

Олег Викторович Матысик¹, Илья Олегович Мищук²

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Oleg Matysik¹, Ilya Mishchuk²

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University

²Teacher of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: ¹matysikoleg@mail.ru; ²ilya.mishchuk.oo@mail.ru

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ И ОПЕРАТОРЕ

В гильбертовом пространстве исследуется неявный метод итераций решения линейных уравнений с неотрицательным самосопряженным и несамосопряженным ограниченным оператором. Доказана сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценки погрешности и априорный момент останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: некорректное уравнение первого рода, неявная итерационная процедура, гильбертово пространство, неотрицательный самосопряженный и несамосопряженный ограниченный оператор, априорный момент останова.

Implicit Iterative Method for Solving Linear Equations with Perturbations in the Right-Hand Side and Operator

In a Hilbert space, an implicit method of iterations for solving linear equations with a non-negative self-adjoint and non-self-adjoint bounded operator is investigated. The convergence of the method is proved in the case of an a priori choice of the number of iterations in the original norm of the Hilbert space, assuming that errors exist not only in the right-hand side of the equation but also in the operator. Error estimates and an a priori stopping moment are obtained. The results obtained can be used in theoretical research in solving linear operator equations, as well as in solving applied ill-posed problems.

Key words: ill-posed equation of the first kind, implicit three-layer iterative procedure, Hilbert space, non-negative self-adjoint and non-self-adjoint bounded operator, a priori moment of stopping.

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач. Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике, экономике и управлении может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

с заданным оператором $A: X \rightarrow Y$ и элементом y , X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение. Задачу отыскания решения $x \in X$ уравнения (1) называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части $y = y_0 \in Y$ уравнения (1) его решение:

- а) существует в пространстве X ;
- б) определено в пространстве X однозначно;
- в) устойчиво в пространстве X , т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$.

В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2 , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [2–13].

В настоящей статье предлагается *неявная итерационная процедура* решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и проведено исследование ее основных свойств. Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [2] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы.

Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле *метод Ландвебера* предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В *методе Ландвебера* на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство

$$0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|},$$

что может привести на практике к необходимости большого числа итераций.

В предлагаемой неявной схеме итераций ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с этим оптимальную оценку погрешности для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье неявный итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, диагностике плазмы, в геологоразведке, сейсмике, акустике, спектроскопии и компьютерной томографии.

1. Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F . Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением. Решается уравнение первого рода:

$$Ax = y. \quad (2)$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, т. к. сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (2) существует и является единственным. Будем искать его с помощью итерационного процесса

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A^k)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N, \quad (3)$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный параметр.

Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (2) заданы приближенно, т. е. вместо y известно приближение y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η , $\|A - A_\eta\| \leq \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод (3) примет вид

$$(E + \alpha^2 A_\eta^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A_\eta^k)^2 x_n + 2\alpha A_\eta^{k-1} y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (4)$$

Случай приближенной правой части уравнения y_δ и точного оператора A для рассматриваемого метода (4) изучен в монографии [13]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи (2), доказана сходимость метода в полунорме (энергетической норме) гильбертова пространства. Докажем сходимость метода (4) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ с приближенным оператором A_η и приближенной правой частью y_δ , и получим априорные оценки погрешности неявного метода итераций.

2. Случай самосопряженных неотрицательных операторов

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. Итерационный метод (4) запишем в виде:

$$x_n = g_n(A_\eta)y_\delta, \quad (5)$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right]$. В [13] получены условия для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}, \quad \gamma = 2k\alpha^{1/k}, \quad n > 0, \quad (6)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k}, \quad (n > 0), \quad 0 < s < \infty, \quad \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha e} \right)^{s/k}, \quad (7)$$

(здесь s – степень истокорпредставимости точного решения $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$),

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad n > 0, \quad (8)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$ и выполнены условия (8), (9). Тогда $\|G_{m\eta} v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$
 $\forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A)}$, где $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$ и $G_{m\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Доказательство

$$\begin{aligned} \text{Имеем} \quad \|G_{m\eta} v\| &= \|(E - A_\eta g_n(A_\eta))v\| = \left\| \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda v \right\| = \\ &= \left\| \int_0^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v \right\| + \left\| \int_\varepsilon^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v \right\|. \\ \left\| \int_\varepsilon^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v \right\| &\leq q^n(\varepsilon) \left\| \int_\varepsilon^M dE_\lambda v \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{т. к. для } \lambda \in [\varepsilon, M] \\ \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} &\leq q(\varepsilon) < 1. \quad \left\| \int_0^\varepsilon \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda v \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda v \right\| = \|E_\varepsilon v\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{в силу свойств} \\ \text{спектральной функции [14]. Следовательно, } \|G_{m\eta} v\| &\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Условие сходимости для метода (4) дает

