

УДК 517.518.948

В.М. Мадорский

О ЧАСТИЧНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ С НЕГЛАДКИМ ОПЕРАТОРОМ

В работе рассматриваются нелокальные частично регуляризованные сверхлинейные итерационные процессы для решения уравнения $f(x) = 0$ в пространстве R^n . Ряд предлагаемых к рассмотрению методов сходится к решению уравнения локально с кубической скоростью. Процессы сходятся высокоточно к решению операторного уравнения с «плохого» начального приближения.

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$f(x) = 0; f \in (D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

В работе [2] был исследован нерегуляризованный полулокальный итерационный процесс с непрерывным оператором и доказана его локальная кубическая скорость сходимости. Однако рассмотренный в [2] итерационный процесс имеет тот недостаток, что в рассматриваемой области $\bar{S}(x_0, r)$ должен был быть равномерно ограничен оператор, обратный оператору первой разделенной разности оператора $f(x)$. В настоящей работе мы попытаемся избавиться от этого обременительного условия.

Относительно оператора f полагаем, что $f \in C_D$,

$$\text{и } \left\| \left[\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right]^{-1} \right\| \leq B, x_n, z_n \in D.$$

Для решения уравнения (1) используем следующий итерационный процесс:

$$\text{Шаг 1} \quad \left(\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right) \Delta y_n = -f(x_n); \quad (2)$$

$$y_n = x_n + \Delta y_n, z_n = x_n - \beta_n f(x_n), \beta_0 \in [1e - 3, 1e - 1].$$

$$\text{Шаг 2} \quad \left(\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right) \Delta x_n = -\beta_n (f(x_n) + \beta_n f(y_n)). \quad (3)$$

$$\text{Шаг 3} \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \quad (4)$$

Шаг 4 if $\|f(x_{n+1})\| \leq \varepsilon \ll 1$ GO TO ВЫХОД

$$\text{else } \beta_{n+1} = \min \left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|} \right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2 \quad (5)$$

и GO TO шаг 1.

Начнем доказательство с проверки релаксационности процесса (2)–(5), для чего предварительно найдем некоторые оценки. Используя теорему о среднем для непрерывных операторов $\|f(x)\| \leq \|f(y) + f(y, z)(x - y)\| + k\|x - y\| \|x - z\|$, имеем

$$\begin{aligned} \|f(y_n)\| &\leq \|f(x_n) + f(x_n, z_n)(y_n - x_n)\| + k\|y_n - x_n\| \|y_n - z_n\| = \\ &= \|f(x_n) + \left(\alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) - \alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E \right) (y_n - x_n)\| + \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ K\|y_n - x_n\| \|y_n - z_n\| \leq \alpha \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 \|\Delta y_n\| + K\|\Delta y_n\| \|\Delta y_n + \beta_n f(x_n)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^3 B + KB \|f(x_n)\|^2 * \left\| \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right]^{-1} f(x_n) + \beta_n f(x_n) \right\| \leq \\
&\leq \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^3 B + KB^2 \|f(x_n)\|^2 * \left\| E - \beta_n \left(\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E \right) \right\| = \\
&= \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^3 B + KB^2 \|f(x_n)\|^2 C = \gamma_n \|f(x_n)\|^2.
\end{aligned}$$

Здесь введены оценки

$$\left\| E - \beta_n \left(\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E \right) \right\| \leq C,$$

$$\gamma_n = \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\| + KB^2 C < \alpha\beta_n \|f(x_n)\| + KB^2 C = \gamma.$$

С учетом оценки (6) и теоремы о среднем, имеем:

$$\begin{aligned}
&\|f(x_{n+1})\| \leq \|f(x_n) + f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n)\| + K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\| = \\
&= \|f(x_n) + (\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + F(x_n, z_n) - \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E)(x_{n+1} - x_n)\| + \\
&+ K \|\Delta x_n\| \|x_{n+1} - x_n + \beta_n f(x_n)\| \leq \alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 \|\Delta x_n\| + \\
&+ \|f(x_n) - \beta_n f(x_n) - \beta_n^2 f(y_n)\| + K \|\Delta x_n\|^* \\
&* \left\| \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right]^{-1} (-\beta_n f(x_n) - \beta_n^2 f(y_n)) + \beta_n f(x_n) \right\| \leq \\
&\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|\Delta x_n\|^* \\
&* B \left\| \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n) - \beta_n f(x_n) \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right] \right\| = \\
&= (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|\Delta x_n\| + K \|\Delta x_n\| \beta_n \|f(x_n)\|^* \\
&* B \left\| (E + \beta_n \gamma_n \|f(x_n)\|) - \left[\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n) \right] \right\| \leq \\
&\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \gamma_n \|f(x_n)\|^2 + K \|\Delta x_n\| B (\beta_n \gamma_n \|f(x_n)\| + C) \beta_n \|f(x_n)\|
\end{aligned} \tag{7}$$

Так как $\|\Delta x_n\| \leq B(\beta_n \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\|)$, окончательно имеем (8)

$$\begin{aligned}
&\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \gamma \|f(x_n)\|^2 + \\
&+ KB^2 (\beta_n \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \gamma \|f(x_n)\|^2 \beta_n \|f(x_n)\| (\beta_n \gamma \|f(x_n)\|) + C) = \\
&= (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 * \\
&* (\gamma + KB^2 (\beta_n \|f(x_n)\| + \gamma \beta_n \|f(x_n)\| (\gamma \beta_n \|f(x_n)\|) + C)) = \\
&= (1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \beta_n \|f(x_n)\| D; \gamma + KB^2 (\beta_n \|f(x_n)\| + \gamma \beta_n \|f(x_n)\| (\gamma \beta_n \|f(x_n)\|) + C) \leq D.$$

Из (5) имеем, что

$$\beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\| = \beta_n \|f(x_n)\|; n = 0, 1. \tag{9}$$

Тогда из последнего соотношения следует, что $\varepsilon_i = \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \beta_0 \|f(x_0)\|D$. Если $\varepsilon_0 < 1$, а этого всегда можно добиться за счет выбора β_0 , то все $\varepsilon_i < 1$ и $q_i < 1$.

Так как из (8) следует при $n = 0$, что $\|f(x_1)\| \leq q_0 \|f(x_0)\|$, $q_0 < 1$, а из (9) при $n = 0$ $\beta_i \|f(x_1)\| \leq \beta_0 \|f(x_0)\|$, то $\beta_i > \beta_0$, тогда

$$q_1 = 1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1) = 1 - \beta_i(1 - \varepsilon_0) < q_0.$$

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность итерационных параметров $\{q_i\}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

Переходя к пределу в (8) при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_{n+1})\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n q_i \|f(x_0)\| = 0. \quad (10)$$

Из (10) следует, что последовательность элементов x_i , порождаемых процессом (2)–(5), стремится к x^* – решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [2], показываем, что существует такой номер n_0 , что для $i > n_0$ все β_i становятся равными единице.

Пусть β_i становятся равными единице, тогда операторы $\alpha\beta_n^2 \|f(x_n)\|^2 E + f(x_n, z_n)$ вблизи решения становятся близкими к операторам первой разделенной разности $f(x_n, z_n)$ и, как показано в работе [2], процесс шаг 1 – шаг 4 переходит в процесс с кубической скоростью сходимости.

На основе вышеизложенного может быть сформулирована теорема.

Теорема.

Пусть в интересующей нас области D x^* – решение уравнения (1) с непрерывным оператором f существует. Тогда, если начальное приближение x_0 и начальная шаговая длина β_0 таковы, что $\varepsilon_0 = \beta_0 \|f(x_0)\|D < 1$, итерационный процесс (2)–(5) со сверхлинейной (локально с кубической скоростью) сходится к x^* .

Вполне аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [2], показывается, что все элементы x_i, y_i, z_i , участвующие в итерационном процессе (2)–(5), не выходят за пределы сферы $\bar{S}(x_0, r)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.

2. Мадорский, В.М. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, локально сходящиеся с кубической скоростью / В.М. Мадорский // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фїзіка. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 89–95.

V.M. Madorski. Nonlocal in Part Regulariside Iterative Processes Locally Converge with Cubic Speed

Unlocal superlinear in part reguliside iterative processes for the solution of $f(x) = 0$ equation in space R^n are considered in the article. A number of suggested methods meet locally with cubic speed. The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 29.04.2013