

УДК 517

Н.П. Семенчук

ФОРМУЛЫ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СРЕДНИХ СОПРЯЖЁННОГО ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

В работе найдена асимптотическая формула типа Вороновской для обобщенных средних сопряженного интеграла Фурье дифференцируемых нечетное число раз функций в классе $L(-\infty, +\infty)$. Полученные результаты могут быть использованы при разработке аппроксимационных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем, как линейных, так и нелинейных.

В теории суммирования рядов и интегралов Фурье одной из важных задач является нахождение главного члена уклонения функций определённого класса от её линейных средних (операторов приближения) с равномерной оценкой остатка относительно всего класса указанных функций. Впервые такую задачу решила советский математик Е.В. Вороновская в 1932 году, приближая дважды непрерывно-дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции их полиномами Бернштейна. Она показала, что

$$f(x) - B_n(f, x) = -\frac{1}{2} \frac{x(1-x)}{n} f''(x) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

В дальнейшем результат Вороновской обобщался многими математиками (С.Н. Бернштейн, И.П. Натансон, П.П. Коровкин, А.В. Ефимов, А.К. Покало и др.). В исследованиях этих авторов операторы приближения в основном были построены на базе рядов Фурье.

В нашей работе найдены формулы типа Вороновской для обобщения средних сопряженного интеграла Фурье, дифференцируемых нечётное число раз функций.

Вначале рассмотрим приближение функций суммами Фейера. Доказана теорема.

Теорема 1. Если $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$ и ограничена на числовой прямой, то

$$F_\sigma(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{+\infty} \frac{f\left(x - \frac{t}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right)}{t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right), \quad (1)$$

где

$$F_\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma \left(1 - \frac{u}{\sigma}\right) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(x-t) dt \quad (2)$$

есть $(C, 1)$ – средние действительного интеграла Фурье (средние Фейера);

$$\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right) = \sup_{|t| \leq \frac{1}{\sigma}} \max_{x \in R} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)| - \quad (3)$$

модули гладкости второго порядка функции f ; $\lambda > 0$ – произвольная действительная постоянная.

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле (2) (используем теорему Фубини), получим

$$\begin{aligned}
F_{\sigma}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma(x-t)}{2}}{\sigma(x-t)^2} dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^x + \int_x^{+\infty} \right) = \\
&= I_1 + I_2 = \left[\begin{array}{l} I_1 : \text{подстановка } t := x - t \\ I_2 : \text{подстановка } (-t) := x - t \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt. \quad (4)
\end{aligned}$$

Используя известную формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2} dx = |m| \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

получим:

$$-f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} 2f(x) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt. \quad (6)$$

Тогда

$$F_{\sigma}(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi_x(t) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt, \quad (7)$$

где

$$\Phi_x(t) = f(x-t) - 2f(x) + f(x+t). \quad (8)$$

Представим (7) в следующем виде:

$$F_{\sigma}(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \Phi_x(t) \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{\sigma t^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} \cos \sigma t dt = I_1 + I_2 - I_3. \quad (9)$$

Оценим I_1 и I_3 .

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi \sigma} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} |\Phi_x(t)| \frac{2 \sin^2 \frac{\sigma t}{2}}{t^2} dt \leq C \omega_2 \left(\frac{1}{\sigma}; f \right),$$

то есть

$$I_1 = O \left(\omega_2 \left(\frac{1}{\sigma}; f \right) \right). \quad (10)$$

Для оценки I_3 воспользуемся тем, что функция $f(x)$ ограничена на числовой прямой. Тогда, по теореме С.Н. Бернштейна (например, [1, с. 243]), существует целая функция $g_{\sigma}(x) \in B_{\sigma}$ (B_{σ} – класс целых функций $g_{\sigma}(x)$ экспоненциального типа с показателем $\leq \sigma$, для которых $\sup_{x \in R} |g_{\sigma}(x)| < +\infty$), наименее уклоняющаяся от $f(x)$ на R .

Такую функцию обозначим через $g_{\sigma}(f; x)$. Тогда

$$A_{\sigma}(f) := \sup_{x \in R} |f(x) - g_{\sigma}(f; x)| = \inf_{g_{\sigma} \in B_{\sigma}} \sup_{x \in R} |f(x) - g_{\sigma}(x)| \quad (11)$$

есть наилучшее приближение функции $f(x)$ на числовой прямой посредством функций из класса B_{σ} . Будем иметь оценку:

$$\begin{aligned} |\Phi_x(t) - g_{\sigma}(f; x_1 t)| &= |(f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)) - \\ &- (g_{\sigma}(f; x-t) - 2g_{\sigma}(f; x) + g_{\sigma}(f; x+t))| \leq CA_{\sigma}(f). \end{aligned} \quad (12)$$

