УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, В.И. Стражев

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КИРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2

Получено релятивистское волновое уравнение для киральной частицы со спином 3/2, не распадающееся в *P*-инвариантном смысле. Рассмотрены матричная и спинорная формулировки этого уравнения.

Введение

В стандартном подходе теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) обычно рассматривается набор неприводимых представлений группы Лоренца, минимально необходимый для описания частицы со спином S. В то же время использование расширенного набора представлений, включая кратные, позволяет учитывать дополнительные внутренние (изоспиновые) степени свободы, соответствующие иным квантовым числам [1]. Одним из таких квантовых чисел может быть, например, киральность, которая различает двукратно вырожденные состояния частицы с данным значением спина, сопряженные относительно операции пространственной инверсии.

Понятие киральности получило широкое распространение в современной теоретической физике после того, как в основу теории электрослабых взаимодействий было положено представление о существовании только левостороннего нейтрино. Однако разработка унитарной перенормируемой теории киральных частиц и их взаимодействий всё еще находится на самой начальной стадии. Существенный шаг в этом направлении для частиц со спином 1 сделан профессором Софийского университета Чижовым (см. обзор [2] и приведенные в нем ссылки). В настоящей работе в подходе Гельфанда – Яглома [3] построено РВУ первого порядка для киральной частицы с ненулевой массой и спином 3/2.

Матричная формулировка РВУ первого порядка для киральной частицы со спином 3/2

Рассмотрим следующую схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца:

$$\begin{array}{ccc} 2\left(\frac{1}{2},1\right) & - & 2\left(1,\frac{1}{2}\right) \\ | & & | \\ \left(0,\frac{1}{2}\right) & - & \left(\frac{1}{2},0\right). \end{array} \tag{1}$$

Набор представлений, содержащихся в (1), отличается от набора, используемого при построении известного уравнения Фирца – Паули [4; 5], наличием кратных (повторяющихся) компонент $\left(\frac{1}{2},1\right)$ и $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Используя подход Гельфанда – Яглома [3], проанализируем схему (1) с точки зрения возможности построения матричного РВУ первого порядка

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi = 0 \tag{2}$$

для частицы со спином 3/2 и внутренним квантовым числом – киральностью.

Введем нумерацию неприводимых компонент, входящих в (1):

$$\left(0,\frac{1}{2}\right)\sim\tau_1\sim 1,\ \left(\frac{1}{2},1\right)\sim\tau_2\sim 2,\ \left(1,\frac{1}{2}\right)\sim\tau_3\sim 3,$$
$$\left(\frac{1}{2},0\right)\sim\tau_4\sim 4,\ \left(1,\frac{1}{2}\right)'\sim\tau_5\sim 5,\ \left(\frac{1}{2},1\right)'\sim\tau_6\sim 6 \qquad (3)$$

(штрихи здесь нужны для различения кратных представлений). Тогда матрица γ_4 уравнения (2) со схемой зацеплений (1) будет иметь структуру

$$\gamma_4=\begin{pmatrix} C^{1/2}\otimes I_2 & \\ & C^{3/2}\otimes I_4 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $C^{1/2}$ и $C^{3/2}$ – спиновые блоки, соответствующие спинам 1/2 и 3/2:

$$C^{1/2}=\begin{pmatrix} 0 & c_{12}^{1/2} & 0 & c_{14}^{1/2} & 0 & c_{16}^{1/2} \\ c_{21}^{1/2} & 0 & c_{23}^{1/2} & 0 & c_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & c_{32}^{1/2} & 0 & c_{34}^{1/2} & 0 & c_{36}^{1/2} \\ c_{41}^{1/2} & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & c_{45}^{1/2} & 0 \\ 0 & c_{52}^{1/2} & 0 & c_{54}^{1/2} & 0 & c_{56}^{1/2} \\ c_{61}^{1/2} & 0 & c_{63}^{1/2} & 0 & c_{65}^{1/2} & 0 \end{pmatrix},\quad C^{3/2}=\begin{pmatrix} 0 & c_{23}^{3/2} & c_{25}^{3/2} & 0 \\ c_{32}^{3/2} & 0 & 0 & c_{36}^{3/2} \\ c_{52}^{3/2} & 0 & 0 & c_{56}^{3/2} \\ 0 & c_{63}^{3/2} & c_{65}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Остальные матрицы $\gamma_i (i=1,2,3)$ выражаются через γ_4 и «бусты» J^{i4} представления (1) по формуле

