

УДК 517.5

Т.Н. Жернова, И.В. Кальчук, Ю.И. Харкевич

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА $Lip\ 1$ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА ПУАССОНА

В работе исследуются аппроксимативные свойства интегралов типа Пуассона, а именно найдены полные асимптотические разложения для точной верхней грани отклонений функций с класса $Lip\ 1$ от их интегралов типа Пуассона в равномерной метрике.

Пусть C – пространство 2π -периодических непрерывных функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_x |f(x)|.$$

Множество функций $f \in C$, которые удовлетворяют неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h|,$$

будем обозначать через $Lip\ 1$ и называть классом Липшица порядка 1.

Рассмотрим краевую задачу (в единичном круге) для уравнения

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах. То есть уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (0 \leq \rho < 1, -\pi \leq x \leq \pi,) \tag{2}$$

Решение уравнения (2), что удовлетворяет граничное условие

$$u(\rho, x)|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{3}$$

где $f(x)$ – суммируемая 2π -периодическая функция, можем записать в виде

$$P(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \tag{4}$$

Функцию (4) принято называть интегралом Пуассона функции f , а величину

$$K_1(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1 - \rho^2}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)}$$

называют ядром Пуассона.

Рассмотрим теперь краевую задачу (в единичном круге) для уравнения

$$\Delta(\Delta u) = 0. \tag{5}$$

Решение уравнения (5), что удовлетворяет граничные условия

$$u(\rho, x)|_{\rho=1} = f(x), \quad \frac{\partial u(\rho, x)}{\partial \rho}|_{\rho=1} = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \tag{6}$$

можем записать в виде

$$B(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2) \right] \rho^k \cos kt \right\} dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \tag{7}$$

Функцию (7) принято называть бигармоническим интегралом Пуассона функции f , а величину

$$K_2(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2) \right] \rho^k \cos kt = \frac{(1 - \rho^2)^2 (1 - \rho \cos t)}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)^2}$$

называют бигармоническим ядром Пуассона.

В работе будем рассматривать некоторое обобщение интеграла Пуассона и бигармонического интеграла Пуассона, а именно интеграл вида

$$\mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K(\rho, t) dt, \quad (8)$$

который принято называть интегралом типа Пуассона, где

$$K(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \alpha k (1 + \rho)(1 - \rho)^{\beta} \right] \rho^k \cos kt - \text{ядро интеграла типа Пуассона}$$

и $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\beta \geq 1$, $0 \leq \rho < 1$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ из (8) получим интеграл Пуассона, а в случае $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, из (8) получим бигармонический интеграл Пуассона.

$$\text{Обозначим } \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_C = \sup_{f \in \text{Lip}1} \|f(x) - \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho, f, x)\|_C. \quad (10)$$

Определение 1. Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho)$ такая, что можно записать при $\rho \rightarrow 1-$ асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_C = \varphi(\rho) + o(\varphi(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова-Никольского для интеграла типа Пуассона и класса $\text{Lip}1$ в метрике пространства C .

Определение 2. Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ называется полным асимптотическим разложением или полной асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho \rightarrow 1-$, если для всех $n \in \mathbb{N}$

$$|g_{n+1}(\rho)| = o(|g_n(\rho)|)$$

и при любом $m \in \mathbb{N}$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^m g_n(\rho) + o(g_m(\rho)), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

Кратко будем записывать этот факт следующим образом

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона и бигармонических интегралов Пуассона на классах $\text{Lip}1$ достаточно хорошо изучены.

Первые результаты, связанные с исследованием величин $\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_C$ были получены И.П. Натансоном в 1950 г. [1]. В частности, им была решена задача Колмогорова-Никольского на классах $\text{Lip}1$ для интеграла Пуассона, а именно установлено асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_C = \frac{2}{\pi}(1 - \rho) |\ln(1 - \rho)| + O(1 - \rho), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

В работе [2] в 1950 г. А.Ф. Тиман получил точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c$:

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c = \frac{2}{\pi}(1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho} + \varepsilon_\rho, \quad 0 < \rho < 1,$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi} \int_0^{1-\rho} \left\{ \frac{1}{1-t} \ln \frac{2-t}{t^t} + 1 \right\} dt.$$

Далее в 1961 г. в работе Л.В.Малей [3] было найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани отклонения функций с класса $\text{Lip}1$ от интегралов Пуассона вида

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c \cong \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \quad \rho \rightarrow 1-,$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + \ln 2 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{-i}}{i} \right).$$

В 1973 г. этот результат был передоказан Е.Л. Штарком [4].

В.А. Баскаков в работе [5] (1975 г.) записал аналогичные асимптотические разложения, но по степеням $\frac{1}{\delta} \left(\delta = -\frac{1}{\ln \rho} \right)$ при $\delta \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; P(\rho))_c = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} \ln \delta + \frac{1}{\delta} \left[\frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt \right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi \delta} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{\pi}}{t^{2(k+1)}} dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k}}.$$

Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на других функциональных классах изучались в работах Л.И. Баусова [6], К.Н. Жигалла и Ю.И. Харкевича [7; 8].

