УДК 517.5

Ю.И. Харкевич, Т.Н. Жернова, К.В. Швай

ПОЛНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕЛИЧИН ПРИБЛИЖЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИХ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАСОНА

Рассматривается вопрос об асимптотическом поведении точных верхних граней уклонения сопряженных периодических функций от их сопряженных интегралов Пуассона. Получено разложение верхней грани в асимптотический ряд, что дает возможность выписывать константы Колмогорова–Никольского произвольного порядка.

Пусть C – пространство 2π – периодических непрерывных функций с нормой
$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Через W^r обозначают множество 2π-периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и $\left|f^{(r)}(t)\right| \le 1$, а через $\overline{W}^r$ – множество функций сопряженных к функциям из класса W^r, то есть
$$\overline{W}^r = \left\{ \overline{f} : \overline{f}(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)ctg\frac{t}{2}dt = \frac{-1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\psi_x(t)ctg\frac{t}{2}dt, \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t), f \in W^r \right\}.$$

Говорят, что функция $f(x) \in C$ принадлежит к классу $Lip_1 1$, если для $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедливо неравенство
$$|f(t_1) - f(t_2)| \le |t_1 - t_2|.$$

Рассмотрим краевую задачу (в единичном кругу) для уравнения
$$\Delta u = 0 \qquad (1)$$
где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах. То есть уравнение (1) запишется в виде
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (0 \le \rho < 1, \ -\pi \le x \le \pi). \qquad (2)$$

Решение уравнения (2), что удовлетворяет граничное условие
$$u(\rho, x)\big|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \le x \le \pi,$$
где $f(x)$ – суммируемая 2π-периодическая функция, можем записать в виде
$$P_\rho(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right\}dt = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{dt}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}.$$
Величину $P_\rho(f;x)$ принято называть интегралом Пуассона функции f.

Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, интеграл Пуассона запишем в виде
$$P_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right\}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}}dt.$$

Величину $\overline{P}_\rho(f;x) = P_\rho(\overline{f};x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \sin kt dt = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\psi_x(t)\frac{\rho\sin t}{1 - 2\rho\cos t + \rho^2}dt$

называют сопряженным интегралом Пуассона функции f.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};P_\rho)_C = \sup_{f\in\mathfrak{N}}\left\| f(x) - P_\rho(f;x)\right\|_C,$$

где $\mathfrak{N}\subseteq C$ – заданный класс функций, $P_\rho(f;x)$ – интегралы Пуассона, будем называть, следуя А.И. Степанцу [1], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho)=\varphi(P_\rho;\rho)$, такая, что при $\rho\to 1-$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};P_\rho)_C = \varphi(\rho)+o(\varphi(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для интеграла Пуассона P_ρ на классе $\mathfrak{N}$ в метрике пространства C.

Определение. *Формальный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ *называется полным асимптотическим разложением или асимптотикой функции* $f(\rho)$ *при* $\rho\to 1-$, *если для произвольного натурального* N *при* $\rho\to 1-$

$$f(\rho)=\sum_{n=0}^{N} g_n(\rho)+o\big(g_N(\rho)\big)$$

и для $\forall n\in N$

$$\left|g_{n+1}(\rho)\right| = o\big(\left|g_n(\rho)\right|\big).$$

Кратко будем записывать этот факт следующим образом

$$f(\rho)\cong\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Пуассона, а также сопряженными интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными.

И.П. Натансон [2] решил задачу Колмогорова–Никольского на классах W^1 для интеграла Пуассона:

$$\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho)\left|\ln(1-\rho)\right| + O\big(1-\rho\big), \qquad \rho\to 1-.$$

В работе [3] А.Ф. Тиман получил точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C$:

$$\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}+\varepsilon_\rho,$$

$$\varepsilon_\rho = \frac{2}{\pi}\int_0^{1-\rho}\left\{\frac{1}{1-t}\ln\frac{2-t}{t^t}+1\right\}dt, \qquad 0<\rho<1.$$

$$\mathcal{E}(W^r;P_\rho)_C = \sum_{i=1}^{r/2}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{r-2i+1}\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{(r-2)/2}\frac{1}{(2i)!}K_{r-2i}\ln^{2i}\frac{1}{\rho}-\alpha_p^r,$$

$$\alpha_p^r = \frac{4}{\pi}\int_\rho^1\int_{t_r}^1\ldots\int_{t_2}^1\frac{1}{t_1t_2\ldots t_r}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1dt_2\ldots dt_r,$$