$$\gamma_i=\left[J^{i4},\gamma_4\right].$$

Требование инвариантности уравнения (2) относительно преобразований собственной группы Лоренца налагает следующие ограничения на элементы $c_{\tau\tau'}^{s}$ матрицы γ_4 [3]:

$$c_{\tau\tau'}^{s}=c_{\tau\tau'}\sqrt{\left(s+l_{+}+2\right)\left(s-l_{+}-1\right)},\ \text{если } l_{+}'=l_{+}+1,\ l_{-}'=l_{-},$$
$$c_{\tau\tau'}^{s}=c_{\tau\tau'}\sqrt{\left(s+l_{-}+2\right)\left(s-l_{-}\right)},\ \text{если } l_{+}'=l_{+},\ l_{-}'=l_{-}+1, \qquad (6)$$
$$c_{\tau\tau'}^{s}=c_{\tau\tau'}\left(s+\frac{1}{2}\right),\ \text{если } l_{+}'=l_{+},\ l_{-}'=l_{-},$$

где $l_{+}=l_1+l_2$, $l_{-}=\left|l_1-l_2\right|$, $l_{+}'=l_1'+l_2'$, $l_{-}'=\left|l_1'-l_2'\right|$, $c_{\tau\tau'}^{s}$ – произвольные комплексные числа для случая, когда представления τ, τ' зацепляются, и равные нулю во всех остальных случаях. Применительно к рассматриваемому РВУ условия (6) приводят к соотношениям

$$c_{23}^{3/2}=2c_{23}^{1/2},\ c_{32}^{3/2}=2c_{32}^{1/2},\ c_{36}^{3/2}=2c_{36}^{1/2},\ c_{63}^{3/2}=2c_{63}^{1/2},$$
$$c_{25}^{3/2}=2c_{25}^{1/2},\ c_{52}^{3/2}=2c_{52}^{1/2},\ c_{56}^{3/2}=2c_{56}^{1/2},\ c_{65}^{3/2}=2c_{65}^{1/2}. \qquad (7)$$

Инвариантность РВУ (2) относительно операции пространственного отражения накладывает на числа $c_{\tau\tau'}$ условия:

$$c^s_{\tau\tau'} = c^s_{\dot\tau\dot\tau'}\ , \qquad \text{если } \dot\tau = \tau,\ \dot\tau' = \tau';$$

$$c^s_{\tau\tau'} = \pm c^s_{\dot\tau\dot\tau'}, \qquad \text{если } \dot\tau = \tau,\ \dot\tau' \neq \tau' \quad \text{либо } \dot\tau \neq \tau,\ \dot\tau' = \tau'. \tag{8}$$

При этом знак «+» во втором условии (8) (для определенности считаем $\dot\tau = \tau$, $\dot\tau' \neq \tau'$) берется тогда, когда оператор пространственного отражения P действует в подпространствах R^{τ}, $R^{\tau'}$ по формулам

$$P\xi^{\tau}_{sm} = (-1)^s\, \xi^{\tau}_{sm}, \qquad P\xi^{\tau'}_{sm} = (-1)^s\, \xi^{\dot\tau'}_{sm}, \tag{9a}$$

а знак «–» выбирается, если

$$P\xi^{\tau}_{sm} = (-1)^{s+1}\, \xi^{\tau}_{sm}, \qquad P\xi^{\tau'}_{sm} = (-1)^s\, \xi^{\dot\tau'}_{sm}, \tag{9b}$$