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и выполнены условия (6), (8), (9). Выберем параметр $n = n(\delta, \eta)$ в приближении (4) так, чтобы $(\delta + \eta)n^{1/k}(\delta, \eta) \rightarrow 0$ при $n(\delta, \eta) \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Тогда $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Доказательство

Из (5) имеем $x_n = g_n(A_\eta)y_\delta$. Тогда

$$\begin{aligned} x_n - x^* &= g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{m\eta}x^* + G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = \\ &= -G_{m\eta}x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta))x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Так как по условию (6) $\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}$, то

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \|A - A_\eta\| \|x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|.$$

Следовательно,

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \gamma n^{1/k}(\delta + \eta \|x^*\|).$$

Из леммы 1 следует, что $\|G_{m\eta}x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, а по условию теоремы 1 $n^{1/k}(\delta + \eta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Таким образом, $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$ и выполнены условия (6), (7). Если точное решение истокорпредставимо, т. е. $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, то справедлива оценка погрешности

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho + \gamma n^{1/k} (\delta + \eta \|x^*\|), \quad 0 < s < \infty.$$

Доказательство

Имеем, используя истокорпредставимость точного решения,

$$\|G_{m\eta}x^*\| = \|G_{m\eta}A^s z\| \leq \|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| + \|G_{m\eta}A_\eta^s z\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho,$$

т. к. по лемме 1.1 [3, с. 91] $\|A_\eta^s - A^s\| \leq c_s \eta^{\min(1, s)}$, $c_s = \text{const}$, ($c_s \leq 2$ для $0 < s \leq 1$).

Тогда получим

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho + \gamma n^{1/k} (\delta + \eta \|x^*\|), \quad 0 < s < \infty. \quad (10)$$

Теорема 2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (10) по n , то получим значение

$$\text{априорного момента останова: } n_{\text{опт}} = \left[\frac{s \gamma_s \rho}{\gamma (\delta + \|x^*\| \eta)} \right]^{k/(s+1)} = d_s \rho^{k/(s+1)} [\delta + \eta \|x^*\|]^{-k/(s+1)},$$

где $d_s = \left(\frac{s \gamma_s}{\gamma} \right)^{k/(s+1)} = \left(\frac{s}{2k} \right)^{(s+k)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)}$. Отсюда

$$n_{\text{опт}} = \left(\frac{s}{2k} \right)^{(s+k)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \rho^{k/(s+1)} [\delta + \eta \|x^*\|]^{-k/(s+1)}.$$

Подставим $n_{\text{опт}}$ в оценку (10), получим

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} &\leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s \rho (d_s \rho^{k/(s+1)})^{-s/k} (\delta + \eta \|x^*\|)^{s/(s+1)} + \\ &\quad + \gamma (\delta + \eta \|x^*\|) d_s^{1/k} \rho^{1/(s+1)} (\delta + \eta \|x^*\|)^{-1/(s+1)} = \\ &= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + (\delta + \eta \|x^*\|)^{s/(s+1)} (d_s^{-s/k} \gamma_s \rho^{1/(s+1)} + \gamma d_s^{1/k} \rho^{1/(s+1)}) = \\ &= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \rho^{1/(s+1)} c'_s (\delta + \eta \|x^*\|)^{s/(s+1)}, \end{aligned}$$

где

$$c'_s = d_s^{-s/k} \gamma_s + \gamma d_s^{1/k} = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)} \right) \gamma^{s/(s+1)} \gamma_s^{1/(s+1)} = \left(\frac{s}{2k} \right)^{s(1-k)/(k(s+1))} (1+s) e^{-s/(k(s+1))}.$$

Отсюда имеем

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \left(\frac{s}{2k} \right)^{s(1-k)/(k(s+1))} (1+s) e^{-s/(k(s+1))} \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta \|x^*\| \right)^{s/(s+1)}.$$

Замечание. Оптимальная оценка погрешности не зависит от α , но $n_{\text{опт}}$ от α зависит. Так как на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$), то можно α выбрать так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно взять

$$\alpha_{\text{опт}} = \left(\frac{s}{2k} \right)^{(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \rho^{k/(s+1)} \left[\delta + \eta \|x^*\| \right]^{-k/(s+1)}.$$

