УДК 512.542 DOI 10.63874/2218-0303-2025-2-108-114

Ирина Леонидовна Сохор
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Irina Sokhor
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

CP-ПОДГРУППЫ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ*

Примарным элементом конечной группы называют элемент, порядок которого есть степень некоторого простого числа. Для краткости подгруппу, порожденную примарным элементом, будем называть CP-подгруппой. Установлено строение конечной группы, CP-подгруппы которой субмодулярны или самонормализуемы. Доказано, что в группе с модулярными или самонормализуемыми CP-подгруппами каждая подгруппа, порядок которой не делится на порядок подгруппы Картера группы, перестановочна в группе.

Ключевые слова: *конечная группа, примарная подгруппа, циклическая подгруппа.*

CP-Subgroups in Finite Groups

A primary element of a finite group is an element with prime-power order. For brevity, a subgroup generated by a primary element is called a CP-subgroup. We described a structure of a finite group with submodular or self-normalizing CP-subgroups. In particular, we prove that in a finite group G with modular or self-normalizing CP-subgroups, every subgroup whose order does not divided by the order of a Carter subgroup of G is permutable in G.

Key words: *finite group, primary subgroup, cyclic subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Примарным элементом группы называют элемент, порядок которого есть степень некоторого простого числа. Для краткости подгруппу, порожденную примарным элементом, будем называть CP-подгруппой. Каждая неединичная группа содержит CP-подгруппы, и способ их вложения существенно влияет на строение всей группы. Так, группа, все CP-подгруппы которой нормальны, дедекиндова (т. е. каждая подгруппа в группе нормальна). Группа с субнормальными CP-подгруппами нильпотентна. Известны также признаки сверхразрешимости и обобщенной сверхразрешимости группы с ограничениями на CP-подгруппы [1–5].

Важным обобщением понятия нормальности является понятие модулярности, которое родом из теории решеток. Напомним [6, с. 43], что подгруппа H группы G называется модулярной подгруппой группы G, если H является модулярным элементом решетки $\mathcal{L}(G)$ всех подгрупп группы G, а значит, выполнены следующие соотношения:

(1) $\langle A, H\rangle \cap B = \langle A, H \cap B\rangle$ для всех $A, B \le G$ таких, что $A \le B$;

(2) $\langle A, H\rangle \cap B = \langle H, A \cap B\rangle$ для всех $A, B \le G$ таких, что $H \le B$.

Подгруппа H группы G называется перестановочной в G [7, с. 43], если H перестановочна с каждой подгруппой группы G.

В силу тождества Дедекинда каждая перестановочная подгруппа, в частности, каждая нормальная подгруппа, модулярна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номер госрегистрации 20211467).

Обратное, вообще говоря, неверно. Так, в неабелевой группе порядка 6 подгруппа порядка 2 модулярна, но неперестановочна. Поскольку подгруппа, порожденная модулярными подгруппами, модулярна в группе (лемма 1 ниже), то группа, каждая CP-подгруппа которой модулярна, является M-группой [6, с. 41], т. е. группой с модулярной решеткой подгрупп.

Модулярность в общем случае нетранзитивна. Поэтому естественным обобщением понятия модулярности является понятие субмодулярности.

Подгруппа H группы G называется субмодулярной подгруппой группы G, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq \ldots \leq H_i \leq H_{i+1} \leq \ldots \leq H_n = G$$

такая, что подгруппа H_i модулярна в H_{i+1} для каждого i [8, с. 546].

Класс $\mathcal{C}$ всех групп, в которых каждая CP-подгруппа субмодулярна, введен в рассмотрение и описан в [9]. В частности, каждая группа из класса $\mathcal{C}$ имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Свойства групп из класса $\mathcal{Z}$ всех групп, каждая примарная подгруппа которых субмодулярна, описаны в работах [8–10]. Заметим, что $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}$, причем это включение собственное [9, пример 3].