где ξ^{τ}_{sm} – базисные векторы в пространстве представления τ, описывающие состояния с определенными значениями абсолютной величины и проекции спина. Определяя операцию P-инверсии для схемы зацеплений (1) так, что

$$\dot\tau_2 = \tau_5,\ \dot\tau_3 = \tau_6, \tag{10}$$

в соответствии с формулами (8), (9a), (9b) получим:

$$\begin{gathered}
c^{1/2}_{14} = c^{1/2}_{41},\ c^{1/2}_{12} = c^{1/2}_{45},\ c^{1/2}_{16} = c^{1/2}_{43},\\
c^{1/2}_{21} = c^{1/2}_{54},\ c^{1/2}_{23} = c^{1/2}_{56},\ c^{1/2}_{25} = c^{1/2}_{52},\\
c^{1/2}_{34} = c^{1/2}_{61},\ c^{1/2}_{32} = c^{1/2}_{65},\ c^{1/2}_{36} = c^{1/2}_{63},\\
c^{3/2}_{23} = c^{3/2}_{56},\ c^{3/2}_{25} = c^{3/2}_{52},\ c^{3/2}_{32} = c^{3/2}_{65},\ c^{3/2}_{36} = c^{3/2}_{63}.
\end{gathered} \tag{11}$$

Возможность лагранжевой формулировки теории предполагает выполнение соотношения [3]

$$c^s_{\tau\tau'},\ \eta^s_{\tau'\dot\tau'} = \left(c^s_{\dot\tau'\tau'}\right)^* \eta^s_{\tau\dot\tau}, \tag{12}$$

где $\eta^s_{\tau\dot\tau}$ – ненулевые элементы матрицы билинейной формы η, имеющей в базисе Гельфанда – Яглома структуру, аналогичную (4). Элементы $\eta^s_{\tau\dot\tau}$, не уменьшая общности, можно выбрать равными ±1, но при этом

$$\eta^s_{\tau\dot\tau} = \eta^s_{\dot\tau\tau} = -\eta^{s+1}_{\tau\dot\tau}. \tag{13}$$

Применение условий (12) к рассматриваемому случаю даёт:

$$c^{1/2}_{54} = f_1 (c^{1/2}_{12})^*,\ c^{1/2}_{65} = f_2 (c^{1/2}_{23})^*,\ c^{1/2}_{34} = f_1 f_2 (c^{1/2}_{16})^*, \tag{14}$$

где использованы обозначения

$$f_1 = \frac{\eta^{1/2}_{25}}{\eta^{1/2}_{14}},\ f_2 = \frac{\eta^{1/2}_{36}}{\eta^{1/2}_{25}},\ f_1 f_2 = \frac{\eta^{1/2}_{36}}{\eta^{1/2}_{14}}. \tag{15}$$

Совместное применение условий (7), (11), (14) оставляет у спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ шесть независимых элементов, в качестве которых можно выбрать, например, $c_{12}^{1/2}$, $c_{14}^{1/2}$, $c_{16}^{1/2}$, $c_{23}^{1/2}$, $c_{25}^{1/2}$, $c_{36}^{1/2}$. Рассмотрим вариант РВУ, когда

$$c_{14}^{1/2} = c_{16}^{1/2} = c_{25}^{1/2} = c_{36}^{1/2} = 0\,. \tag{16}$$

Тогда вводя (с целью удобства) для оставшихся ненулевых элементов обозначения

$$c_{12}^{1/2} = a\,,\ \ c_{23}^{1/2} = b\,, \tag{17}$$

придем к следующему виду спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$:

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 a^* & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 b^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 a^* & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 b^* & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 0 & 0 \\ 2 f_2 b^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 2 f_2 b^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Возможные значения массы частицы $m_k^{(s)}$ связаны соотношением

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{\lambda_k^{(s)}} \tag{19}$$

с ненулевыми корнями $\pm\lambda_k^{(s)}$ спиновых блоков C^s, которые (корни), следовательно, должны быть вещественными. Для обеспечения вещественности корней блока $C^{3/2}$ параметр f_2 должен быть положительным, то есть

$$f_2 = 1. \tag{20}$$

Тогда двукратно вырожденный корень ± 1 у этого блока получится, если положить

$$b = \frac{1}{2}\,. \tag{21}$$

При выборе параметров f_2, b согласно (20), (21) для блока $C^{3/2}$ будем иметь окончательно выражение

