ к подмногообразию (D_0, f) в точке $\pi(e)$. Пространство K_1 может быть либо евклидовым, либо мнимоевклидовым, либо изотропным. Ниже классифицируются по эквивалентности относительно основной группы одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке изотропное касательное пространство.

Предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ изотропного типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(I_m f) = \{i_1 + i_3\}$. Ему соответствует прообраз $K_1' = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_1 + i_3, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H-пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства $T_{\pi(e)}(^1R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K_1' в H-пространстве Z_1 [1] $Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) | K \in Q_1\}$. H_1 определяется условием:

$$H_1 = \{h \in H | Adh(K_1') = K_1'\}, \tag{10}$$

а ее алгебра Ли $\overline{H_1}$ условием:

$$\overline{H}_1 = \{v \in \overline{H} | adv(K_1') = [v, K_1'] \subset K_1'\}. \tag{11}$$

Пусть

$$\varphi = \lambda i_5 + \mu i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in \overline{\mathrm{H}}, \tag{12}$$

$$k = i_1 + i_3 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in \mathrm{K}'_1. \tag{13}$$

Тогда:

$$ad\varphi = [\varphi, k] = \lambda(i_5 - i_8) + \mu i_6 + \nu(i_7 + i_{10}) + s i_9 + \psi, \tag{14}$$

где $\psi \in \overline{H}$.

По условию $ad\varphi(k) \subset K'_1$ получим: $\mu = -\sigma, \nu = -s$. Таким образом, $\overline{H}_1 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}$ и совпадает с $\overline{G}_{13}$, а группа H_1 совпадает с группой G_{13}. Группа H образует следующую цепочку по включению:

$$H \supset G_{13}.$$

Условие (4) из [1]: $\dim H - \dim H_1 = \dim Q_1$ не выполняется, т.к. $\dim H - \dim H_1 = 6 - 4 = 2$, а $\dim Q_1 = 3$.

Система Пфаффа, задающая исходное пространство K'_1 будет иметь вид:

$$w^2 = 0, w^4 = 0, w^1 - w^3 = 0. \tag{15}$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$w^1 \wedge w_1^2 + w^3 \wedge w_3^2 + w^4 \wedge w_4^2 = 0, w^1 \wedge w_1^4 + w^2 \wedge w_2^4 + w^3 \wedge w_3^4 = 0,$$
$$w^2 \wedge w_2^1 + w^3 \wedge w_3^1 + w^4 \wedge w_4^1 - w^1 \wedge w_1^3 - w^2 \wedge w_2^3 - w^4 \wedge w_4^3 = 0. \tag{16}$$

Отсюда в силу системы (15):

$$\begin{cases} w^1 \wedge w_1^2 + w^3 \wedge w_3^2 = 0; \\ w^1 \wedge w_1^4 + w^3 \wedge w_3^4 = 0; \\ w^3 \wedge w_3^1 - w^1 \wedge w_1^3 = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} w^1 \wedge \left(w_1^2 - w_2^3\right) = 0, \\ w^1 \wedge \left(w_1^4 + w_3^4\right) = 0, \\ w^3 \wedge \left(w_3^1 - w_3^1\right) = 0; \end{cases} \tag{17}$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\begin{cases} w_1^2 - w_2^3 = \lambda w^1, \\ w_1^4 - w_3^4 = \mu w^1; \end{cases} \tag{18}$$

Вместе с (15) получим систему

$$\begin{cases} w_1^2 - w_2^3 - \lambda w^1 = 0, \\ w_1^4 - w_3^4 - \mu w^1 = 0, \\ w^1 - w^3 = 0, \\ w^2 = 0, \\ w^4 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Эта система определяет подпространство $K'_2 = d\pi_{|e}^{-1}\left(T_{\pi_1(e)}\left(\operatorname{Im} f_1\right)\right)$ алгебры $\overline{G}_{13}$ ([1] §1,§2). Пространство K'_2, определяемое системой (19), состоит из векторов:

$$\left\{ t\left(i_1 + i_3\right) - \frac{\lambda t}{2}\left(i_5 + i_8\right) + \frac{\mu t}{2}\left(i_7 + i_{10}\right) + \nu i_6 + \theta i_9 \right\}, \tag{20}$$

где v, θ–произвольные, а λ, μ–фиксированные числа.

