

УДК 513.82

А.А. Юдов, Н.С. Ковалик

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО, ИМЕЮЩИХ КАСАТЕЛЬНУЮ МНИМОЕВКЛИДОВА И ЕВКЛИДОВА ТИПА

В работе изучаются одномерные подмногообразия пространства Минковского. Рассматривается класс многообразий, касательная прямая которым во всех точках является прямой мнимоевклидова и евклидова типа. Для таких многообразий строится канонический репер и находятся дифференциальные инварианты, определяющие указанные многообразия с точностью до движений пространства Минковского.

Постановка задачи и метод исследования

Группу Ли G движений пространства 1R_4 будем задавать как совокупность матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, а 4×4 матрица A удовлетворяет условию

$$A\varepsilon_{4,1}A^T = \varepsilon_{4,1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{4,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебра Ли $\bar{G}$ будет задаваться как совокупность матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & B \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где 4×4 матрица B удовлетворяет условию $B\varepsilon_{4,1} + \varepsilon_{4,1}B = 0$.

Точки пространства 1R_4 будем задавать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x. \quad (4)$$

Группа G действует в пространстве 1R_4 слева по правилу

$$x \rightarrow a \cdot x. \quad (5)$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства:

$${}^1R_4: G = H \otimes T_4. \quad (6)$$

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_4 группы Ли T_4 :

$$\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4. \quad (7)$$

Базис в алгебре Ли $\overline{G}$ группы Ли G движений пространства 1R_4 берется следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_2 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52}, \\ i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) -матрица, у которой в α -й строке, β -м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули. Причем векторы $i_5, i_6, \dots, i_{10}$ образуют базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H , векторы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют базис алгебры τ_4 , а операция коммутирования в алгебре Ли $\overline{G}$ задается в виде

$$[A, B] = AB - BA, \quad A, B \in \overline{G}. \quad (9)$$

Классификация связных подгрупп Ли группы Ли движений пространства Минковского с точностью до сопряженности имеется [1]. Всего среди подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского получается 13 подгрупп Ли: $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}$. Алгебры Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6, \overline{G}_7, \overline{G}_8, \overline{G}_9, \overline{G}_{10}, \overline{G}_{11}, \overline{G}_{12}, \overline{G}_{13}$, этих групп Ли задаются соответственно базисами $\{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . В данной работе классифицируются все одномерные подмногообразия пространства Минковского, касательное пространство к которым является пространством действительного, евклидова и мнимоевклидова типа.

Классификация кривых пространства Минковского

При классификации одномерных подмногообразий пространства Минковского используются результаты работ [2] и [3].

Рассмотрим одномерные подмногообразия пространства 1R_4 . Пусть (D_0, f) – одномерное подмногообразие (кривая) пространства 1R_4 , причем D_0 – интервал на числовой прямой, содержащий точку ноль и $\pi(e) = f(0)$. Рассмотрим касательное пространство $K_1 = T_{\pi(e)}(\big|_m f)$ к подмногообразию (D_0, f) в точке $\pi(e)$. Пространство K_1 может быть либо евклидовым, либо мнимоевклидовым, либо изотропным. Ниже классифицируются по эквивалентности относительно основной группы одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке евклидово касательное пространство, а также одномерные подмногообразия, имеющие в каждой точке мнимоевклидово касательное пространство.

Предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ мнимоевклидова типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(\big|_m f) = \{i_1\}$. Ему соответствует прообраз $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_1, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H -пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства

$T_{\pi(e)}({}^1R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K'_1 в H -пространстве Z_1 (см. [34]) $Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) | K \in Q_1\}$. H_1 определяется условием:

$$H_1 = \{h \in H | \text{Adh}(K'_1) = K'_1\}, \quad (10)$$

а ее алгебра Ли H_1 условием:

$$H_1 = \{v \in H | \text{adv}(K'_1) = [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (11)$$

Пусть

$$v = \lambda i_5 + \mu i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in H, \quad (12)$$

$$k = i_1 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in K'_1. \quad (13)$$

Тогда

$$\text{adv}(k) = [v, k] = \lambda i_2 + \mu i_3 + \nu i_4 + \psi, \quad (14)$$

где $\psi \in H$.

