

УДК 517.9

DOI 10.63874/2218-0303-2026-1-62-70

Марина Геннадьевна Кот

канд. физ.-мат. наук,

доц. каф. фундаментальной математики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Marina Kot

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics

of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: mtorkaylo@mail.ru

ЯВНЫЙ ВИД РЕЗОЛВЕНТЫ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И МАТРИЦЕЙ ЦИКЛИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЯ

Уравнения, которые записываются в виде $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, встречаются в различных областях и являются объектом детального исследования. Произведение δu , входящее в это уравнение, не определено в рамках классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание содержательного значения выражению, которое стоит в левой части уравнения, т. е. фактически задание оператора, соответствующего указанной формальной записи. Для этого используют специальные аппроксимации оператора умножения на δ -функцию. Процесс исследования уравнений с δ -образными коэффициентами включает несколько основных этапов: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. В данной работе рассматриваются первые два этапа вышеизложенного подхода для систем, состоящих из трех уравнений с дельта-образными коэффициентами, и матрица $A(\varepsilon)$ имеет циклический характер, что задает последовательную связь между тремя компонентами системы.

Ключевые слова: обобщенная функция, аппроксимация, резольвента, оператор.

Explicit Form of the Resolvent of an Approximation System of Three Equations with Delta-Shaped Coefficients and a Cyclic Influence Matrix

Equations written in the form $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, are encountered in various fields and are the subject of detailed study. The product δu in this equation is not defined within the classical theory of generalized functions, so one of the main tasks is to assign a meaningful meaning to the expression on the left-hand side of the equation, i.e., to define an operator corresponding to this formal notation. For this purpose, special approximations of the multiplication operator by the δ -function are used. The process of studying equations with delta-shaped coefficients includes several main stages: constructing approximations of the expression in question by finite-rank operators; finding the resolvent of the approximating family; finding the limit of the resolvent and identifying resonance cases; describing the spectrum of the constructed limit operators; and studying the behavior of the eigenvalues of the approximating operators. This paper considers the first two stages of the above approach for systems consisting of three equations with delta-shaped coefficients, where the matrix $A(\varepsilon)$ is cyclic, which establishes a consistent relationship between the three components of the system.

Key words: generalized function, approximation, resolvent, operator.

Введение

Уравнения, которые записываются в виде

$$L_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

где δ есть δ -функция Дирака, возникают в различных приложениях [1] и активно изучаются. Произведение δu , входящее в (1), не определено в рамках классической теории обобщенных функций, поэтому одной из ключевых задач является придание смысла

выражению, стоящему в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, который бы соответствовал этому формальному выражению.

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_\varepsilon - \lambda)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R_0(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$, но возможны случаи *резонанса*, когда $R_0(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f = E_\lambda * f,$$

где $*$ – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u - \lambda u$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\operatorname{Re} \mu > 0$. Отметим, что $E_\lambda \in L_2(R^3)$.

Спектр оператора $-\Delta$ есть положительная полупрямая, причем спектр не содержит собственных значений. А у предельных операторов, отличных от $-\Delta$, имеется одно собственное значение. У аппроксимирующего оператора L_ε спектр может содержать (в зависимости от выбранного способа аппроксимации) конечный или даже бесконечный набор собственных значений. Поэтому общая задача заключается в описании поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и выяснении того, как в пределе из них получается одно собственное значение.

Анализ систем уравнений обычно оказывается более сложным по сравнению с анализом одного уравнения и содержит большее число возможных вариантов. Целью работы является построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства системы из трех уравнений (1), где $u = (u_1, u_2, u_3)$, а коэффициент является матрицей третьего порядка специального вида. Если коэффициент в (1) является диагональной матрицей

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

то получим систему из трех независимых скалярных уравнений, которые уже исследовались ранее.