если r – четное, $0<\rho<1$.

$$\mathcal{E}(W^r;P_\rho)_C = \sum_{i=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{(2i-1)!}\tilde{K}_{r-2i+1}\ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{(2i)!}K_{r-2i}\ln^{2i}\frac{1}{\rho}-\beta_p^r,$$

$$\beta_p^r=\frac{2}{\pi}\int_{\rho}^{1}\int_{t_r}^{1}\ldots\int_{t_2}^{1}\frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1t_2\ldots t_r}dt_1dt_2\ldots dt_r,$$

если r – нечетное, $0<\rho<1$, где K_n и $\tilde{K}_n$ – константы Н.И. Архиезера – М.Г. Крейна – Ж. Фавара

$$K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\ \ n=0,1,2,\ldots,\qquad \tilde{K}_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\ \ n\in N,$$

и для оценки поведения этих величин отметил, что при $\rho\to 1-$

$$\varepsilon_\rho=\frac{2}{\pi}(1+\ln 2)(1-\rho)+o(1-\rho),$$

$$\alpha_p^r=O((1-\rho)^r),\qquad \beta_p^r=O\left((1-\rho)^r\ln\frac{1}{1-\rho}\right).$$

В работе [4] Л.В. Малей было найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани отклонения функций с класса W^1 от интегралов Пуассона вида

$$\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho}+\beta_k(1-\rho)^k\right\},$$

$$\alpha_k=\frac{1}{k},\quad \beta_k=\frac{1}{k}\left\{\ln 2+\frac{1}{k}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i\cdot 2^i}\right\},\qquad k=1,2,\ldots,$$

позже оно было передоказано в работе Е.Л. Штарка [5].

В работе В.А. Баскакова [6] были получены полные асимптотические разложения величин $\mathcal{E}(W^r;P_\delta)_C$, по степеням $\frac{1}{\delta}$, $\delta\to\infty$ в случае когда $r=1,2,3$.

Впервые оценки $\mathcal{E}(\overline{W}^1;P_\rho)_C$ были получены в работе Б. Надя [7], где, в частности, были установлены следующие равенства

$$\mathcal{E}(\overline{W}^1;P_\rho)_C=\frac{4}{\pi}\int_{\rho}^{1}\frac{\operatorname{arctg} t}{t}dt,\qquad 0\le\rho<1,$$

$$\mathcal{E}(\overline{W}^1;P_\rho)_C=(1-\rho)+O\left((1-\rho)^2\right),\quad \rho\to 1-.$$

Позже в работе В.А. Баскакова [8] были найдены общие выражения, которые позволяют получать асимптотические разложения величин $\mathcal{E}(\overline{W}^r;P_\delta)_C$, по степеням $\frac{1}{\delta}$, $\delta\to\infty$, а именно

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r;P_\delta)_C=\frac{2}{\pi\delta^2}\left|\int_0^{\infty}\frac{[q_r(t)]_{2\pi}}{t\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)}dt\right|,\ \ r=2k+1,$$

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r;P_\delta)_C=\frac{2}{\pi\delta^2}\left|\int_0^{\infty}\frac{[\theta_r(t)]_{2\pi}}{t\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)}dt\right|,\ \ r=2k,$$

где $[q_{2k+1}(t)]_{2\pi}$ и $[\theta_{2k}(t)]_{2\pi}$ – нечетные 2π-периодические продолжения многочленов $q_{2k+1}(t)$ и $\theta_{2k}(t)$ вида

$$q_{2k+1}(t)=\int_0^t dt_1\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_1} dt_2\int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_{\frac{\pi}{2}}^{t_{2k-1}} dt_{2k}\int_0^{t_{2k}} h_0(t_{2k+1})dt_{2k+1},$$