Надо изучить H_1–орбиты пространств вида (20) при всевозможных λ, μ. Найдем группу стационарности H_2 пространства K_2' и ее алгебру Ли $\overline{H}_2$. Алгебра Ли $\overline{H}_2$ определяется условием:

$$\overline{H}_2 = \{\varepsilon \in H_1 \mid [\varepsilon, K_2'] \subset K_2'\}.$$

Пусть

$$k_2 = t(i_1 + i_3) - \frac{\lambda t}{2}(i_5 + i_8) + \frac{\mu t}{2}(i_7 + i_{10}) + v i_6 + \theta i_9 \ ,$$

$$\varepsilon = \alpha i_6 + \beta i_9 + \gamma(i_5 + i_8) + \delta(i_7 + i_{10}),$$

$$ad\varepsilon = [\varepsilon, k_2] = \alpha t(i_1 + i_3) + \left(\frac{\alpha\mu t}{2} + \frac{\beta\lambda t}{2}\right)(i_7 + i_{10}) + \left(\frac{\beta\mu t}{2} - \frac{\alpha\lambda t}{2}\right)(i_5 + i_8),$$

Но так как $ad\varepsilon(k_2) \subset K_2'$, то $\beta\lambda = 0, \beta\mu = 0$, и так как λ, μ – фиксированные, то получаем $\overline{H}_2 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}$ и совпадает с $\overline{G}_8$, а группа H_2 совпадает с группой G_8. Группа G_{13} образует следующую цепочку по включению:

$$H \supset G_{13} \supset G_8 .$$

Рассмотрим систему (18) и найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$w_1^1 \wedge w_1^2 + w_1^2 \wedge w_2^2 + w_1^3 \wedge w_3^2 + w_1^4 \wedge w_4^2 - w_2^1 \wedge w_1^3 - w_2^2 \wedge w_2^3 - w_2^3 \wedge w_3^3 - w_2^4 \wedge w_4^3 -$$
$$- \lambda w^2 \wedge w_2^1 - \lambda w^3 \wedge w_3^1 - \lambda w^4 \wedge w_4^1 = 0,$$

$$w_1^1 \wedge w_1^4 + w_1^2 \wedge w_2^4 + w_1^3 \wedge w_3^4 + w_1^4 \wedge w_4^4 + w_3^1 \wedge w_1^4 + w_3^2 \wedge w_2^4 + w_3^3 \wedge w_3^4 + w_3^4 \wedge w_4^4 -$$
$$- \mu w^3 \wedge w_3^1 - \mu w^2 \wedge w_2^1 - \mu w^4 \wedge w_4^1 - \mu w^1 \wedge w_1^1 = 0.$$

В силу системы (19) и системы (*)

$$\begin{cases} w_2^1 = w_1^2, \\ w_3^1 = w_1^3, \\ w_4^1 = w_1^4, \\ w_3^2 = -w_2^3, \\ w_4^2 = -w_2^4, \\ w_4^3 = -w_3^4. \end{cases} \qquad (*)$$

Получим

$$\begin{cases} \left(\lambda w_1^3 + \mu w_2^4 + \lambda w_1^3\right) \wedge w^1 = 0, \\ \left(-\lambda w_2^4 + \mu w_1^3 + \mu w_1^3\right) \wedge w^1 = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Применяя лемму Картана к системе (21), получим

$$\begin{cases} \left(2\lambda w_1^3 + \mu w_2^4\right) = p w^1, \\ \left(-\lambda w_2^4 + 2\mu w_1^3\right) = q w^1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} w_1^3 = \dfrac{\lambda p + \mu q}{2\lambda^2 + 2\mu^2} w^1, \\ w_2^4 = \dfrac{\mu p - \lambda q}{\lambda^2 + \mu^2} w^1. \end{cases} \qquad (22)$$

Введем замену $\begin{cases} \delta = \dfrac{\lambda p + \mu q}{2\lambda^2 + 2\mu^2}, \\ \sigma = \dfrac{\mu p - \lambda q}{\lambda^2 + \mu^2}; \end{cases}$ тогда (22) перепишется в виде

$$\begin{cases} w_1^3 = \delta w^1, \\ w_2^4 = \sigma w^1. \end{cases} \tag{23}$$

В силу системы (23), система (19) примет вид

$$\begin{cases} w_1^2 - w_2^3 - \lambda w^1 = 0, \\ w_1^4 + w_3^4 - \mu w^1 = 0, \\ w^1 - w^3 = 0, \\ w^2 = 0, \\ w^4 = 0, \\ w_1^3 = \delta w^1, \\ w_2^4 = \sigma w^1. \end{cases} \tag{24}$$

Эта система определяет подпространство $K_3^{'} = d\pi_{|e}^{-1}\left(T_{\pi_1(e)}(\mathrm{Im}\, f_1)\right)$ алгебры $\overline{G}_8$ ([1] §1,§2). Пространство $K_3^{'}$, определяемое системой (1.24), состоит из векторов:

$$\left\{ t(i_1 + i_2) - \frac{\lambda t}{2}(i_5 - i_8) + \frac{\mu t}{2}(i_7 + i_{10}) + \delta t i_6 + \sigma t i_9 \right\}. \tag{25}$$

