

УДК 512.542

DOI 10.63874/2218-0303-2026-1-52-61

Ульяна Александровна Герасимчук¹, Александр Александрович Трофимук²¹студент 2-го курса физ.-мат. фак.

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Ulyana Gerasimchuk¹, Alexander Trofimuk²¹2-nd Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Head of the Department of Fundamental Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

email: ¹u.gerasimchuk@mail.ru; ²alexander.trofimuk@gmail.com**ПРИЗНАКИ Р-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ
С ЗАДАНЫМИ СИСТЕМАМИ УСЛОВНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП***

Подгруппа A группы G называется условно полунормальной подгруппой в G , если для подгруппы A существует добавление T в группе G такое, что для каждой подгруппы T_1 из T существует элемент $x \in \langle A, T_1 \rangle$ такой, что A перестановочна с T_1^x . В данной работе приведены признаки p -сверхразрешимости группы, факторизуемой условно полунормальными подгруппами. Кроме того, установлена p -сверхразрешимость p -разрешимой группы G , в которой все максимальные подгруппы силовой p -подгруппы являются условно полунормальными и изучено строение группы с условно полунормальными циклическими подгруппами.

Ключевые слова: условно полунормальная подгруппа, факторизуемая группа, силовая подгруппа, максимальная подгруппа.

**Sufficient Conditions for the p -Supersolubility of a Group
with Given Systems of Conditionally Permutable Subgroups**

A subgroup A of a group G is called a conditionally seminormal subgroup of G if there is a supplement T to A in G such that for each subgroup T_1 of T there is an element $x \in \langle A, T_1 \rangle$ such that A permutes with T_1^x . In this paper, we present criteria for p -supersolubility of a group factorizable by conditionally seminormal subgroups. Furthermore, we establish p -supersolubility for a p -soluble group G in which all maximal subgroups of the Sylow p -subgroup are conditionally seminormal, and we study the structure of a group with conditionally seminormal cyclic subgroups.

Key words: conditionally seminormal subgroup, factorized group, Sylow subgroup, maximal subgroup.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы A и B группы G называются перестановочными, если $AB = BA$.

Подгруппа A называется полунормальной в группе G , если существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A перестановочна с каждой подгруппой из T [1]. Группы с различными системами полунормальных подгрупп изучены в [2; 3]. В работе [4] исследованы группы, факторизуемые полунормальными подгруппами, в частности, доказаны сверхразрешимость и p -сверхразрешимость таких групп. Подгруппы A и B группы G называются ss -перестановочными в G , если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$ [5]. При этом подгруппа A группы G называется ss -перестановочной

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь в рамках выполнения НИР «Конечные группы с заданными ограничениями на канонические подгруппы» (ГПНИ «Конвергенция-2030» на 2026–2030 гг.).

в G , если A *сс-перестановочна* с каждой подгруппой из G . Подгруппы A и B группы G называются *взаимно (тотально) перестановочными* [6], если $UB = BU$ и $AV = VA$ (соответственно, $UV = VU$) для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. По аналогии, подгруппы A и B группы G называются *тотально сс-перестановочными*, если подгруппа A *сс-перестановочна* с каждой подгруппой группы B и подгруппа B *сс-перестановочна* с каждой подгруппой группы A .

Со времени выхода работы [6] теория произведений тотально перестановочных подгрупп получила широкое развитие. Так, в работе [7] было введено понятие *тсс-подгруппы*: подгруппа A группы G называется *тсс-подгруппой* в G , если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и подгруппы A и T *тотально сс-перестановочны*, где T – условное добавление к A в G . Кроме того, в [7] исследованы группы с заданными системами *тсс-подгрупп*.

В работе [8] введено определение: подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* подгруппой в G , если в группе G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A *сс-перестановочна* с каждой подгруппой из T . Так же в [8] приведены основные свойства условно полунормальных подгрупп и доказаны случаи *сверхразрешимости* групп, содержащих условно полунормальные подгруппы.