$f(x)$ при $\sigma > 0$

Известно, (например, [1, с. 262]), что для ограниченной на R функции будет

$$A_{\sigma}(f) \leq C_2 \omega_2\left(f, \frac{1}{\sigma}\right). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\Phi_x(t) = g_{\sigma}(f; x_1 t) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (14)$$

С учётом (14) преобразуем I_3 :

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{g_{\sigma}(f; x_1 t)}{\sigma^2} \cos \sigma t dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right) = I_3^1 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (15)$$

В интеграле I_3^1 проведем интегрирование по частям два раза ($dv = \cos \sigma t dt$), получим:

$$I_3^1 = \frac{g'_{\sigma}\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^3 \sigma} - \frac{2g_{\sigma}\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^4} - I_4, \quad (16)$$

где

$$I_4 = \frac{1}{\pi \sigma^3} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\infty} \left(\frac{g''_{\sigma}}{t^2} - \frac{4g'_{\sigma}}{t^3} + \frac{6g_{\sigma}}{t^4} \right) \cos \sigma t dt. \quad (17)$$

Далее воспользуемся неравенством из [2]

$$\sup_{x \in R} |g''_{\sigma}(f; x)| \leq \frac{\sigma^2}{2^2} \omega_2\left(g_{\sigma}, \frac{\pi}{\sigma}\right) \leq C_2 \sigma^2 \omega_2\left(g_{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right). \quad (18)$$

Учитывая (11) и (13), получим:

$$\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, g_{\sigma}\right) = \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, g_{\sigma} - f + f\right) \leq C'_2 \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, f\right).$$

Значит,

$$|g''_{\sigma}(f; x)| \leq C \sigma^2 \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, f\right). \quad (19)$$

Далее воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях, получим:

$$\left| g'_{\sigma}\left(\frac{\pi}{\sigma}\right) \right| \leq C \sigma \omega_2\left(\frac{1}{\sigma}, f\right). \quad (20)$$

Тогда

$$\frac{g'_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^3\sigma} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (21)$$

Аналогично, применяя дважды формулу Лагранжа и оценку (19), получим:

$$-\frac{2g_\sigma\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)}{\pi^4} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (22)$$

Далее оценим I_4 .

Применяя формулу Лагранжа, будем иметь:

$$g_\sigma(f; x, t) = t^2(\theta_2 - \theta_1) g''_\sigma(f, x + \theta t), \quad (23)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta \in (0, 1)$.

Также

$$g'_\sigma = 2tg''_\sigma(f; x + \theta t) \quad (24)$$

и

$$g''_\sigma = g''_\sigma(f; x + t) + g''_\sigma(f; x - t). \quad (25)$$

Из (23) – (25) и (19) имеем:

$$\left| \frac{g''_\sigma}{t^2} - \frac{4g'_\sigma}{t^3} + \frac{6g_\sigma}{t^4} \right| \leq \frac{C\sigma^2\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)}{t^2}. \quad (26)$$

Тогда

$$I_4 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (27)$$

Из (15), (16), (21), (22) и (27) следует, что

$$I_3 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (28)$$

С учетом (28) и (10) будем иметь:

$$F_\sigma(x) - f(x) = I_1 + I_2 - I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (29)$$

Возьмем $\forall \lambda \in R_+$. Из оценки

$$\max_x |\Phi_x(t)| \leq \sup_{|t| \leq \max\left\{\frac{\lambda}{\sigma}, \frac{\pi}{\sigma}\right\}} \max |\Phi_x(t)| = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right) \quad (30)$$

получим:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\lambda}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{\Phi_x(t)}{\sigma t^2} dt \right| \leq \frac{1}{\pi\sigma} \int_{\frac{\lambda}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} \frac{|\Phi_x(t)|}{t^2} dt = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f\right)\right). \quad (31)$$

Из (29) и (31) окончательно получим справедливость заключения теоремы 1.

Следствие 1. Если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать, чтобы $f(x) \in \text{lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то из (1) и (3) видно, что:

$$F_{\sigma}(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\left(x - \frac{t}{\sigma}\right) - 2f(x) + f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right)}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad (32)$$

причем, если $0 < \alpha < 1$, то и интеграл в (32) также имеет порядок $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$, то есть

$$F_{\sigma}(x) - f(x) = O\left(\frac{1}{\sigma^{\alpha}}\right). \quad (33)$$

Обобщим указанные выше результаты для обобщённых средних сопряженного интеграла Фурье.

Обозначим через $W^{(2\rho+1)}D$ (ρ – фиксированное целое неотрицательное число) класс абсолютно интегрируемых на числовой прямой функций вместе со своими существующими на R $(2\rho+1)$ – первыми производными, причем для любых $t \in R$ справедливо неравенство

$$\left| f^{(2\rho+1)}(t) \right| \leq D < \infty. \quad (34)$$

Очевидно, что все производные до порядка 2ρ включительно вместе с самой функцией $f(t)$ принадлежат классу Липшица порядка $\alpha = 1$ (при доказательстве воспользоваться формулой Лагранжа на любом отрезке $[a, b] \subset R$).