3. Случай несамосопряженных операторов

В случае несамосопряженной задачи итерационный метод (4) примет вид

$$\left[E + \alpha^2 (A_\eta^* A_\eta)^{2k} \right] x_{n+1} = \left[E - \alpha (A_\eta^* A_\eta)^k \right]^2 x_n + 2\alpha (A_\eta^* A_\eta)^{k-1} A_\eta^* y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (11)$$

Его можно записать так:

$$x_n = g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* y_\delta. \quad (12)$$

Из леммы 1 следует

Лемма 2. Пусть $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq M$, $\alpha > 0$ и выполнены условия (8), (9). Тогда

$$\|K_{n\eta} v\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}, \quad (13)$$

$$\|\tilde{K}_{n\eta} z\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \forall z \in N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}, \quad (14)$$

где $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)$, $\tilde{K}_{n\eta} = E - A_\eta A_\eta^* g_n(A_\eta A_\eta^*)$.

Используем лемму 2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq M$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$ и выполнены условия (6), (8), (9). Выберем параметр $n = n(\delta, \eta)$ так, чтобы

$$(\delta + \eta)^2 n^{1/k} (\delta, \eta) \rightarrow 0 \text{ при } n(\delta, \eta) \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0. \quad (15)$$

Тогда $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$.

Доказательство

Для погрешности приближения $x_{n(\delta, \eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -K_{n\eta} x^* + g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*) \quad (16)$$

Здесь $\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| = \|g_n(A_\eta^* A_\eta) (A_\eta^* A_\eta)^{1/2}\| \leq \gamma_* n^{1/(2k)}$, где $\gamma_* = \sup_{n>0} \left(n^{-1/(2k)} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^{1/2} |g_n(\lambda)| \right) \leq 2k^{1/2} \alpha^{1/(2k)}$ [3, с. 141]. Поскольку $\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|$, то $\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq 2k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \eta \|x^*\|)$.

Поэтому

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \|K_{m\eta} x^*\| + \|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|K_{m\eta}(x^*)\| + 2k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \eta \|x^*\|).$$

Покажем, что $\|K_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|K_{m\eta} x^*\| &= \|(E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)) x^*\| = \left\| \int_0^{\|A_\eta^* A_\eta\|} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda x^* \right\| = \\ &= \left\| \int_0^{\|A_\eta^* A_\eta\|} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| + \left\| \int_\varepsilon^{\|A_\eta^* A_\eta\|} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \int_\varepsilon^{\|A_\eta^* A_\eta\|} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| &\leq q^n(\varepsilon) \left\| \int_\varepsilon^{\|A_\eta^* A_\eta\|} dE_\lambda x^* \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{т. к. для } \lambda \in [\varepsilon, \|A_\eta^* A_\eta\|] \\ \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} &\leq q(\varepsilon) < 1. \quad \left\| \int_0^\varepsilon \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| \leq \left\| \int_0^\varepsilon dE_\lambda x^* \right\| = \|E_\varepsilon x^*\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ в силу свойств} \\ &\text{спектральной функции [14].} \end{aligned}$$

Из условия (15) $n^{1/k} (\delta + \eta)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Отсюда $2k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \eta \|x^*\|) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Таким образом, $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Теорема 3 доказана.

Справедлива

Теорема 4. Пусть $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \leq \eta$, $\|A_\eta\|^2 \leq M$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$. Если точное решение представимо в виде $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, $|A| = (A^* A)^{1/2}$ и выполнены условия (6), (7), то справедлива оценка погрешности $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho + 2k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\| \eta)$, $0 < s < \infty$.

Доказательство

В случае истокообразно представимого точного решения $x^* = |A|^s z = (A^* A)^{s/2} z$

из (7) получим $\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^{s/2} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)}$, где $\gamma_{s/2} = \left(\frac{s}{4k\alpha e} \right)^{s/(2k)}$. Тогда

$$\|K_{m\eta} |A_\eta|^s z\| = \| |A_\eta|^s [E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \| = \| (A_\eta^* A_\eta)^{s/2} [E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \| \leq \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho.$$

Отсюда

$$\|K_{m\eta} x^*\| = \|K_{m\eta} |A|^s z\| = \|K_{m\eta} (|A_\eta|^s - |A|^s) z\| + \|K_{m\eta} |A_\eta|^s z\| \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho,$$

т. к. из [3, с. 92] имеем $\| |A_\eta|^s - |A|^s \| \leq c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \text{const}$, ($c_s \leq 2$ для $0 < s \leq 1$).