где $h_0(t)$ определяется по формуле

$$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\dfrac{\pi}{2},\\ -1, & \dfrac{\pi}{2}\le t<\pi,\end{cases}$$

$$\theta_{2k}(t)=\int_0^t dt_1\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{2k-2}} dt_{2k-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_{2k-1}} dt_{2k}.$$

Главной целью данной работы есть нахождения полного асимптотического разложения для величины

$$\mathcal{E}(Lip_1 1;\overline{P}_\rho)_C=\sup_{f\in Lip_1 1}\left\|\overline{f}(\cdot)-\overline{P_\rho}(f;\cdot)\right\|_C,$$

которое позволяет выписывать константы Колмогорова–Никольского произвольно высокого порядка малости.

Имеет место теорема.

Теорема. *Если* $f\in Lip_1 1$, *то при* $\rho\to 1-$ *имеет место полное асимптотическое разложение*

$$\mathcal{E}(Lip_1 1;\overline{P}_\rho)_C=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\rho)^k}{k\cdot 2^{k-1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\rho)^{2m+s}}{2^{2m+s}}\cdot\frac{\Gamma(2m+s)}{\Gamma(2m)}\cdot\alpha_m, \tag{3}$$

где

$$\alpha_m=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+k+1}}{2m-2k+1}+1. \tag{4}$$

Доказательство.

Очевидно, что

$$\overline{P_\rho}(f;x)-\overline{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\psi_x(t)\frac{\rho\sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\psi_x(t)\cdot ctg\frac{t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\psi_x(t)(ctg\frac{t}{2}-\frac{2\rho\sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2})dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\psi_x(t)\cdot ctg\frac{t}{2}(1-\frac{2\rho\sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2})dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\psi_x(t)\cdot ctg\frac{t}{2}\frac{1-2\rho\cos t+\rho^2-2\rho\sin t\cdot tg\frac{t}{2}}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt.$$

Использовав формулы двойных синуса и косинуса и главное тригонометрическое тождество, получим равенство

$$\overline{P_\rho}(f;x)-\overline{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\psi_x(t)\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt.$$

Вследствие 2π -периодичности функции *f(x)* имеем:

$$\overline{P_\rho}(f;x)-\overline{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi_x(t)\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\psi_{x+\pi}(\pi-t)\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt.$$

Поскольку $f\in Lip_1 1$, то, применяя свойство модуля разности, получим

$$\left|\overline{P_\rho}(f;x)-\overline{f}(x)\right|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-t)\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt. \qquad (5)$$

Обозначим через $g(x)$ нечетную 2π-периодическую функцию, определенную на сегменте $[0;\pi]$ следующим образом:

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

Легко видеть, что правая часть (5) равна $\overline{P_\rho}(g,0)-g(0)$. Поэтому имеем:

$$\mathcal{E}(Lip_1 1;\overline{P}_\rho)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt=I_1+I_2-I_3. \qquad (6)$$

Для того, чтобы вычислить интегралы I_1,I_2,I_3, найдем сначала неопределенный интеграл

$$\int ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt.$$

Интегрируя по частям, полагая

$$u=ctg\frac{t}{2},\ dv=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt$$

и используя формулу ([9, с. 163]), имеем

$$\int\frac{1-a^2}{1-2a\cos t+a^2}dt=2arctg(\frac{1+a}{1-a}tg\frac{t}{2})\ \ (0<a<1,\ \ |x|<\pi).$$

Получим

$$\int ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt=2arctg(\frac{1+\rho}{1-\rho}tg\frac{t}{2})\cdot ctg\frac{t}{2}-2\int arctg(\frac{1+\rho}{1-\rho}tg\frac{t}{2})d(ctg\frac{t}{2}).$$

Используем опять интегрирование по частям и формулу ([9, с. 224]).

$$\int\frac{1}{t^2}arctg\frac{t}{a}dt=-\frac{1}{t}arctg\frac{t}{a}-\frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+t^2}{t^2},$$