Случай, когда коэффициент в (1) является матрицей специального вида

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13}(\varepsilon) \\ 0 & a_{22}(\varepsilon) & 0 \\ a_{31}(\varepsilon) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

представляет ограниченный интерес ввиду того, что первая компонента влияет на третью, третья – на первую, а вторая влияет только сама на себя.

Наиболее содержательный оказывается случай, когда матрица в (1) имеет вид

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Выбор матрицы такого вида обусловлен тем, что коэффициенты системы образуют матрицу циклического влияния, которая принципиально отличается от классических матриц прямых и обратных связей. Структура этой матрицы задается следующим образом: элемент $a_{ij}(\varepsilon)$ матрицы $A(\varepsilon)$ характеризует влияние j -ой компоненты системы на i -ую компоненту. Для рассматриваемой матрицы первая компонента воздействует на третью, третья – на вторую, а вторая, в свою очередь, – на первую, замыкая цикл. Также особый интерес представляет алгебраическое свойство данной матрицы. Если произведение

$$a_{12}(\varepsilon)a_{23}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon) = 1,$$

то выполняется условие $A^3 = I$ (возврат в исходное состояние через три шага).

Основная часть

Наиболее простыми являются аппроксимации с помощью операторов конечного ранга. Применим подход, развитый в [2; 3] для исследования уравнений с δ -образными коэффициентами. Основные этапы этого подхода:

- 1) построение аппроксимаций данного выражения операторами конечного ранга;
- 2) нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства;
- 3) нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса;
- 4) описание построенных предельных операторов;
- 5) исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и их собственных векторов при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В данной работе выполнено построение аппроксимаций выражения (1) операторами конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства для систем, состоящих из трех уравнений с матрицей в (1) специального вида.

1. Построение аппроксимации

Мы рассматриваем формальную систему, которая в покоординатной записи имеет вид

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + a_{12}(\varepsilon)\delta u_2 &= f_1, \\ -\Delta u_2 + a_{23}(\varepsilon)\delta u_3 &= f_2, \\ -\Delta u_3 + a_{31}(\varepsilon)\delta u_1 &= f_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Построим аппроксимацию оператора умножения на δ -функцию, действующую на гладкую функцию u по формуле $\delta u = u(0)\delta$. Пусть φ – бесконечно дифференцируемая

функция с компактным носителем, т. е. $\varphi \in D(R^3)$ [4], такая что $\iiint_{R^3} \varphi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$.

Для краткости записи обозначим $\iiint_{R^3} \varphi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int \varphi(x) dx$. Тогда семейство гладких функций $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ задает аппроксимацию δ -функции как элемента пространства обобщенных функций, а семейство функционалов $\Phi_\varepsilon(u) = \int u(x) \varphi_\varepsilon(x) dx$ – аппроксимацию δ -функции, как функционала. Таким образом, для гладких функций u имеем $\Phi_\varepsilon(u) \varphi_\varepsilon \rightarrow u(0) \delta = \delta u$ [3], т. е. на гладких функциях семейство операторов $\Phi_\varepsilon(u) \varphi_\varepsilon$ сходится к произведению δu в пространстве $D'(R^3)$.

Тогда семейство операторов

$$L_\varepsilon u = -\Delta u + A(\varepsilon) \varphi_\varepsilon(x) \int u(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \quad (4)$$

задает аппроксимацию формального выражения $-\Delta u + A(\varepsilon) \delta u$. В покомпонентной записи это семейство имеет вид

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(u)_1 &= -\Delta u_1 + a_{12}(\varepsilon) \varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\ L_\varepsilon(u)_2 &= -\Delta u_2 + a_{23}(\varepsilon) \varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \\ L_\varepsilon(u)_3 &= -\Delta u_3 + a_{31}(\varepsilon) \varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача заключается в исследовании поведения решений уравнения $(L_\varepsilon - \lambda)u = f$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Построение явного вида резольвенты аппроксимирующих операторов для специального вида матриц коэффициентов

При фиксированном $\varepsilon > 0$ найдем для данных аппроксимаций (5) такие решения непосредственно, т. е. построим резольвенту $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = u$ и найдем, для каких λ она определена.