Что же касается вопроса аппроксимативных свойств бигармонических интегралов Пуассона, то здесь нужно отметить, что С. Каниев в 1963 г. [9] нашел асимптотическое равенство вида

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; B(\rho))_c = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{\varepsilon_\rho}{\pi}, \quad \varepsilon_\rho = o(1-\rho), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

Позже, в 1968 г. Р. Руч [10] уточнила результат С. Каниева (уточнила порядок остаточного члена):

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; B(\rho))_c = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} \right), \quad \rho \rightarrow 1-.$$

В 1976 г. Л.П. Фалалеев [11] нашел полное асимптотическое разложение при $\rho \rightarrow 1-$:

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; B(\rho))_c = \frac{2}{\pi} \left\{ (1-\rho) + (1-\rho^2) \ln \frac{1}{1-\rho} + \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) (1-\rho)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \nu_k (1-\rho)^k \right) \right\},$$

где

$$\nu_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i2^i} - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)2^{k-1}} \right).$$

Отметим также, что аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона на разных функциональных классах изучались в работах Т.И. Аманова и Л.П. Фалалеева [12], К.Н. Жигалла и Ю.И. Харкевича [13; 14].

Главной целью данной работы является нахождение полного асимптотического разложения для величины

$$\mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_{CC} = \sup_{f \in \text{Lip}1} \|f(x) - \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho, f, x)\|,$$

при $\rho \rightarrow 1-$, которое позволяет выписывать константы Колмогорова-Никольского произвольного порядка малости.

Имеет место теорема.

Теорема. При $\rho \rightarrow 1-$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_C &= \frac{2\alpha}{\pi} (1-\rho)^\beta \left[\ln \frac{1}{4} + (1+\ln 2)(1-\rho) + (1-\rho) \ln \frac{1}{1-\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \ln(1-\rho)^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}} \right] + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \\ \gamma_k &= \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Убедимся сначала в том, что $K(\rho, t) \geq 0$. Запишем ядро типа Пуассона в виде

$$K(\rho, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + \alpha k (1+\rho)(1-\rho)^\beta \right] \rho^k \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt + \alpha (1+\rho)(1-\rho)^\beta \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt.$$

Учитывая, что для первого слагаемого из правой части последнего равенства имеет место представление

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho \cos t + \rho^2)} \quad (11)$$

(см. формулу (1.447.3) из [15]), найдем аналогичное представление для суммы $\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt$.

$$\text{Используя формулу (1.447.1) [15], имеем } \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt = \frac{\rho \sin t}{1-2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по t , получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt = \frac{\rho \cos t + \rho^3 \cos t - 2\rho^2}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2}. \quad (12)$$

На основе формул (11) и (12) будем иметь

$$\begin{aligned} K(\rho, t) &= \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho \cos t + \rho^2)} + \alpha (1+\rho)(1-\rho)^\beta \frac{\rho \cos t + \rho^3 \cos t - 2\rho^2}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} = \\ &= \frac{(1-\rho^2)(1-2\rho \cos t + \rho^2) + 2\alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta (\rho \cos t + \rho^3 \cos t - 2\rho^2)}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку знаменатель дроби из правой части последнего равенства всегда положительный, то рассмотрим его числитель. Первое слагаемое числителя

$$\begin{aligned} (1-\rho^2)(1-2\rho\cos t+\rho^2) &= (1-\rho^2)(1-2\rho\cos t+\rho^2\cos^2 t-\rho^2\cos^2 t+\rho^2) = \\ &= (1-\rho^2)\left[(1-\rho\cos t)^2+\rho^2(1-\cos t)\right] = (1-\rho^2)\left[(1-\rho\cos t)^2+\rho^2\sin^2 t\right] > 0, \end{aligned}$$

а потому, показав, что второе слагаемое меньше первого, можем сделать вывод, что числитель будет положительным. Это вытекает из следующих соображений.

Необходимо показать, что

$$2\alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta(\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2) < (1-\rho^2)(1-2\rho\cos t+\rho^2). \quad (13)$$

Так как $2\alpha \leq 1$ и $(1+\rho)(1-\rho)^\beta = (1-\rho^2)(1-\rho)^{\beta-1} \leq (1-\rho^2)$, то для доказательства (13) достаточно убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$\rho\cos t+\rho^3\cos t-2\rho^2 < 1-2\rho\cos t+\rho^2,$$

или

$$1-3\rho\cos t-\rho^3\cos t+3\rho^2 > 0.$$

Действительно

$$1-3\rho\cos t-\rho^3\cos t+3\rho^2 \geq 1-3\rho+3\rho^2-\rho^3 = (1-\rho)^3 > 0, \rho \in (0,1).$$

Итак, $K(\rho,t) > 0, \rho \in (0,1)$. А поскольку $K(0,t) = \frac{1}{2} > 0$, то получаем, что $K(\rho,t) > 0$ при $0 \leq \rho < 1$.