В настоящей работе исследуются группы с субмодулярными или самонормализуемыми CP-подгруппами. Отметим, что в общем случае субмодулярность и самонормализуемость не являются альтернативными понятиями. Так, в симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа D_8 субмодулярна и самонормализуема. Доказана следующая

Теорема 1. *В группе G каждая* CP-*подгруппа субмодулярна или самонормализуема тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathcal{C}$, либо группа G представима в виде $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ – силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и подгруппа Картера группы G и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$.*

Вспомогательные результаты

Если H – подгруппа (собственная подгруппа) группы G, то будем писать $H \leq G$ и $H < G$ соответственно. Через $\pi(G)$ будем обозначать множество всех простых делителей порядка группы G, а через $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B; $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ – класс всех абелевых и всех нильпотентных групп соответственно.

Напомним, подгруппой Картера называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу ([11, VI.12], [12, IV]). В любой разрешимой группе подгруппы Картера являются $\mathfrak{N}$-проекторами, они существуют и сопряжены [12, теорема 15.4]. В неразрешимой группе подгруппы Картера может не быть, но, согласно теореме Е. П. Вдовина [13], в доказательстве которой используется классификация конечных простых групп, подгруппы Картера сопряжены в любой группе, где существуют.

Нам потребуются следующие свойства модулярных и субмодулярных подгрупп.

Лемма 1 [6, с. 361]. Пусть G – группа, K – подгруппа группы G, H – модулярная подгруппа группы G и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда

(1) подгруппа H^g модулярна в группе G для любого $g \in G$;

(2) если $N \leq H$, то H/N модулярна в G/N;

(3) если $N \leq K$ и K/N модулярна в G/N, то подгруппа K модулярна в группе G;

(4) подгруппа $H \cap K$ модулярна в K;

(5) если подгруппа K модулярна в группе G, то $\langle H, K \rangle$ модулярна в группе G.

Лемма 2 [8, лемма 1]. Пусть G – группа, K – подгруппа группы G, H – субмодулярная подгруппа группы G, N – нормальная подгруппа группы G. Тогда

(1) подгруппа H^g субмодулярна в группе G для любого $g \in G$;

(2) если $N \leq H$, то H/N субмодулярна в G/N;

(3) если $N \leq K$ и K/N субмодулярна в G/N, то подгруппа K субмодулярна в G;

(4) подгруппа $H \cap K$ субмодулярна в K;

(5) если $K \leq H$ и подгруппа K субмодулярна в H, то H субмодулярна в группе G.

Лемма 3 [6, лемма 5.1.9]. Примарная подгруппа A группы G модулярна в G тогда и только тогда, когда либо A перестановочна в G, либо $G/A_G = A^G/A_G \times B/A_G$, где A^G/A_G – холлова неабелева P-группа.

Здесь и далее H_G – ядро подгруппы H в группе G, т. е. наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H, H^G – нормальное замыкание подгруппы H в группе G, т. е. наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая H. Напомним [6, с. 49], что неабелева P-группа представима в виде полупрямого произведения элементарной абелевой нормальной подгруппы P порядка p^{n-1} и подгруппы Q простого порядка $q \neq p$, которая индуцирует нетривиальный степенной автоморфизм на P.

Лемма 4 [6, лемма 5.1.1]. Подгруппа H группы G перестановочна в G тогда и только тогда, когда подгруппа H модулярна и субнормальна в G.

Группа, в которой каждая подгруппа перестановочна, называется группой Ивасавы [7, с. 24]. Понятно, что группа Ивасавы нильпотентна. В силу леммы 4 любая группа Ивасавы является M-группой. Поэтому p-группа Ивасавы либо является дедекиндовой группой, либо содержит абелеву нормальную подгруппу N такую, что G/N – циклическая и $a^x = a^{1+p^s}$ для всех $a \in N$, причем $s \geq 2$ для $p = 2$ [7, теорема 1.4.3].

Основной результат

Доказательство теоремы 1.

Если в группе G каждая CP-подгруппа субмодулярна, то $G \in \mathcal{C}$. Пусть $G \notin \mathcal{C}$. Тогда группа G содержит CP-подгруппу $A = \langle x \rangle$, которая не субмодулярна в G.