Надо изучить H_1–орбиты пространств вида (25) при всевозможных δ, σ Найдем группу стационарности H_3 пространства $K_3^{'}$ и ее алгебру Ли $\overline{H_3}$. Алгебра Ли $\overline{H_3}$ определяется условием:

$$\overline{H_3} = \left\{ \xi \in H_3 \middle\| \left[\xi, K_3^{'}\right] \subset K_3^{'} \right\}.$$

Пусть

$$k_3 = t(i_1 + i_3) - \frac{\lambda t}{2}(i_5 - i_8) + \frac{\mu t}{2}(i_7 + i_{10}) + \delta t i_6 + \sigma t i_9,$$

$$\xi = \alpha(i_5 - i_8) + \beta(i_7 + i_{10}) + \gamma i_6,$$

$$ad\xi(k_3) = [\xi, k_3] = \gamma t(i_1 + i_3) + \left(-\frac{\gamma\lambda t}{2} - \alpha\delta t - \sigma\beta t \right)(i_5 - i_8) + \left(-\frac{\gamma\mu t}{2} + \alpha\sigma t - \delta\beta t \right)(i_7 + i_{10}).$$

Но так как $ad\xi(k_3) \subset K'_3$, то $a = 0, b = 0$, и получаем $\overline{H}_3 = \{i_6\}$ и совпадает с $\overline{G}_2$, а группа H_3 совпадает с группой G_2. Группа G_8 образует следующую цепочку по включению:

$$H \supset G_{13} \supset G_8 \supset G_2.$$

Рассмотрим систему (23) и найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$w_1^1 \wedge w_1^3 + w_1^2 \wedge w_2^3 + w_1^3 \wedge w_3^3 + w_1^4 \wedge w_4^3 - \delta w^2 \wedge w_2^1 - \delta w^3 \wedge w_3^1 - \delta w^4 \wedge w_4^1 = 0,$$

$$w_2^1 \wedge w_1^4 + w_2^2 \wedge w_2^4 + w_2^3 \wedge w_3^4 + w_2^4 \wedge w_4^4 - \sigma w^2 \wedge w_2^1 - \sigma w^3 \wedge w_3^1 - \sigma w^4 \wedge w_1^4 = 0.$$

В силу системы (24) получим:

$$\begin{cases} w^1 \wedge (\lambda w_2^3 - \mu w_3^4) = 0, \\ w^1 \wedge (\lambda w_3^4 - \mu w_2^3) = 0. \end{cases}$$

Применим лемму Картана:

$$\begin{cases} \lambda w_2^3 - \mu w_3^4 = s w^1, \\ \lambda w_3^4 - \mu w_2^3 = r w^1. \end{cases} \tag{26}$$

Перепишем (26) в виде:

$$\begin{cases} w_2^3 = a w^1, \\ w_3^4 = b w^1, \end{cases} \tag{27}$$

где $\begin{cases} a = \dfrac{s\lambda + r\mu}{\lambda^2 - \mu^2}; \\ b = \dfrac{s\mu + r\lambda}{\lambda^2 - \mu^2}. \end{cases}$

В силу системы (27), система (24) перепишется в виде

$$w_1^2 = (a+\lambda)w^1, w_1^4 = (\mu - b)w^1, w^1 - w^3 = 0, w^2 = 0, w^4 = 0, w_1^3 = \delta w^1, w_4^2 = \sigma w^1,$$
$$w_2^1 = a w^1, w_3^4 = b w^1. \tag{28}$$

Таким образом, канонизация репера закончена. Все формы выражены через базисную форму. Коэффициенты при этом называются дифференциальными вариантами.

Теорема. *Совокупность изотропных кривых пространства Минковского, имеющая характеристическую цепочку* $H \supset G_{13} \supset G_8 \supset G_2 \supset e$, *имеет характеризующую систему* (28) *и зависит от шести дифференциальных вариантов* (λ, μ, p, q, r, s).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдов, А. А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства $^2R_4$ / А. А. Юдов // Деп. ВИНИТИ. – Минск, 1989. – № 1498-В89.
2. Юдов, А.А. О редуктивности однородных пространств с фундаментальной группой *G* – группой движений пространства 1*R*4 / А.А. Юдов, О.В. Пинчук // Вестник БрГУ. – 2011. – № 1. – С. 123–128.
3. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой *G* – группой движений пространства $^2R_4$ / А.А.Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. – № 1(30). – С. 35–41.

E.V. Zubej, A.A. Yudov **Grading Curve of Minkowski Space to Tangent Space which at all Points are Isotropic**

In this paper we study one-dimensional submanifold of Minkowski space. We consider the class of manifolds, tangent subspace to which all points are isotropic. For such manifolds constructed canonical frame, differential invariants and are defining these varieties up to motions of Minkowski space.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.10.13