В данной работе развиваются изложенные выше результаты, а именно приводятся признаки *p-сверхразрешимости* группы, факторизуемой условно полунормальными подгруппами и обобщены результаты из [2; 3] на случай условно полунормальных подгрупп. Кроме того, установлена *p-сверхразрешимость p-разрешимой* группы G , в которой все максимальные подгруппы силовой *p-подгруппы* являются условно полунормальными.

1. Предварительные рассмотрения

Терминология и используемые обозначения соответствуют [9; 10]. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G . Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то пишем $H < G$. Запись $H \triangleleft G$ означает, что H – нормальная подгруппа группы G . Через G' , $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G *p- и p'-подгруппы* соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Группа называется *p-разрешимой*, если ее главные факторы либо *p-группы*, либо *p'-группы*, а *p-сверхразрешимой*, если порядки ее главных факторов либо равны *p*, либо не делятся на *p*. Через $l_\pi(G)$ обозначается π -длина π -разрешимой группы G .

Через $p\mathfrak{S}$ обозначим класс всех *p-разрешимых*, а через $p\mathfrak{U}$ класс всех *p-сверхразрешимых* групп. Группа с нормальной *p'-холловой* подгруппой называется *p-нильпотентной*.

Лемма 1.1. Пусть A – условно полунормальная подгруппа группы G и Y – условное добавление к A в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) A – условно полунормальная подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;
- (2) AN/N – условно полунормальная подгруппа в G/N для каждой $N \triangleleft G$;

(3) для каждой $X \leq Y$ существует $y \in Y$ такой, что $AX^y \leq G$. В частности, $AM \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $AN \leq G$ для некоторой π -холловой подгруппы N разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;

(4) $AK \leq G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y ;

(5) AK^g для любого $g \in G$ и любой субнормальной подгруппы K из Y ;

(6) A^x – условно полунормальная подгруппа группы G и Y^x – условное добавление к A^x в G для любого $x \in G$;

(7) если A – максимальная подгруппа, то $|G:A|$ – простое число;

(8) если Y разрешима и A r -замкнута, r – наибольшее простое число из $N = G$, то ее силовская r -подгруппа A_r субнормальна в G ;

(9) если A 2-нильпотентна, то A' субнормальна в G .

Доказательство. Утверждения (1) – (8) известны [8, лемма 2.1].

(9). Применим индукцию по $|G|$. Из (3) следует, что для каждого $p \in \pi(Y)$ существует силовская p -подгруппа Y_p из Y такая, что $AY_p \leq G$. Предположим, что $AY_p < G$ для каждого $p \in \pi(Y)$. Тогда из (1) следует, что A является условно полунормальной подгруппой в AY_p и по индукции A' субнормальна в AY_p . Ясно, что для каждого $p \in \pi(G)$ существует силовская p -подгруппа R из G такая, что $R \leq AY_p$. Так как $A' \leq \langle A', R \rangle \leq AY_p$, то A' субнормальна в $\langle A', R \rangle$. По [11, теорема] A' субнормальна в G .

Следовательно, $G = AY_q$ для некоторого $q \in \pi(Y)$. Из (4) следует, что A полунормальна в G . Так как A 2-нильпотентна, то A^G разрешима по [12, лемма 10]. Следовательно, $G = AY_q = A^G Y_q$ разрешима. Из (4) следует, что Y_q является минимальным условным добавлением к A в G и $AT < G$ для некоторой максимальной подгруппы T группы Y_q . Поскольку A является условно полунормальной подгруппой в AT , то по индукции A' субнормальна в AT . Поскольку $|G:AT| \nmid q$, то по [13, лемма 3.5] $G/(AT)_G$ сверхразрешима, и, следовательно, $(G/(AT)_G)' = G'(AT)_G/(AT)_G$ nilпотентна. Так как $A' \leq G'$, то $A'(AT)_G/(AT)_G \leq G'(AT)_G/(AT)_G$ и, следовательно, $A'(AT)_G$ субнормальна в G . Ясно, что $A' \leq A'(AT)_G \leq AT$. Так как A' субнормальна в AT то A' субнормальна в $A'(AT)_G$ и A' субнормальна в G .