По условию $\text{adv}(k) \in K'_1$ получим: $\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0$. Таким образом, $H_1 = \{i_8, i_9, i_{10}\}$ и совпадает с $\overline{G_{11}}$, а группа H_1 совпадает с G_{11} . Условие (4) из [2] $\dim H = \dim H_1 = \dim Q_1$ выполняется, поэтому размерность G -орбиты пространства K_1 во множестве Γ_1 равна размерности множества Γ_1 . Отсюда следует, что подмногообразие (D_0, f) в некоторой окрестности нуля продолжается в G -орбиту элемента K_1 , изоморфную G/H_1 . Группа G_{11} образует следующую цепочку по включению:

$$G_{11} \supset G_1. \quad (15)$$

Выясним, какие цепочки возможны для следующих подмногообразий. Система Пфаффа, определяющая пространство K'_1 , имеет вид:

$$\omega^2 = 0, \omega^3 = 0, \omega^4 = 0. \quad (16)$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2 + \omega^4 \wedge \omega_4^2 &= 0, \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \omega^4 \wedge \omega_4^3 = 0, \\ \omega^1 \wedge \omega_1^4 + \omega^2 \wedge \omega_2^4 + \omega^3 \wedge \omega_3^4 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда в силу системы (16):

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \omega^1 \wedge \omega_1^3 = 0, \omega^1 \wedge \omega_1^4 = 0. \quad (18)$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\omega_1^2 = \lambda \omega^1, \omega_1^3 = \mu \omega^1, \omega_1^4 = \nu \omega^1. \quad (19)$$

Вместе с (16) получим систему

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda \omega_1, \omega_1^3 = \mu \omega_1, \omega_1^4 = \nu \omega_1. \quad (20)$$

Эта система определяет подпространство $K'_2 = d\pi_{1e}^{-1}(T_{\pi_1(e)}(\mathbb{I}_m f_1))$ алгебры $\overline{G}$ [2, § 1,2]. Пространство K'_2 , определяемое системой (20), состоит из векторов:

$$\{t i_1 + \lambda t i_5 + \mu t i_6 + \nu t i_7 + r i_8 + s i_9 + \sigma i_{10}\}, \quad (21)$$

где r, s, σ – произвольные, а λ, μ, ν – фиксированные числа.

Надо изучить H_1 – орбиты пространств вида (21) при всевозможных λ, μ, ν . Найдем группу стационарности H_2 пространства K'_2 и ее алгебру Ли $\mathfrak{H}_2$. Алгебра Ли $\mathfrak{H}_2$ определяется условием: $\mathfrak{H}_2 = \{v \in \mathfrak{H}_1 \mid [v, K'_1] \subset K'_1\}$.

Пусть $v = \alpha i_8 + \beta i_9 + \gamma i_{10}$, тогда условие $[v, K'_1] \subset K'_1$ приводит к системе:

$$\mu\alpha + \nu\beta = 0, \lambda\alpha - \nu\gamma = 0, \lambda\beta + \mu\gamma = 0. \quad (22)$$

Из этих уравнений только два независимые, поэтому группа стационарности любого пространства K'_2 (21) одномерная. Одномерные группы Ли, входящие в G_{11} , – это только группа G_1 или ей сопряженные. Рассмотрим конкретные подпространства вида (21). Если в качестве K'_2 взять подпространство $K_2^1 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + ri_8 + si_9 + \sigma i_{10}\}$, т.е. $\mu = \nu = 0$, то группой стационарности будет (см. (22)) группа $G_1 = H_2^1$. Мы получили все группы стационарности (с точностью до сопряженности) пространств вида (22). Данный случай надо рассмотреть.

Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_1 - \dim H_2 = 3 - 1 < 6 = \dim Q_2$. Поэтому подмногообразие (D_0, f_1) автоматически в G -орбиту пространства K_2^1 не продолжается. Предположим, что данное подмногообразие продолжается в орбиту, соответствующую группе H_2^1 .