Теорема. Резольвента $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ аппроксимирующего семейства $L_\varepsilon(u)$ записывается в виде

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda) f - S(\varepsilon, \lambda) \cdot \tilde{f} \cdot (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(x), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} R_0(\lambda) f &= \begin{bmatrix} R_0(\lambda) f_1 \\ R_0(\lambda) f_2 \\ R_0(\lambda) f_3 \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_1 &= \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_2 &= \int (R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \\ \tilde{f}_3 &= \int (R_0(\lambda)f_3)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,\end{aligned}$$

и $S(\varepsilon, \lambda)$ есть матрица вида

$$S(\varepsilon, \lambda) = \left[[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda) \right]^{-1} = \frac{1}{b^3(\varepsilon, \lambda) + \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{31}}} \begin{bmatrix} b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{23}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{31}(\varepsilon)} \\ -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{12}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} \\ \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{23}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{23}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix},$$

$$B(\varepsilon, \lambda) = \begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix},$$

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

Резольвента определена, если $\lambda \in R^+$ и $\det \left[[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda) \right] = b^3(\varepsilon, \lambda) + \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{31}} \neq 0$.

Доказательство.

Построение резольвенты эквивалентно нахождению решения системы

$$\begin{aligned}-\Delta u_1 - \lambda u_1 + a_{12}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy &= f_1, \\ -\Delta u_2 - \lambda u_2 + a_{23}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy &= f_2, \\ -\Delta u_3 - \lambda u_3 + a_{31}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy &= f_3.\end{aligned}\tag{7}$$

Из системы (7) получаем, если решение существует, то оно имеет вид

$$\begin{aligned}u_1(x) &= R_\lambda f_1 - C_1(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \\ u_2(x) &= R_\lambda f_2 - C_2(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \\ u_3(x) &= R_\lambda f_3 - C_3(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x),\end{aligned}\tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}C_1(\varepsilon) &= a_{12}(\varepsilon) \int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \\ C_2(\varepsilon) &= a_{23}(\varepsilon) \int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \\ C_3(\varepsilon) &= a_{31}(\varepsilon) \int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy.\end{aligned}\tag{9}$$

Подставим (8) в (9), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}C_1(\varepsilon, \lambda) &= a_{12}(\varepsilon) \int \left((R_0(\lambda)f_2)(y) - C_2(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y) \right) dy, \\ C_2(\varepsilon, \lambda) &= a_{23}(\varepsilon) \int \left((R_0(\lambda)f_3)(y) - C_3(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y) \right) dy, \\ C_3(\varepsilon, \lambda) &= a_{31}(\varepsilon) \int \left((R_0(\lambda)f_1)(y) - C_1(\varepsilon, \lambda)(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y)\varphi_\varepsilon(y) \right) dy.\end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$C_1(\varepsilon, \lambda) = a_{12}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{12}(\varepsilon) C_2(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$C_2(\varepsilon, \lambda) = a_{23}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_3)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{23}(\varepsilon) C_3(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$C_3(\varepsilon, \lambda) = a_{31}(\varepsilon) \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy - a_{31}(\varepsilon) C_1(\varepsilon, \lambda) \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

Введем обозначения

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$\tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$\tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$\tilde{f}_3 = \int (R_0(\lambda) f_3)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

Тогда рассматриваемая система примет вид

$$C_1(\varepsilon, \lambda) + a_{12}(\varepsilon) b(\varepsilon, \lambda) C_2(\varepsilon, \lambda) = a_{12}(\varepsilon) \tilde{f}_2,$$

$$C_2(\varepsilon, \lambda) + a_{23}(\varepsilon) b(\varepsilon, \lambda) C_3(\varepsilon, \lambda) = a_{23}(\varepsilon) \tilde{f}_3,$$

$$C_3(\varepsilon, \lambda) + a_{31}(\varepsilon) b(\varepsilon, \lambda) C_1(\varepsilon, \lambda) = a_{31}(\varepsilon) \tilde{f}_1.$$