Лемма 1.2 [10, VI.9].

1. Класс $p\mathfrak{U}$ – наследственная насыщенная формация.

2. Каждая минимальная нормальная подгруппа p -сверхразрешимой группы является либо p' -подгруппой, либо подгруппой порядка p . В частности, p -ранг p -сверхразрешимой группы равен 1.

3. Пусть N – нормальная в G подгруппа и $G/N \in p\mathfrak{U}$. Если N циклическая или $N \in \{Z(G), O_{p'}(G), \Phi(G)\}$, то $G \in p\mathfrak{U}$.

4. Коммутант p -сверхразрешимой группы p -нильпотентен.

Лемма 1.3 [14, лемма 5]. Предположим, что p -разрешимая группа G не принадлежит $p\mathfrak{U}$, но $G/K \in p\mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

(2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$;

(3) G – примитивная группа; $G = [N]M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;

(4) N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$;

(5) если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.

Лемма 1.4 [14, Следствие 1.1]. Пусть A и B – нормальные p -сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Если коммутант G' p -нильпотентен, то G p -сверхразрешима.

2. О p -сверхразрешимости группы, факторизуемой условно полунормальными подгруппами

Теорема 2.1. Пусть A и B – p -сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда G p -сверхразрешима в следующих случаях:

(1) коммутант G' p -нильпотентен;

(2) группа G p -разрешима и $(|A|, |B|) = 1$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа в G . Фактор-группа

$$G/N = (AN/N)(BN/N), \quad AN/N \simeq A/A \cap N, \quad BN/N \simeq B/B \cap N,$$

поэтому подгруппы AN/N и BN/N p -сверхразрешимы, а по лемме 1.1 (2) они являются условно полунормальными подгруппами в G/N .

1. Так как

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N,$$

то коммутант $(G/N)'$ p -нильпотентен. Следовательно, фактор-группа G/N удовлетворяет всем требованиям теоремы и G/N p -сверхразрешима по выбору группы G . Так как $G/N \in p\mathfrak{S}$ и $G' \in p\mathfrak{S}$, то группа $G \in p\mathfrak{S}$. Из леммы 1.3 получаем, что группа G примитивна, в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$. Теперь $N \leq G'$ и поскольку $O_{p'}(G) = 1$, то G' – p -подгруппа. Следовательно, $N = G'$ и G/N абелева. Докажем, что AN и BN – собственные подгруппы группы G . Предположим, что $AN = G$. Тогда $A \cap N = 1$, A – максимальная в G подгруппа. По условию A – условно полунормальная подгруппа в G . По лемме 2.1 (7) $|G : A| = r$, где r – простое число. Поэтому $|N| = r$, противоречие. Значит, предположение неверно и $AN < G$. Аналогично, $BN < G$.

По лемме 2.1 (1) подгруппа A является условно полунормальной подгруппой в AN и p -сверхразрешима по условию. Так как N нормальна в AN , то N – условно полунормальная подгруппа в AN . Кроме того, N абелева. Поскольку $(AN)' \leq G'$, то коммутант $(AN)'$ p -нильпотентен. По индукции подгруппа AN p -сверхразрешима. Аналогично, BN p -сверхразрешима. Так как G/N абелева, то AN и BN нормальны

в G . Теперь группа $G = (AN)(BN)$ является произведением нормальных p -сверхразрешимых подгрупп AN и BN и ее коммутант G' p -нильпотентен. По лемме 1.4 группа G p -сверхразрешима.