Тогда $d\pi_{1e}^{-1} = (T_{\pi_1(e)}(l_m f_1)) = K_2^1$. Система Пфаффа, определяющая пространство K_2^1 , имеет вид:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda\omega^1. \quad (23)$$

Коэффициент λ называется первым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Пусть (D_0, f_2) – продолжение подмногообразия (D_0, f_1) в G -орбиту пространства K_2^1 и $K_3 = T_{f_2(0)}(l_m f_2)$, $K'_3 = d\pi_{2|e}^{-1}(K_3)$, $\pi_2: G \rightarrow G/H_2$. Продолжив систему (23) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda\omega^1, \omega_2^3 = \mu\omega^1, \omega_2^4 = \nu\omega^1, \quad (24)$$

которая будет определять подпространство K'_3 , которое, следовательно, состоит из векторов: $K'_3 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_8 + \nu ti_9 + si_{10}\}$, λ, μ, ν – фиксированные, s – произвольные. Подействуем на пространство K'_3 преобразованием Adh , $h \in G_1$ так, чтобы привести его к простейшему виду. При этом пространства K_2^1, K_2^1, K'_1, K_1 не изменятся, а подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, T_h \circ f)$, эквивалентное исходному. Обозначим подмногообразие $(D_0, T_h \circ f)$ опять через (D_0, f) . То же относительно (D_0, f_1) и (D_0, f_2) . Если выбрать h в виде

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (25)$$

то $Adh(K'_3)$ примет вид:

$$Adh(K'_3) = \{ti_1 + \lambda ti_5 + (\mu t \cos \alpha - \nu t \sin \alpha)i_8 + (\mu t \sin \alpha + \nu t \cos \alpha)i_9 + si_{10}\}. \quad (26)$$

Всегда можно выбрать α таким, что $\mu \sin \alpha + \nu \cos \alpha = 0$. Выражение $\mu t \cos \alpha - \nu t \sin \alpha$ переобозначим через μ . Таким образом подмногообразие (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_8 + si_{10}\}$, а соответствующая ему система Пфаффа – вид

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = \lambda \omega^1, \quad \omega_2^3 = \mu \omega^1. \quad (27)$$

Коэффициент μ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $H_3^1 = \{v \in H_2^1 | [v, K'_3] \subset K'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(K'_3) = K'_3\}$. Пусть $v = \alpha i_{10}$. Тогда $[v, K'_3] = -\alpha \lambda ti_7 + \mu t \alpha i_{10} - \alpha si_8$. Поскольку это должно принадлежать K'_3 , то получим $\alpha = 0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G -пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G . Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $K_4 = T_{f_3(0)}(l_m f_3)$, $K'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(K_4)$, $\pi_3: G \rightarrow G/H_3^1$. Продолжив систему (27)

и применив лемму Картана, получим с учетом (27) систему Пфаффа

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 = \lambda \omega^1, \quad \omega_2^3 = \mu \omega^1, \quad \omega_3^4 = \nu \omega^1, \quad (28)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_1 + \lambda ti_5 + \mu ti_8 + \nu ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset G_{11} \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций λ, μ, ν одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Теперь предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ евклидова типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(l_m f) = \{i_2\}$. Ему соответствует прообраз $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_2, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H -пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства $T_{\pi(e)}(R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K'_1 в H -пространстве Z_1 (см. [2]) $Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) | K \in Q_1\}$. H_1 определяется условием

$H_1 = \{h \in H \mid \text{Adh}(K'_1) = K'_1\}$, а ее алгебра Ли H_1 условием $H_1 = \{v \in H \mid \text{adv}(K'_1) = [v, K'_1] \subset K'_1\}$.

Пусть

$$\begin{aligned} v &= \lambda i_5 + \mu i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in H, \\ k &= i_2 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in K'_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда:

$$\text{adv}(k) = [v, k] = \lambda i_1 - \sigma i_3 - s i_4 + \psi, \quad (30)$$

где $\psi \in H$.