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Спиновый блок $C^{1/2}$ при этом принимает вид

$$C^{1/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 f_1 a^* & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 f_1 a^* & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Условием обращения в нуль всех корней данного блока является равенство

$$f_1|a|^2 + \frac{1}{4} = 0, \tag{24}$$

которому можно удовлетворить, полагая, например:

$$f_1 = -1, \;\; a = \frac{1}{2}. \tag{25}$$

В итоге приходим к спиновому блоку $C^{1/2}$ вида

$$C^{1/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Выбор (20), (25) параметров f_1, f_2 означает, с учетом обозначений (15), задание матрицы билинейной формы η способом:

$$-\eta_{14}^{1/2} = \eta_{25}^{1/2} = \eta_{36}^{1/2} = -\eta_{25}^{3/2} = -\eta_{36}^{3/2} = 1. \tag{27}$$

Таким образом, РВУ первого порядка (2) со схемой зацеплений (1), матрицей γ_4 со спиновыми блоками $C^{3/2}$ (22) и $C^{1/2}$ (26) при выборе матрицы билинейной формы η согласно (27) описывает частицу со спином $\frac{3}{2}$ и двукратным вырождением состояний по некоторому дополнительному (помимо спина) квантовому числу.

Минимальные полиномы блоков $C^{3/2}$, $C^{1/2}$ и матрицы γ_4 имеют соответственно вид

$$\left(C^{3/2}\right)^2 - 1 = 0, \;\; \left(C^{1/2}\right)^3 = 0, \tag{28}$$

$$\gamma_4^3(\gamma_4^2 - 1) = 0, \tag{29}$$

то есть, как и в случае уравнения Фирца – Паули, матрица γ_4 неприводима к диагональному виду. В то же время минимальный полином (29) отличается от минимального полинома

$$\gamma_4^2(\gamma_4^2 - 1) = 0$$

матрицы γ_4 в уравнении Фирца – Паули.

Выясним физический смысл вышеуказанного двукратного вырождения состояний. Выбор (16) элементов блоков $C^{3/2}$, $C^{1/2}$ означает, что схема зацеплений (1) распадается в смысле собственной группы Лоренца на две схемы:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) - \left(1, \frac{1}{2}\right) \tag{30}$$

и

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) - \left(1, \frac{1}{2}\right)' - \left(\frac{1}{2}, 1\right)'. \tag{31}$$

При этом в соответствии с заданием операции пространственной инверсии согласно (10) фрагменты (30), (31) являются P-сопряженными друг другу.

В структуре спиновых блоков $C^{3/2}$ (22), $C^{1/2}$ (26) данное обстоятельство отражается тем, что каждый из этих блоков представляет собой прямую сумму двух одинаковых клеток, соответствующих схемам зацеплений (30) и (31). При этом в блоке $C^{3/2}$ каждая из клеток имеет собственные значения ±1. Следовательно, внутреннее квантовое число, различающее кратные корни этого блока, описывает P-сопряженные состояния, относящиеся к представлениям (30), (31). Такое квантовое число называется киральностью (см., напр.,[2]).

Следует заметить, что описание безмассовых частиц, обладающих киральностью, основывается только на представлениях $(0,S)$ и $(S,0)$, причем понятия киральности и спиральности (проекции спина на направление импульса частицы), посуществу, совпадают. Для частиц с ненулевой массой это, очевидно, уже не так.

Спинорная формулировка

Спинорную формулировку построенного выше уравнения можно получить, если осуществить переход из базиса Гельфанда – Яглома в спинорный базис, в котором волновая функция ψ имеет вид

$$\psi = \left(\psi_a,\ \psi^{\dot a}_{(bc)},\ \psi^{(\dot b\dot c)}_a,\ \psi^{\dot a},\ \varphi^{(\dot b\dot c)}_a,\ \varphi^{\dot a}_{(bc)}\right) - \text{столбец}. \tag{32}$$