Из (16) получим оценку:

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq \|K_{m\eta} x^*\| + \gamma_* n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\|_\eta) = \|K_{m\eta} x^*\| + 2k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\|_\eta) \leq \\ &\leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)} \rho + 2k^{1/2} \alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)} (\delta + \|x^*\|_\eta), \quad 0 < s < \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Теорема 4 доказана.

Минимизируя правую часть (17) по n , получим значение априорного момента останова:

$$\begin{aligned} n_{\text{опт}} &= \left(\frac{s \gamma_{s/2}}{\gamma_*} \right)^{2k/(s+1)} \rho^{2k/(s+1)} (\delta + \|x^*\|_\eta)^{-2k/(s+1)} = \\ &= (4k)^{-(s+k)/(s+1)} s^{(2k+s)/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \alpha^{-1} \rho^{2k/(s+1)} (\delta + \|x^*\|_\eta)^{-2k/(s+1)}. \end{aligned}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (17), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (11):

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} \leq \gamma_0 c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1,s)} \rho + c_s'' \rho^{1/(s+1)} (\delta + \|x^*\|_\eta)^{s/(s+1)}, \quad 0 < s < \infty,$$

где

$$c_s'' = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)} \right) \gamma_*^{s/(s+1)} \gamma_{s/2}^{1/(s+1)} = s^{s(1-2k)/(2k(s+1))} (s+1) (4k)^{s(k-1)/(2k(s+1))} e^{-s/(2k(s+1))}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} &\leq c_s (1 + |\ln \eta|) \eta^{\min(1,s)} \rho + \\ &+ s^{s(1-2k)/(2k(s+1))} (s+1) (4k)^{s(k-1)/(2k(s+1))} e^{-s/(2k(s+1))} \rho^{1/(s+1)} (\delta + \|x^*\|_\eta)^{s/(s+1)}, \quad 0 < s < \infty. \end{aligned}$$

Заклєчение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенной неявной схемы итераций решения некорректных задач:

1) доказана сходимость метода с априорным выбором параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства в случае неотрицательного самосопряженного ограниченного оператора A_η ($\|A - A_\eta\| \leq \eta$), получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова;

2) исследована сходимость приближений в исходной норме гильбертова пространства в случае неотрицательного несамосопряженного ограниченного и возмущенного оператора.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
2. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // American Journal of Mathematics. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.
6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // Journal of Computational Applied Mathematics. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.
8. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Computational Methods in Applied Mathematics (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // Journal Computational and Applied Mathematics. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.
13. Матысик, О. В. Регуляризующие алгоритмы для некорректных операторных уравнений первого рода / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2025. – 256 с.
14. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.

- 2 Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // American Journal of Mathematics. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
3. Vaynikko, G. M. Iteracionnye procedury v niekorrektnykh zadachakh / G. M. Vaynikko, A. Yu. Veretennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.
4. Samarskiy, A. A. Chislennyye metody reshenia obratnykh zadach matematicheskoy fiziki / A. A. Samarskiy, P. N. Vabishchevich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
5. Savchuk, V. F. Riegunyaryzatsiya opieratornykh uravneniy v gilbertovom prostranstve / V. F. Savchuk, O. V. Matysik. – Brest : Brest. gos. un-t, 2008. – 196 s.
6. Matysik, O. V. Yavnyye i niejavnnyye iteracionnye procedury reshenia niekorrektno postavlyennykh zadach / O. V. Matysik. – Brest : Brest. gos. un-t, 2014. – 213 s.
7. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // Journal of Computational Applied Mathematics. – 2014. – Nr 2 (116). – P. 89–95.
8. Matysik, O. V. Iteracionnaya riegunyaryzatsiya niekorrektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.
9. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Computational Methods in Applied Mathematics (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, nr 3. – P. 373–389.
10. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // Journal Computational and Applied Mathematics. – 2015. – Nr 2 (119). – P. 33–41.
11. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
12. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.
13. Matysik, O. V. Riegunyaryzuyushchiye algoritmy dlya niekorrektnykh opieratornykh uravneniy pervogo roda / O. V. Matysik. – Brest : Brest. gos. un-t, 2025. – 256 s.
14. Kantorovich, L. V. Funktsional'nyi analiz v normirovannykh prostranstvakh / L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. – M. : Fizmatgiz, 1959. – 680 s.

Рукапіс надрукаў у рэдакцыю 03.05.2026