По условию $\text{adv}(k) \in K'_1$ получим: $\lambda = 0$, $\sigma = 0$, $s = 0$. Таким образом, $H_1 = \{i_6, i_7, i_{10}\}$. Условие (4) из [2] $\dim H - \dim H_1 = \dim Q_1$ выполняется, поэтому размерность G -орбиты пространства K_1 во множестве Γ_1 равна размерности множества Γ_1 . Отсюда следует, что подмногообразие (D_0, f) в некоторой окрестности нуля продолжается в G -орбиту элемента K_1 , изоморфную G/H_1 . Группа H_1 образует следующую цепочку по включению:

$$H_1 \supset G_2. \quad (31)$$

Выясним, какие цепочки возможны для следующих подмногообразий. Система Пфаффа, определяющая пространство K'_1 , имеет вид:

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0. \quad (32)$$

Найдем внешние дифференциалы форм этой системы и приравняем их к нулю (продолжим систему):

$$\begin{aligned} \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 + \omega^4 \wedge \omega_4^1 &= 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \omega^4 \wedge \omega_4^3 = 0, \\ \omega^1 \wedge \omega_1^4 + \omega^2 \wedge \omega_2^4 + \omega^3 \wedge \omega_3^4 &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда в силу системы (32):

$$\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_2^4 = 0. \quad (34)$$

Применив лемму Картана, получим:

$$\omega_1^2 = \lambda \omega^2, \quad \omega_2^3 = \mu \omega^2, \quad \omega_2^4 = \nu \omega^2. \quad (35)$$

Вместе с (32) получим систему

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0, \quad \omega_1^2 = \lambda \omega_1, \quad \omega_1^3 = \mu \omega_1, \quad \omega_1^4 = \nu \omega_1. \quad (36)$$

Эта система определяет подпространство $K'_2 = d\pi_{1e}^{-1}(T_{\pi_1(e)}(l_m f_1))$ алгебры $\overline{G}$ [2, § 1, § 2]. Пространство K'_2 , определяемое системой (36), состоит из векторов:

$$\{t i_2 + \lambda t i_5 + r i_6 + s i_7 + \mu t i_8 + \nu t i_9 + \sigma i_{10}\}, \quad (37)$$

где r, s, σ – произвольные, а λ, μ, ν – фиксированные числа.

Надо изучить H_1 –орбиты пространств вида (37) при всевозможных λ, μ, ν . Найдем группу стационарности H_2 пространства K'_2 и ее алгебру Ли H_2 . Алгебра Ли H_2 определяется условием:

$$H_2 = \{v \in H_1 \mid [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (38)$$

Пусть $v = \alpha i_6 + \beta i_7 + \gamma i_{10}$, тогда условие $[v, K'_1] \subset K'_1$ приводит к системе:

$$\mu\alpha + \nu\beta = 0, \lambda\alpha - \nu\gamma = 0, \lambda\beta + \mu\gamma = 0. \quad (39)$$

Из этих уравнений только два независимые, поэтому группа стационарности любого пространства K'_2 (37) одномерная. Одномерные группы Ли, входящие в H_1 , – это только группа G_2 или ей сопряженные. Рассмотрим конкретные подпространства вида (37). Если в качестве K'_2 взять подпространство $K'^1_2 = \{ti_2 + ri_6 + si_7 + \nu ti_9 + \sigma i_{10}\}$, т.е. $\lambda = \nu = 0$, то группой стационарности будет (см. (39)) группа $G_1 = H_2^1$. Мы получили все группы стационарности (с точностью до сопряженности) пространств вида (39). Данный случай надо рассмотреть.

Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_1 - \dim H_2 = 3 - 1 < 6 = \dim Q_2$. Поэтому подмногообразие (D_0, f_1) автоматически в G -орбиту пространства K'_2 не продолжается. Здесь надо производить разбиение подмногообразий на классы.

Пусть подмногообразие (D_0, f) продолжается в подмногообразии (D_0, f_1) такое, что $d\pi_{1e}^{-1}(T_{\pi_1(e)}(l_m f_1)) = K'^1_2$. Система Пфаффа, определяющая пространство K'^1_2 , имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2. \quad (40)$$

Коэффициент ν называется первым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Пусть (D_0, f_2) – продолжение подмногообразия (D_0, f_1) в G -орбиту пространства K'_2 и $K_3 = T_{f_2(0)}(l_m f_2)$, $K'_3 = d\pi_{2e}^{-1}(K_3)$, $\pi_2: G \rightarrow G/H_2$. Продолжив систему (40) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_1^4 = \varepsilon\omega^2, \omega_3^4 = \delta\omega^2, \quad (41)$$

которая будет определять подпространство K'_3 , которое, следовательно, состоит из векторов:

$$K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon ti_7 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}, \quad (42)$$

где ε, ν, δ – фиксированные, r – произвольный параметр.