Система имеет вид

$$\begin{aligned} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} C_1(\varepsilon, \lambda) \\ C_2(\varepsilon, \lambda) \\ C_3(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. можем записать систему в матричном виде

$$(I + A(\varepsilon)B(\varepsilon, \lambda))C(\varepsilon, \lambda) = A(\varepsilon)F,$$

где

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B(\varepsilon, \lambda) &= \begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}, \\ C(\varepsilon, \lambda) &= \begin{bmatrix} C_1(\varepsilon, \lambda) \\ C_2(\varepsilon, \lambda) \\ C_3(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left([A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right)C(\varepsilon, \lambda) = F.$$

Поэтому если

$$\det\left|[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right| \neq 0,$$

то решение записывается в виде

$$C(\varepsilon, \lambda) = \left([A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right)^{-1} F.$$

Точки λ , при которых определитель равен 0, являются спектральными значениями этого оператора.

Найдем определитель $\det\left|[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right| \neq 0$ и матрицу $S(\varepsilon, \lambda)$ в явном виде.

$$[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda) = \begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & \frac{1}{a_{31}(\varepsilon)} \\ \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{23}(\varepsilon)} & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}.$$

$$\det\left|[A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right| = b^3(\varepsilon, \lambda) + \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{31}}.$$

$$S(\varepsilon, \lambda) = \left([A(\varepsilon)]^{-1} + B(\varepsilon, \lambda)\right)^{-1} = \frac{1}{b^3(\varepsilon, \lambda) + \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{31}}} \begin{bmatrix} b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{23}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{31}(\varepsilon)} \\ -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{12}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} \\ \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{23}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{23}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Окончательное решение вспомогательной системы есть

$$\begin{bmatrix} C_1(\varepsilon, \lambda) \\ C_2(\varepsilon, \lambda) \\ C_3(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix} = \frac{1}{b^3(\varepsilon, \lambda) + \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{31}}} \begin{bmatrix} b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{23}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{31}(\varepsilon)} \\ -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{12}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} \\ \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{23}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{23}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, решение системы (7) представится в виде

$$\begin{bmatrix} u_1(\varepsilon) \\ u_2(\varepsilon) \\ u_3(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \\ R_0(\lambda)f_3 \end{bmatrix} - S(\varepsilon, \lambda) \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix} (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \quad (10)$$

где

$$S(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{b^3(\varepsilon, \lambda) + \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{31}}} \begin{bmatrix} b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{23}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{31}(\varepsilon)} \\ -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{12}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) & \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{31}(\varepsilon)} \\ \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)a_{23}(\varepsilon)} & -\frac{b(\varepsilon, \lambda)}{a_{23}(\varepsilon)} & b^2(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Выражение вида (10) эквивалентно (6).

Таким образом, резольвента определена, если

$$\det \left[A(\varepsilon)^{-1} + B(\varepsilon, \lambda) \right] = b^3(\varepsilon, \lambda) + \frac{1}{a_{12}a_{23}a_{31}} \neq 0,$$

а те точки λ , при которых $\det \left[A(\varepsilon)^{-1} + B(\varepsilon, \lambda) \right] = 0$, являются спектральными значениями этого оператора. Теорема доказана.

Заключение

В данной работе было исследовано семейство систем уравнений с дельта-образными коэффициентами, а именно – построена аппроксимация рассматриваемого оператора с помощью операторов конечного ранга и найден явный вид резольвенты соответствующего аппроксимирующего семейства. Эти результаты являются важным шагом в понимании спектральных свойств таких систем и позволяют более глубоко анализировать их поведение в предельных случаях. Рассмотрен случай, когда матрица коэффициентов имеет циклический характер, что задает последовательную связь между тремя компонентами системы.