Также нетрудно убедиться, что $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\rho,t) dt = 1$.

Учитывая (8) и предыдущее равенство, можем записать

$$f(x) - \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho, f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t)) K(\rho,t) dt.$$

Поскольку $f \in \text{Lip}1$, то $|f(x) - f(x+t)| \leq |t|$. Тогда

$$|f(x) - \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho, f, x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |t| K(\rho,t) dt.$$

Поскольку функция $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$, принадлежит классу $\text{Lip}1$ и превращает последнее неравенство в равенство, то, согласно (10), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha,\beta}(\rho))_C &= \int_{-\pi}^{\pi} |t| K(\rho,t) dt = 2 \int_0^{\pi} t K(\rho,t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [1 + \alpha k (1+\rho)(1-\rho)^\beta] \rho^k \cos kt \right) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right) dt + \frac{2}{\pi} \alpha (1+\rho)(1-\rho)^\beta \int_0^{\pi} t \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \right) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

В работе Е.Л. Штарка [4] показано, что для первого интеграла из правой части равенства (14) при $\rho \rightarrow 1 -$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\int_0^{\pi} t \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \quad (15)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Преобразуем теперь второй интеграл из правой части равенства (14)

$$\int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \int_0^\pi t \cos ktdt = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^{2j-1}}{2j-1}.$$

Используя формулу (1.513.1) из [15]

$$\ln \frac{1+\rho}{1-\rho} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \rho^{2k-1},$$

получим

$$\begin{aligned} \alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \cos kt \right) dt &= -\alpha(1+\rho)(1-\rho)^\beta \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} = \\ &= \alpha(1-\rho)^\beta (1+\rho) [\ln(1-\rho) - \ln(1+\rho)] = \\ &= \alpha(1-\rho)^\beta [2 - (1-\rho)] \ln(1-\rho) - (1+\rho) \ln(1+\rho). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\text{Lip}1; \mathcal{I}_{\alpha, \beta}(\rho))_c &= \frac{2\alpha}{\pi} (1-\rho)^\beta [2 \ln(1-\rho) - (1-\rho) \ln(1-\rho) - (1+\rho) \ln(1+\rho)] + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \quad \rho \rightarrow 1-. \end{aligned} \quad (17)$$

Разлагая функцию $\varphi(\rho) = -(1+\rho) \ln(1+\rho)$ в ряд Тейлора по степеням $(1-\rho)$, будем иметь

$$-(1+\rho) \ln(1+\rho) = -2 \ln 2 + (1 + \ln 2)(1-\rho) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}.$$

Выполняя тождественные преобразования в квадратных скобках выражения (17), находим

$$\begin{aligned} 2 \ln(1-\rho) - (1-\rho) \ln(1-\rho) - (1+\rho) \ln(1+\rho) &= \ln(1-\rho)^2 + \\ &+ (1-\rho) \ln \frac{1}{(1-\rho)} + \ln \frac{1}{4} + (1 + \ln 2)(1-\rho) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (17), получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при $\alpha = 0$, получим уже известный результат Е.Л. Штарка [4], а в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\beta = 1$ будем иметь результат Л.П. Фалалеева [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон, И.П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 72, № 1 – С. 11–14.
2. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тимман // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 74, № 1 – С. 17–20.

3. Малей, Л.В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона / Л.В. Малей // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. – 1961, №3. – С.25–32.
4. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Э.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.
5. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 169–180.
6. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I / Л.И. Баусов // Изв. вузов. Математика. – 1965. – Т. 46, № 3. – С. 15–31.
7. Zhyhallo, K.M. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №1. – P. 51–63.
8. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych. // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №1. – P. 86–98.
9. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
10. Pych, P. On a biharmonic function in unit disc / P. Pych // Ann. pol. math. – 1968. – 20, № 3. – P. 203 – 213.
11. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения: материалы всесоюзного симпозиума. – Алма-Ата, «Наука» КазССР, 1976. – С. 163–167.
12. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля-Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // 5-е Советско-Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики, Алма-Ата, 1976: тр. совещания. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
13. Zhyhallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals/ K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №9. – P. 1462–1470.
14. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №3. – P. 399–413.
15. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

T.N. Zhernova, I.V. Kalchuk, Yu.I. Kharkevich On Approximation of the Function of Class Lip_1 by Poisson-type Integrals

In this paper we investigate the approximation properties of Poisson-type integrals, namely, we found a complete asymptotic decomposition for the least upper bound of the deviation the functions from the class Lip_1 of their Poisson-type integrals in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у редакцыю 17.05.13