2. Так как

$$(|AN/N|, |BN/N|) = (|A/A \cap N|, |B/B \cap N|) = 1,$$

то фактор-группа G/N удовлетворяет всем требованиям теоремы и G/N p -сверхразрешима по выбору группы G . Так как группа G p -разрешима по условию, то по лемме 1.3 G примитивна, в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $n > 1$. Пусть p – простой делитель порядка группы A , следовательно, B – p' -группа, так как $(|A|, |B|) = 1$. Пусть H – условное добавление к подгруппе B в G , тогда $G = BH$. Так как B – p' -группа, то $N \leq H$. Поскольку подгруппа A p -сверхразрешима по условию, тогда по лемме 1.2 (2) существует минимальная нормальная подгруппа N_1 в A , порядок которой равен p и $N_1 \leq N$. Таким образом, N_1 субнормальна в H , тогда по лемме 1.1 (4) $BN_1 \leq G$. По тождеству Дедекинда $N \cap BN_1 = N_1(N \cap B) = N_1$, следовательно, $N_1 \triangleleft BN_1$ и $B \leq N_G(N_1)$. Так как N_1 нормальна в A и $B \leq N_G(N_1)$, то N_1 нормальна в $G = AB$, противоречие.

Пример 2.1.1 [15, с. 181, 4.2.12]. Группа $G = [E_{7^2}]S_3$ не является 7-сверхразрешимой группой. Эта группа обладает факторизацией $G = ([E_{7^2}]Z_3)([E_{7^2}]Z_2)$, где подгруппы $[E_{7^2}]Z_3$ и $[E_{7^2}]Z_2$ 7-сверхразрешимы, условно полунормальны и их порядки не являются взаимно простыми. Следовательно, условие $(|A|, |B|) = 1$ в теореме 2.1 (2) убрать нельзя.

3. О строении группы с условно полунормальными циклическими подгруппами

Теорема 3.1. Если все подгруппы порядка $p > 2$ являются условно полунормальными подгруппами группы G , то G p -сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример минимального порядка.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G и подгруппа H порядка p содержится в M . По условию H условно полунормальна в G , тогда по лемме 1.1 (1) H – условно полунормальная подгруппа группы M . Следовательно, любая максимальная подгруппа M группы G p -сверхразрешима по индукции.

Пусть корадикал $G^{p^{\infty}}$ разрешимый. Тогда из [16, теорема 1.1] следует, что $G^{p^{\infty}}$ является p -группой, $G^{p^{\infty}} / \Phi(G^{p^{\infty}})$ – минимальная нормальная подгруппа в $G / \Phi(G^{p^{\infty}})$ и группа $G^{p^{\infty}}$ имеет экспоненту p .

Выберем подгруппу $\bar{K} = K / \Phi(G^{p^{\infty}})$ группы $\bar{G}^{p^{\infty}} = G^{p^{\infty}} / \Phi(G^{p^{\infty}})$ порядка p . Тогда

$$\bar{K} = \langle x\Phi(G^{p^{\infty}}) \rangle = \langle x \rangle \Phi(G^{p^{\infty}}) / \Phi(G^{p^{\infty}}).$$

Так как $x \in G^{p^{\infty}}$, то $|x| = p$. Из леммы 1.1 (2) следует, что $\bar{K}$ – условно полунормальная подгруппа в $\bar{G}$ и $\bar{Y} = Y / \Phi(G^{p^{\infty}})$ – условное добавление к $\bar{K}$ в $\bar{G}$. Пусть $\bar{Q}$ –

силовская q -подгруппа в $\bar{Y}$, $q \neq p$. Тогда по лемме 1.1 (3) $\overline{KQ} \leq \bar{G}$. По тождеству Дедекинда $\overline{G^{p^u}} \cap \overline{KQ} = \bar{K}(\overline{G^{p^u}} \cap \bar{Q})$, следовательно, $\bar{K} \triangleleft \overline{KQ}$ и $\bar{Q} \leq N_G(\bar{K})$. Тогда $\bar{K} \triangleleft \bar{G}$ и $\bar{K} = \overline{G^{p^u}}$, и порядок группы $\overline{G^{p^u}} = G^{p^u} / \Phi(G^{p^u})$ равен p .

Фактор-группа $(G / \Phi(G^{p^u})) / (G^{p^u} / \Phi(G^{p^u})) \cong G / G^{p^u}$ p -сверхразрешима, тогда по лемме 1.2 (3) группа $G / \Phi(G^{p^u})$ является p -сверхразрешимой – противоречие.