Имеем

$$\int ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt=-\frac{1+\rho}{1-\rho}\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}}. \qquad (7)$$

Из (7) вытекает, что

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt=\ln\left(1+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2\right).$$

Для нахождения интегралов I_1 и I_3 применим метод интегрирования по частям

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt=\left|\begin{array}{l} u=t,\quad dv=ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2}dt,\\ v=\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}},$$

$$I_3=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cdot ctg\frac{t}{2}\cdot\frac{(1-\rho)^2}{1-\rho\cos t+\rho^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2\right)+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}}.$$

Подставив полученные результаты для I_1, I_2, I_3 в (6), будем иметь

$$\mathcal{E}(Lip_1 1;\overline{P}_\rho)_C=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}}dt-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}}dt=U_1-U_2. \qquad (8)$$

Использовав формулы ([9, с. 543])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a\cdot tgt)dt=\frac{\pi}{2}\ln a,\quad a>0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2+b^2tg^2t)dt=\pi\ln(a+b),\quad a>0,\ b>0,$$

видим, что

$$U_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(tg^2\frac{t}{2}\right)dt=2\ln\frac{2}{1+\rho}.$$

Разложим функцию $\phi(\rho)=2\ln\frac{2}{1+\rho}$ в ряд Тейлора по степеням $1-\rho$:

$$U_1=\phi(\rho)=(1-\rho)+\frac{(1-\rho)^2}{2^2}+\frac{(1-\rho)^3}{2^2\cdot 3}+\frac{(1-\rho)^4}{2^3\cdot 4}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\rho)^k}{k\cdot 2^{k-1}}. \qquad (9)$$

Сделав замену переменной в интеграле U_2, получим:

$$U_2=-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\frac{tg^2\frac{t}{2}+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2}{tg^2\frac{t}{2}}\,dt=-\frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 tg^2 t\right)dt.$$

Подынтегральную логарифмическую функцию разложим в ряд:

$$U_2=-\frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\cdot\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2m}\cdot tg^{2m}t\,dt=-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\cdot\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2m}\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}tg^{2m}t\,dt. \qquad (10)$$

Для нахождения интеграла в правой части равенства (10) используем формулу ([9, с. 158]):

$$\int tg^{2n}t\,dt=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{tg^{2n-2k+1}t}{2n-2k+1}+(-1)^n\cdot t\,.$$

Имеем, что

$$U_2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2m}\cdot\alpha_m\,,$$

где α_m определяется равенством (4).

Разложив функцию $\phi(\rho)=\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{2m}$ по степеням $1-\rho$ в ряд Тейлора, получим:

$$U_2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\rho)^{2m+s}}{2^{2m+s}}\cdot\frac{\Gamma(2m+s)}{\Gamma(2m)}\cdot\alpha_m. \qquad (11)$$

После подстановки (9) и (11) в (8) имеем (3). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1981. – 340 с.

2. Натансон, И.П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 72. – С. 11–14.

3. Тиман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 74. – С. 17–20.

4. Малей, Л.В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона / Л.В. Малей // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. – 1961, № 3. – С. 25–32.

5. Штарк, Е.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона / Е.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973.– Т. 13, №1 – С. 21–28.

6. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 169–180.

7. Sz.-Nagy, B. Sur l’ordre de l’approximation d’une function par son integrale de Poisson / B. Sz.-Nagy. – Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1950. – V. 1. – P. 183–188.

8. Баскаков, В.А. Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абеля – Пуассона / В.А. Баскаков // Применение функционального анализа в теории приближений, вып. 5. – Калинин : 1975. – С. 14–20.

9. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений / И.С. Гранштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Yu.I. Kharkevich, T.N. Zhernova, K.V. Shvaj. **The Full Asymptotic Decompositions of Values of Approximation of Conjugate Functions by their Conjugate Poisson Integrals**

We investigate the question of asymptotic behavior of exact upper borders of defluxion the conjugate periodic functions from their conjugate Poisson integrals. We obtained the decomposition of upper border in asymptotic series that gives the possibility to write down the constants of Kolmogorov-Nikolsky of arbitrary order.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 05.09.2012