Здесь ψ_a, $\psi^{\dot a}$ – спиноры первого ранга, отвечающие представлениям $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},0\right)$; $\psi^{\dot a}_{(bc)}$, $\psi^{(\dot b\dot c)}_a$, $\varphi^{\dot a}_{(bc)}$, $\varphi^{(\dot b\dot c)}_a$ – симметричные по двум индексам спиноры третьего ранга, сопоставляемые соответственно представлениям $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)'$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)'$; $\partial_{\dot a b} = \partial_\mu\left(\sigma_\mu\right)_{\dot a b}$ (σ_i – матрицы Паули, σ_4 – единичная матрица). В результате придем к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{6}}\partial^b_{\dot c}\psi^{\dot c}_{(ab)} + m\psi_a = 0,\\
\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\partial^{\dot a}_b\psi_c + \partial^{\dot a}_c\psi_b\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_{\dot d b}\psi^{(\dot d\dot a)}_c + \partial_{\dot d c}\psi^{(\dot d\dot a)}_b\right) + m\psi^{\dot a}_{(bc)} = 0,\\
\frac{1}{2}\left(\partial^{d\dot b}\psi^{\dot c}_{(da)} + \partial^{d\dot c}\psi^{\dot b}_{(da)}\right) + m\psi^{(\dot b\dot c)}_a = 0,\\
\frac{1}{\sqrt{6}}\partial^c_{\dot b}\varphi^{(\dot a\dot b)}_c + m\psi^{\dot a} = 0,\\
\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\partial^{\dot b}_a\psi^{\dot c} + \partial^{\dot c}_a\psi^{\dot b}\right) + \frac{1}{2}\left(\partial^{d\dot b}\varphi^{\dot c}_{(da)} + \partial^{d\dot c}\varphi^{\dot b}_{(da)}\right) + m\varphi^{(\dot b\dot c)}_a = 0,\\
\frac{1}{2}\left(\partial_{\dot d b}\varphi^{(\dot d\dot a)}_c + \partial_{\dot d c}\varphi^{(\dot d\dot a)}_b\right) + m\varphi^{\dot a}_{(bc)} = 0.
\end{gathered} \tag{33}$$

В эквивалентности этих двух формулировок можно убедиться, если записать систему (33) в матричной форме (2) с волновой функцией (32) и найти вид минимального полинома для полученной таким образом матрицы γ_4 (равно и остальных матриц

γ_i). Он оказывается совпадающим с минимальным полиномом (29), что и означает указанную эквивалентность.

Заключение

Используемое нами понятие киральности находится в полном соответствии с исходными посылками введения такого понятия в теории дираковских частиц. Действительно, P-инвариантное уравнение для частицы со спином 3/2 строится здесь на основе двух нераспадающихся схем зацеплений, связанных операцией пространственной инверсии. В свою очередь, каждая из них может служить в качестве исходной для получения P-неинвариантного РВУ, описывающего частицу со спином 3/2. Как и в случае уравнения Дирака, могут быть введены проективные операторы, коммутирующие с генераторами группы Лоренца и выделяющие компоненты волновой функции, которые соответствуют вышеуказанным P-сопряженным схемам зацеплений. Возможно и задание оператора киральности, аналогичного по физическому смыслу такому же оператору в теории Дирака.

Важно отметить, что проведенное рассмотрение представляет не только теоретический интерес. Использование понятия киральности широко обсуждается в адронной физике, в которой оно появляется при пренебрежении массами легких u и d кварков. Уже существует ряд высокопрецизионных экспериментов при низких энергиях, результаты которых свидетельствуют в пользу существования новых взаимодействий, переносимых киральными частицами. Последние экспериментальные данные из Национальной ускорительной лаборатории имени Э. Ферми (США), полученные при высоких энергиях, также согласуются с представлениями о существовании киральных частиц [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Релятивистские волновые уравнения с кратными представлениями и внутренние степени свободы частиц : дисс. … докт. физ.-мат. наук / В.А. Плетюхов. – Минск, 1992. – 280 л.

2. Чижов, М.В. Теория и феноменология киральных частиц со спином единица / М.В. Чижов // ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 42, вып. 1. – С. 169–350.

3. Гельфанд, И.М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.

4. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kräftefreier teilchen mit beliebigem spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12, №1. – P. 3–37.

5. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. – 1939. – Vol. A173. – P. 211–232.

V.A. Pletyukhov, V.I. Strazhev. **Relativistic Wave Equation for Chiral Particle with Spin - 3/2**

Nondissociating P- invariant relativistic wave equation for chiral particle with spin - 3/2 is obtained. Matrix and spinor formulations of this equation is considered.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 07.03.2013