Построим обобщенные средние сопряженного интеграла Фурье с помощью формулы:

$$\bar{U}_{\sigma}(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} K(\sigma, u) du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(x-t) dt, \quad (35)$$

где

$$K(\sigma, u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) \left(\frac{u}{\sigma} \right)^m \quad (36)$$

есть абсолютно сходящийся функциональный ряд (сумма) по степеням $\frac{u}{\sigma}$, $u \in [0, \sigma]$, $\sigma > 0$.

Коэффициенты ряда (суммы) (36) такие, что ряд

$$A'_{\sigma} := a_0(\sigma) + \sum_{m=1}^{\infty} m |a_m(\sigma)| \quad (37)$$

сходится.

Доказана теорема.

Теорема 2. Если $f \in W^{(2\rho+1)}D$, то

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\sigma}(f; x) = & \sum_{v=0}^{\rho} (-1)^v \overline{f^{(2v)}}(x) \frac{a_{2v}(\sigma)}{\sigma^{2v}} + \sum_{v=1}^{\rho+1} (-1)^{v+1} f^{(2v-1)}(x) \frac{a_{2v-1}(\sigma)}{\sigma^{2v-1}} + \\ & + \frac{(-1)^{\rho}}{\sigma^{2\rho+1}} j_{\sigma, \rho}(x) \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) + \frac{1}{\sigma^{2\rho+1}} \left(O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f^{(2\rho+1)} \right) \right) + B_{\sigma, \rho} \right) A'_{\sigma}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{\sigma, \rho} &= O(1); \quad j_{\sigma, \rho}(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi_x^{(2\rho+1)}(t) \frac{\sin \sigma t}{t} dt; \\
\Phi_x^{(2\rho+1)}(t) &:= f^{(2\rho+1)}(x-t) - 2f^{(2\rho+1)}(x) + f^{(2\rho+1)}(x+t); \\
\overline{f^{(2\nu)}}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{2\nu} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(u(x-t) + \frac{2\nu+1}{2}\pi\right) dt; \\
f^{(2\nu-1)}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{2\nu-1} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\left(u(x-t) + \frac{(2\nu-1)\pi}{2}\right) dt.
\end{aligned}$$

Замечание 1. Если $f \in W^{(2\rho+1)}D$ и $f^{(2\rho+1)} \in Lip_M \alpha$ ($Lip_M \alpha$ – класс Липшица), где $\alpha \in (0, 1)$, то $B_{\sigma, \rho} = O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$ и $O\left(\omega_2\left(\frac{1}{\sigma}; f^{(2\rho+1)}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$.

Замечание 2. Для методов суммирования, у которых $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\sigma) = 0$, например: типичных средних (средних Зигмунда), у которых $K(\sigma, u) = 1 - \left(\frac{u}{\sigma}\right)^s$, слагаемое с множителем $j_{\sigma, \rho}(x)$ будет в формуле (38) отсутствовать.

И в этом случае, например, при выполнении условий замечания 1 (если $s > 2\rho + 1$) формула (38) примет вид

$$\overline{U}_{\sigma}(f; x) = \overline{f(x)} + O\left(\frac{1}{\sigma^{2\rho+1+\alpha}}\right). \quad (39)$$

Доказательство теоремы 2.

Проводим преобразование правой части равенства (35), используя интегрирование по частям, теорему Фубини при изменении порядка интегрирования, известные, а также доказываемые в работе тождества и оценки. В результате указанных преобразований получим выражения, содержащие в качестве компонентов множители (слагаемые), для которых применяют оценки вида (1) (теорема 1).

Введенный формулой (36) класс методов суммирования интегралов является регулярным и включает в себя многие известные классические методы суммирования (средние Фейера, метод типичных средних – средних Зигмунда, средние Рисса, метод Бернштейна – Рогозинского и др.).

Полученные в работе результаты исследований могут быть использованы при разработке аппроксимационных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов, И.И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени / И.И. Ибрагимов. – Баку, 1962.
2. Никольский, С.М. Обобщение одного неравенства С.Н. Бернштейна / С.М. Никольский // Докл. АН СССР, 60. – 1948. – № 9. – С. 1507–1510.

N.P. Semenchuk. Formulas of Voronovskaya's Type for Generalized Average of Conjugate Fourier's Integral

We established asymptotic formulas of Voronovskaya's type for generalized average of conjugate Fourier's integral of odd times differentiated functions in the class $L(-\infty, +\infty)$. The results can be used at development approximate methods of the decision differential and integral equations, as well as their systems, as linear so nonlinear.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 08.10.2012