Подействуем на пространство K'_3 преобразованием Adh , $h \in G_1$ так, чтобы привести его к простейшему виду. При этом пространства K'^1_2, K_2^1, K'_1, K_1 не изменятся, а подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, T_h \circ f)$, эквивалентное исходному. Обозначим подмногообразие $(D_0, T_h \circ f)$ опять через (D_0, f) . То же относительно (D_0, f_1) и (D_0, f_2) . Если выбрать h в виде

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ch\varphi & 0 & sh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & sh\varphi & 0 & ch\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

то $Adh(K'_3)$ примет вид:

$$Adh(K'_3) = \{ti_2 + ri_6 + (\varepsilon ch\varphi + \delta sh\varphi)ti_7 + \nu ti_9 + (\varepsilon sh\varphi + \delta ch\varphi)ti_{10}\}. \quad (44)$$

Здесь приходится рассматривать три случая.

1. Предположим, что $\varepsilon sh\varphi + \delta ch\varphi = 0$. Тогда получаем условие:

$$e^{2\varphi} = \frac{1+p}{1-p} = \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon + \delta} > 0, \quad (45)$$

где $th\varphi = -\frac{\delta}{\varepsilon} = p$.

Подмногообразии (D_0, f) можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$.

2. Предположим, что $\varepsilon ch\varphi + \delta sh\varphi = 0$. Тогда получаем условие:

$$e^{2\varphi} = -\frac{1+p}{1-p} = -\frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon + \delta} > 0, \quad (46)$$

где $th\varphi = -\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{1}{p}$.

Подмногообразии (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$.

3. Если $\varepsilon = -\delta$, тогда подмногообразии (D_0, f) всегда можно перевести в ему эквивалентное так, что пространство K'_3 примет вид $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon t(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$.

Рассмотрим случай 1. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0, \quad \omega_2^4 = \nu \omega^2, \quad \omega_1^4 = \mu \omega^2. \quad (47)$$

Коэффициент μ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $H_3^1 = \{v \in H_2^1 | [v, K'_3] \subset K'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(K'_3) = K'_3\}$. Пусть $v = \alpha i_6$. Тогда $[v, K'_3] = \mu t \alpha i_{10}$. Поскольку это должно принадлежать K'_3 , то получим $\alpha = 0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G -пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G . Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $K_4 = T_{f_3(0)}(l_m f_3)$, $K'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(K_4)$, $\pi_3: G \rightarrow G/H_3^1$. Продолжив систему (47) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0, \quad \omega_2^4 = \nu \omega^2, \quad \omega_1^4 = \mu \omega^2, \quad \omega_1^3 = \theta \omega^2, \quad (48)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \theta ti_6 + \mu ti_7 + \nu ti_9\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций λ, μ, ν одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим случай 2. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \omega_3^4 = \delta \omega^2. \quad (49)$$

Коэффициент δ называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Найдем группу стационарности пространства K'_3 – группу H_3^1 с алгеброй Ли: $H_3^1 = \{v \in H_2^1 | [v, K'_3] \subset K'_3\}$ и $H_3^1 = \{h \in H_2^1 | Adh(K'_3) = K'_3\}$. Пусть $\nu = \alpha i_6$. Тогда $[v, K'_3] = \delta \alpha i_7$. Поскольку это должно принадлежать K'_3 , то получим $\alpha = 0$. Следовательно, алгебра Ли H_3^1 нулевая, а группа H_3^1 – дискретная. Выбирая в подпространствах K_1^1, K_2^1, K_3 ориентацию, сведем группу H_3^1 к единице. Условие (4) из [2] не выполняется: $\dim H_2^1 - \dim H_3^1 = 1 < 8 = \dim Q_2$, поэтому в G -пространстве Γ_3 получаем континуум орбит, каждая из которых изоморфна группе G . Здесь надо проводить классификацию. Предположим, что многообразие (D_0, f_2) продолжается в орбиту пространства K_3 и (D_0, f_3) – соответствующее продолжение, пусть $K_4 = T_{f_3(0)}(l_m f_3)$, $K'_4 = d\pi_{3|e}^{-1}(K_4)$, $\pi_3: G \rightarrow G/H_3^1$. Продолжив систему (49) и применив лемму Картана, получим с учетом (49) систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \omega_3^4 = \delta \omega^2, \omega_1^3 = \chi \omega^2, \quad (50)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \chi ti_6 + \nu ti_9 + \delta ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_1 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом трех функций ν, δ, χ одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим случай 3. Соответствующая $K'_3 = \{ti_2 + ri_6 + \varepsilon(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$ система Пфаффа имеет вид:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \varepsilon \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_1^4 + \frac{1}{2} \omega_3^4 = 0. \quad (51)$$