Построение аппроксимаций с помощью операторов конечного ранга обеспечивает возможность точно моделировать сложные дельта-образные взаимодействия, что в условиях классической теории функций остается затруднительным или невозможным. Полученные формы аппроксимаций дают ясное представление о структуре решений, позволяют исследовать предельное поведение и выявлять феномен резонанса, возникающие в процессе изменения параметров систем.

Определение резольвенты для аппроксимирующего семейства является важным результатом, т. к. оно дает возможность не только аналитически исследовать спектральные характеристики построенных операторов, но и применять полученные результаты для анализа устойчивости решений и динамики соответствующих систем.

Практическое значение работы состоит в возможности применения построенной модели в различных областях математики и математической физики, где возникают уравнения с дельта-образными коэффициентами, например, в теории квантовых графов, при описании распространения волн в связанных средах, передачи энергии между тремя взаимодействующими каналами. Циклическая структура матрицы позволяет моделировать направленный перенос состояния от одной компоненты к другой.

В дальнейшем на основе полученной резольвенты предполагается выделить случаи возникновения резонанса и исследовать условия, при которых параметры системы приводят к усилению взаимодействия между компонентами. Анализ резольвенты позволяет выявить возможные резонансные ситуации и определить существенные различия между предельными и исходными операторами.

Таким образом, результаты данного исследования вносят значительный вклад в развитие теории операторов с дельта-образными коэффициентами и предлагают новые методы анализа подобных систем, что в дальнейшем может способствовать решению актуальных задач в математической физике и прикладных науках.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден ; пер. с англ. В. А. Гейлера [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 566 с.
2. Антоневиц, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. / ГрГУ им. Янки Купалы ; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.
3. Антоневиц, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен : LAPLAMBERT, 2012.
4. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.
5. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестник БГУ. Серия 1, Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.
6. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.
7. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.
8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод. указания / И. С. Кащенко. – Ярославль : ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2011. – 44 с.

REFERENCES

1. Reshaemye modeli v kvantovoj mekhanike / S. Albeverio, F. Gestezi, R. Kheeg-Kron, Kh. Khol'den ; per. s angl. V. A. Geylera [i dr.] – M. : Mir, 1991. – 556 s.
2. Antonevich, A. B. Approksimatsii operatorov s del'ta-obraznymi koeffitsientami / A. B. Antonevich, T. A. Romanchuk // Aktual'nye problemy matematiki : sb. nauch. tr. / GrGU im. Yanki Kupaly ; redkol.: Ye. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008. – S. 11–28.
3. Antonevich, A. B. Uravneniya s del'ta-obraznymi koeffitsientami: metod konechnomernykh approksimatsii / F. B. Antonevich, T. A. Romanchuk. – Saarbryukken : LAPLAMBERT, 2012.
4. Berezin, F. A. Zamechanie ob uravnenii Shredingera s singulyarnym potencialom / F. A. Berezin, L. D. Faddeev // Doklady AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.
5. Kot, M. G. O rezolventnoi skhodimosti operatorov, approksimiruyushchikh system uravnenii s δ -obraznymi koeffitsientami / M. G. Kot // Vestnik BGU. Seria 1, Fizika. Matematika. Informatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.
6. Kot, M. G. Asimptotika sobstvennykh vektor-funkciy operatorov, approksimiruyushchikh differencial'nye uravnenia s δ -obraznymi koeffitsientami / M. G. Kot // Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.
7. Romanchuk, T. A. Yavlenie rezonansa dlya matrichno-znachnyh funktsii / T. A. Romanchuk // Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.
8. Kaschenko, I. S. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenii uravnenii : metod. ukazaniya / I. S. Kaschenko. – Yaroslavl' : YarGU im. P. G. Demidova, 2011. – 44 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.05.2026