Значит, корадикал G^{p^u} не является разрешимым. Тогда по [17, теорема 4.2.] фактор-группа $G / \Phi(G)$ является простой. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и $\Omega_1(P) = \langle x \mid x \in P, x^p = e \rangle$ – нижний слой подгруппы P . Предположим, что $\Omega_1(P)$ лежит в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$. Пусть Φ_p – силовская p -подгруппа в $\Phi(G)$. Так как Φ_p характеристическая подгруппа в $\Phi(G)$ и $\Phi(G)$ нормальна в G , то Φ_p – нормальная подгруппа группы G и $\Phi_p \leq O_p(G)$. Выберем произвольную подгруппу $\langle x \rangle$ порядка p такую, что $\langle x \rangle \leq \Phi_p \leq P$, тогда $\Omega_1(P) = \langle x \mid x \in \Phi_p, x^p = e \rangle$ является подгруппой группы Φ_p и, следовательно, подгруппой в $O_p(G)$. По [17, теорема 4.3.] $O_p(G) \leq Z(G)$, тогда $\Omega_1(P) \leq Z(G)$. Согласно [10, IV. 5.5] группа G p -нильпотентна и, как следствие, p -сверхразрешима – противоречие. Тогда предположение неверно и $\Omega_1(P)$ не является подгруппой в $\Phi(G)$.

Так как $\Omega_1(P) \not\leq \Phi(G)$, то существует элемент $x \in \Omega_1(P)$ такой, что подгруппа $\langle x \rangle$ не является подгруппой в $\Phi(G)$. Тогда существует нетривиальная подгруппа $\bar{X} = \langle x\Phi(G) \rangle = \langle x \rangle\Phi(G) / \Phi(G)$ порядка p . По лемме 1.1 (3) $\bar{X}$ является условно полунормальной подгруппой в $\bar{G} = G / \Phi(G)$ и существует подгруппа $\bar{Y}$ – условное добавление к $\bar{X}$ в $\bar{G}$. Так как порядок подгруппы $\bar{X}$ равен p , то $\bar{X}$ – тсс-подгруппа группы $\bar{G}$ и подгруппы $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ тотально сс-перестановочны. Тогда по [18, теорема 4] $[\bar{X}, \bar{Y}] \leq F(\bar{G})$. Подгруппа $F(\bar{G})$ тривиальна, тогда $[\bar{X}, \bar{Y}] = 1$ и $\bar{Y} \leq C_G(\bar{X})$. Так как $\bar{G} = \bar{X}\bar{Y}$, то $\bar{X}$ – нормальная подгруппа группы $\bar{G} = G / \Phi(G)$ – противоречие. Следовательно, группа G p -сверхразрешима.

Теорема 3.2. Если все циклические подгруппы порядка 2 или 4 являются условно полунормальными подгруппами группы G , то G 2-нильпотентна.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример минимального порядка.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G и циклическая подгруппа H порядка 2 или 4 содержится в M . По условию H условно полунормальна в G , тогда по лемме 1.1 (1) H – условно полунормальная подгруппа группы M . Следовательно, любая максимальная подгруппа M группы G 2-нильпотентна по индукции. Тогда согласно [10, III, 5.2] $G = [P]Q$, где P – нормальная 2-силовская подгруппа группы G экспоненты 2 или 4, а Q – циклическая силовская q -подгруппа группы G . Пусть $x \in P$ и $H = \langle x \rangle$, тогда $|H| = 2$ или $|H| = 4$. По условию H – условно полунормальная подгруппа группы G . По лемме 1.1 (3) $HQ \leq G$. Согласно [10, IV, 2.8] $H \leq N_G(Q)$, следовательно, $P \leq N_G(Q)$ и Q нормальна в G – противоречие.

4. О строении группы с силовской условно полунормальной подгруппой

Теорема 4.1 Если в p -разрешимой группе G все максимальные подгруппы силовской p -подгруппы являются условно полунормальными подгруппами в G , то группа G p -сверхразрешима.