Коэффициент ε называется вторым дифференциальным инвариантом подмногообразия (D_0, f) в точке $f(0)$.

Продолжив систему (51) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu \omega^2, \varepsilon \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_1^4 + \frac{1}{2} \omega_3^4 = 0, \omega_1^3 = \sigma \omega^2, \quad (52)$$

которая будет определять подпространство K'_4 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \sigma ti_6 + \varepsilon(i_7 - i_{10}) + \nu ti_9\}$.

Продолжив систему (52) и применив лемму Картана, получим систему Пфаффа:

$$\begin{aligned}\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \\ \omega_1^3 = \sigma\omega^2, \omega_1^4 = \delta\omega^2, \omega_3^4 = (\delta - 2\varepsilon)\omega^2,\end{aligned}\quad (53)$$

которая будет определять подпространство K'_5 , состоящее из векторов: $K'_4 = \{ti_2 + \sigma ti_6 + \delta ti_7 + \nu ti_9 + (\delta - 2\varepsilon)ti_{10}\}$. Построение канонического репера для многообразия данного типа $H \supset H_1 \supset G_2 \supset e$ завершено. Такие многообразия определяются с произволом четырех функций $\nu, \varepsilon, \sigma, \delta$ одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

Вышеизложенные результаты исследования одномерных подмногообразий пространства 1R_4 можем сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Одномерные подмногообразия пространства 1R_4 , касательные прямые к которым мнимоевклидовы, имеют только тип $H \supset G_{11} \supset G_1 \supset e$ и следующую характеризующую систему:*

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \omega_1^2 = \lambda\omega^1, \omega_2^3 = \mu\omega^1, \omega_3^4 = \nu\omega^1$$

Такие подмногообразия определяются с произволом трех функций одного аргумента, образующих полную систему инвариантов.

Теорема 2. *Одномерные подмногообразия пространства 1R_4 , касательные прямые к которым евклидовы, могут быть только типа $H \supset H_1 \supset G_2 \supset e$, которые по виду характеризующей системы разбиваются на три класса:*

1. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^4 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_1^4 = \mu\omega^2, \omega_1^3 = \theta\omega^2$;
2. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_3^4 = \delta\omega^2, \omega_1^3 = \chi\omega^2$;
3. $\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = \omega_1^2 = \omega_2^3 = 0, \omega_2^4 = \nu\omega^2, \omega_1^3 = \sigma\omega^2, \omega_1^4 = \delta\omega^2, \omega_3^4 = (\delta - 2\varepsilon)\omega^2$.

Подмногообразия первого и второго класса определяются с произволом трех функций одного аргумента, образующих полную систему инвариантов, а подмногообразия третьего класса – четырех функций одного аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
2. Юдов, А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства 2R_4 / А. А. Юдов. – Минск, 1989. – Деп. в ВИНТИ, № 1498-B89.
3. Гурская, Е. Свойства присоединенного представления группы Ли движений пространства Минковского / Е. Гурская, А. Юдов // Вучоныя запіскі Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2011. – Вып. 7, – ч. 2. – С. 15–19.

A.A.Yudov, N.S.Kowalik. Classification of One-Dimensional Submanifolds of Space 1R_4 Space Tangent Mnimoevklid and Evklid Type

In this paper we study one-dimensional submanifold of Minkowski space. We consider the class of manifolds, tangent line at all points is a straight mnimoevklid and evklid type. For such manifolds constructed canonical frame and differential invariants are defining these varieties up to motions of Minkowski space.