Доказательство. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если P циклическая, то G p -сверхразрешима. Пусть P нециклическая. Тогда согласно лемме 1.1 (3) для каждой максимальной подгруппы P_i из P и каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ существует силовская q -подгруппа Q в G такая, что $P_i Q \leq G$. По [19, теорема 3.4] группа G p -сверхразрешима.

Теорема 4.2. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G и P – силовская p -подгруппа в G . Если P условно полунормальна в G , то P – нормальная подгруппа группы G .

Доказательство. По условию теоремы P существует условное добавление Y такое, что $PY = G$ и $PY_1^\alpha = G$ для любой подгруппы Y_1 группы Y , где $\alpha \in \langle P, Y_1 \rangle$. Пусть Q – силовская q -подгруппа группы Y и $q \neq p$. Ясно, что Q силовская подгруппа в G . Пусть $PQ^\alpha = PQ'$, где Q' – силовская q -подгруппа из G . Тогда PQ' – бипримарная холлова подгруппа группы G , в которой P условно полунормальна и $q < p$.

Если PQ' – собственная подгруппа группы G , то P нормальна в PQ' по индукции. Поэтому $Q' \leq N_G(P)$. Поскольку q – произвольное простое число, отличное от p , получаем, что P нормальна в G . Значит, $G = PQ'$ и Q' – условное добавление. Пусть Q_1 и Q_2 – различные максимальные подгруппы в Q' . Тогда из леммы 1.1 (3) следует, что $PQ_1 < G$ и $PQ_2 < G$. Согласно лемме 2.1 (1) P – условно полунормальная подгруппа группы PQ_1 . Следовательно, P нормальна в PQ_1 и $Q_1 \leq N_G(P)$. Аналогично, $Q_2 \leq N_G(P)$. Поэтому $Q = \langle Q_1, Q_2 \rangle \leq N_G(P)$ и P нормальна в G . Значит, Q' содержит единственную максимальную подгруппу, а следовательно, Q циклическая. Так как $q < p$, то группа G p -нильпотентна, следовательно, P нормальна в G .

Теорема 4.3. Пусть G – p -разрешимая группа, P – силовская p -подгруппа группы G и P условно полунормальна в G .

(1) Если p' -холлова подгруппа группы G q -сверхразрешима для некоторого $q \neq p$, то G q -сверхразрешима.

(2) $P' \leq O_p(G)$.

(3) $l_p(G) \leq 2$ и $l_\pi(G) \leq 2$, где $\pi = \pi(G) \setminus \{p\}$.

Доказательство.

1. Так как G – p -разрешима, то согласно [20, теорема 6.3.5] в ней существует p' -холлова подгруппа, которая является условным добавлением к P в G . Действительно, пусть Y – условное добавление к P в G . Тогда по лемме 1.1 (3) существует p' -холлова подгруппа H в Y , которая и будет p' -холловой подгруппой в G такой, что $PH = G$.

Покажем, что G q -разрешима. Пусть N – произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G . Значит, N либо p -подгруппа, либо p' -подгруппа. По индукции фактор-группа G/N q -разрешима. Если N – p -подгруппа, то G q -разрешима.

Если N – p' -подгруппа, то $N \leq H$ и N q -сверхразрешима. Таким образом, группа G q -разрешима.

Предположим, что группа G не является q -сверхразрешимой. Тогда из леммы 1.3 следует, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N , порядок которой равен q^α , $\alpha > 1$. Следовательно, $N \leq H$ и H q -сверхразрешима по условию. Согласно лемме 1.2 (2) в H существует минимальная нормальная подгруппа N_1 порядка q такая, что $N_1 \leq N \leq H$. Так как силовская p -подгруппа P условно полунормальна в G и N_1 субнормальна в H , то $PN_1 \leq G$ по [лемма 1.1.(4)]. По тождеству Дедекинда $N \cap PN_1 = N_1(N \cap P) = N_1$. Тогда N_1 – нормальная подгруппа группы PN_1 и $P \leq N_G(N_1)$. Следовательно, N_1 нормальна в группе G , противоречие. Таким образом, группа G q -сверхразрешима.

2. По лемме 1.1 (9) подгруппа P' субнормальна в группе G . Следовательно, $P' \leq O_p(G)$.

3. Фактор-группа $P/O_p(G)$ является силовской p -подгруппой в $G/O_p(G)$. Коммутант $P' \leq O_p(G)$ по п. 2, тогда фактор-группа $P/O_p(G) \simeq (P/P')/(O_p(G)/P')$ абелева и $l_p(G/O_p(G)) \leq 1$ по [21, теорема 6.1 (3)].

Получаем, что $l_p(G) \leq l_p(G/O_p(G)) + l_p(O_p(G)) \leq 1 + 1 = 2$.

Пусть $O_p(G) \neq 1$. Применим индукцию по порядку группы G . Фактор-группа $G/O_p(G)$ p -разрешима, $P/O_p(G)$ – силовская p -подгруппа группы $G/O_p(G)$ и $P/O_p(G)$ условно полунормальна в $G/O_p(G)$. Тогда $l_\pi(G/O_p(G)) \leq 2$ и

$$l_\pi(G) \leq l_\pi(G/O_p(G)) + l_\pi(O_p(G)) \leq 2 + 0 = 2.$$

Теперь $O_p(G) = 1$. В этом случае $P' \leq O_p(G) = 1$ и силовская p -подгруппа P абелева. Тогда $l_p(G) \leq 1$ и группа G обладает нормальным рядом

$$1 = O_p(G) \leq G_1 \leq G_2 \leq G_3 = G,$$

где $G_2/G_1 = O_p(G/G_1)$, $G_1/O_p(G) = O_\pi(G/O_p(G))$ и $G_3/G_2 = O_\pi(G/G_2)$. Значит, $l_\pi(G) \leq 2$.

Следствие 4.3.1. Пусть G – бипримарная группа и $\pi(G) = \{p, q\}$. Если силовская p -подгруппа группы G условно полунормальна в G , то группа G q -сверхразрешима и $n(G) \leq 3$. Если $p > q$, то $n(G) \leq 2$.

Заключение

В данной работе приведены признаки p -сверхразрешимости группы, факторизуемой условно полунормальными подгруппами. Кроме того, установлена p -сверхразрешимость p -разрешимой группы G , в которой все максимальные подгруппы силовской p -подгруппы являются условно полунормальными и изучено строение группы с условно полунормальными циклическими подгруппами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Su, X. On semi-normal subgroups of finite group / X. Su // Journal of Mathematics (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, nr 1. – P. 7–9.
2. Подгорная, В. В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В. В. Подгорная // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2000. – № 4. – С. 22–25.
3. Guo, W. Finite groups with seminormal Sylow Subgroups / W. Guo // Acta Mathematica Sinica. – 2008. – Vol. 24, nr 10. – P. 1751–1757.
4. Монахов, В. С. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 1. – С. 148–159.
5. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups // W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
6. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Archiv der Mathematik. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
7. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // Journal of Algebra and its Applications. – 2021. – Vol. 20, nr 2. – P. 2150020-1 – 2150020-18.
8. Трофимук, А. А. О сверхразрешимости группы с заданными системами условно полунормальных подгрупп / А. А. Трофимук // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 81–90.
9. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн. : Выш. шк., 2006. – 207 с.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
11. Casolo, C. A criterion for subnormality and Wielandt complexes in finite groups / C. Casolo // Journal of Algebra. – 1994. – Vol. 169. – P. 605–624.
12. Knyagina, V. N. Finite groups with seminormal Schmidt subgroups / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // Algebra Logic. – 2007. – Vol. 46, nr 4. – P. 244–249.
13. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Journal of Group Theory. – 2020. – Vol. 23, nr 5. – P. 893–911.
14. Монахов, В. С. О p -сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 256–267.
15. Трофимук, А. А. Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители // А. А. Трофимук. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2021. – 262 с.
16. Семенчук, В. Н. Минимальные не- F -группы / В. Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.
17. Tuccillo, F. On finite minimal non- p -supersoluble groups / F. Tuccillo // Colloquium mathematicum. – 1992. – Vol. 63. – P. 119–131.
18. Arroyo-Jorda, M. On conditional permutability and factorized groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // Annali di Matematica. – 2014. – Vol. 193. – P. 1123–1138.
19. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Acta Mathematica Hungarica. – 2020. – Vol. 160, nr1. – P. 161–167.
20. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York : Chelsea, 1980. – 352 p.
21. Трофимук, А. А. Инварианты конечных групп и их связь с арифметическими и формационными свойствами структурных объектов // А. А. Трофимук. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2019. – 301 с.

REFERENCES

1. Su, X. On semi-normal subgroups of finite group / X. Su // Journal of Mathematics (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, nr 1. – P. 7–9.

2. Podgornaya, V. V. Polunormal'nye podgruppy i sverkhrazreshimost' konechnykh grupp / V. V. Podgornaya // *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk.* – 2000. – № 4. – S. 22–25.
3. Guo, W. Finite groups with seminormal Sylow Subgroups / W. Guo // *Acta Mathematica Sinica.* – 2008. – Vol. 24, nr 10. – P. 1751–1757.
4. Monakhov, V. S. O sverkhrazreshimosti gruppy s polunormal'nymi podgruppami / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* – 2020. – Vol. 61, № 1. – S. 118–126.
5. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups // W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // *Southeast Asian Bulletin of Mathematics.* – 2005. – Vol. 29. – P. 493–510.
6. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // *Archiv der Mathematik.* – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
7. Trofimuk, A. A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A. A. Trofimuk // *Journal of Algebra and its Applications.* – 2021. – Vol. 20, nr 2. – P. 2150020-1 – 2150020-18.
8. Trofimuk, A. A. O sverkhrazreshimosti gruppy s zadannymi sistemami uslovno polunormal'nykh podgrupp / A. A. Trofimuk // *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi.* – 2023. – T. 31, № 2. – S. 81–90.
9. Monakhov, V. S. Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Mn. : Vysh. shk., 2006. – 207 s.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
11. Casolo, C. A criterion for subnormality and Wielandt complexes in finite groups / C. Casolo // *Journal of Algebra.* – 1994. – Vol. 169. – P. 605–624.
12. Knyagina, V. N. Finite groups with seminormal Schmidt subgroups / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // *Algebra Logic.* – 2007. – Vol. 46, nr 4. – P. 244–249.
13. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // *Journal of Group Theory.* – 2020. – Vol. 23, nr 5. – P. 893–911.
14. Monakhov, V. S. O p-sverkhrazreshimosti konechnoi faktorizuemoi gruppy s normal'nymi somnozhiteliami / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN.* – 2015. – T. 21, № 3. – S. 256–267.
15. Trofimuk, A. A. Konechnye faktorizuemye gruppy s ogranicheniyami na somnozhiteli / A. A. Trofimuk. – Mn. : Izd. tsentr BGU, 2021. – 262 s.
16. Semenchuk, V. N. Minimal'nye ne- F -gruppy / V. N. Semenchuk // *Algebra i logika.* – 1979. – T. 18, № 3. – S. 348–382.
17. Tuccillo, F. On finite minimal non- p -supersoluble groups / F. Tuccillo // *Colloquium mathematicum.* – 1992. – Vol. 63. – P. 119–131.
18. Arroyo-Jorda, M. On conditional permutability and factorized groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // *Annali di Matematica.* – 2014. – Vol. 193. – P. 1123–1138.
19. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // *Acta Mathematica Hungarica.* – 2020. – Vol. 160, nr1. – P. 161–167.
20. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York : Chelsea, 1980. – 352 p.
21. Trofimuk, A. A. Invarianty konechnykh grupp i ikh svyaz' s arifmeticheskimi i formatsionnymi svoistvami strukturnykh ob'ektov / A. A. Trofimuk. – Mn. : Izd. tsentr BGU, 2019. – 301 s.