Для определенности будем считать, что A является p-группой для некоторого $p \in \pi(G)$. По условию подгруппа A самонормализуема, т. е. $N_G(A) = A$, а значит, A – силовская подгруппа группы G и подгруппа Картера. В силу [11, IV.2.6] группа G содержит нормальную подгруппу N такую, что $G = N \rtimes A$. Понятно, что $p \notin \pi(N)$. Выберем произвольную CP-подгруппу X группы N. Тогда по условию подгруппа X субмодулярна или самонормализуема в группе G. Если $N_G(X) = X$, то подгруппа X является подгруппой Картера группы G. Поэтому подгруппы A и X сопряжены – противоречие. Следовательно, каждая CP-подгруппа из N субмодулярна в группе G. Поэтому в подгруппе N все CP-подгруппы субмодулярны по лемме 2 (4), и $N \in \mathcal{C}$. Таким образом, группа G разрешима. Поскольку в разрешимой группе подгруппа Картера является $\mathfrak{N}$-проектором [12, теорема 15.4], то $G = N \rtimes A = G^{\mathfrak{N}}A$. Отсюда $N \leq G^{\mathfrak{N}}$.

Так как $G/N \simeq \langle x \rangle \in \mathfrak{A}$, то $G^{\mathfrak{N}} \leq G' \leq N$, и $N = G'$. Таким образом, $G = G' \rtimes \langle x \rangle$. Пусть X – произвольная CP-подгруппа из $G' \rtimes \langle x^p \rangle$. Если подгруппа X самонормализуема в G, то подгруппа X является подгруппой Картера группы G, и подгруппы X и $\langle x \rangle$ сопряжены – противоречие. Поэтому каждая CP-подгруппа из $G' \rtimes \langle x^p \rangle$ субмодулярна в G, а значит, и в $G' \rtimes \langle x^p \rangle$ по лемме 2 (4). Следовательно, $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$.

Наоборот, если $G \in \mathcal{C}$, то каждая CP-подгруппа группы G субмодулярна в G.

Пусть $G \notin \mathcal{C}$ и $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ – силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и подгруппа Картера группы G и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$. Выберем произвольную CP-подгруппу X группы G. Если $p \notin \pi(X)$, то $X \leq G' \in \mathcal{C}$, а значит, X субмодулярна в G'. Отсюда, по лемме 2 (5) подгруппа X субмодулярна в группе G. Пусть $p \in \pi(X)$. Если $|X| = |\langle x \rangle|$, то подгруппы $\langle x \rangle$ и X сопряжены. Поэтому X – подгруппа Картера группы G и $X = N_G(X)$. Если $|X| \neq |\langle x \rangle|$, то $X^g < \langle x \rangle$ для некоторого $g \in G$. Следовательно, $X^g \leq G' \rtimes \langle x^p \rangle$. Поскольку $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$, то X^g субмодулярна в $G' \rtimes \langle x^p \rangle$, а значит, по лемме 2 (5) подгруппа X^g субмодулярна в группе G, т. к. $G' \rtimes \langle x^p \rangle$ нормальна в G. Таким образом, подгруппа X субмодулярна в группе G по лемме 2 (1). Теорема доказана.

Следствие 1.1 [14, теорема 2]. *В группе G каждая примарная подгруппа субмодулярна или самонормализуема тогда и только тогда, когда G – группа одного из следующих типов:*

(1) $G \in \mathcal{Z}$;

(2) $G \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Z}$, *и группа G представима в виде $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes R$, где R – несубмодулярная нециклическая силовская r-подгруппа и подгруппа Картера группы G, $r = \min \pi(G)$, и $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X \in \mathcal{Z}$ для каждой собственной подгруппы X из R;*

(3) $G \notin \mathcal{C}$, *и группа G представима в виде $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ – силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и подгруппа Картера группы G и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{Z}$.*

Доказательство.

Пусть в группе G каждая примарная подгруппа субмодулярна или самонормализуема. Тогда в группе G каждая CP-подгруппа субмодулярна или самонормализуема, и, по теореме 1, либо $G \in \mathcal{C}$, либо группа G представима в виде $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ – силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и подгруппа Картера группы G и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$. Если в группе G все примарные подгруппы субмодулярны, то $G \in \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{C}$. Пусть группа G содержит несубмодулярную r-подгруппу R для некоторого $r \in \pi(G)$ и группа $G \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Z}$. Тогда подгруппа R нециклическая, и, по условию, $N_G(R) = R$. Следовательно, подгруппа R является подгруппой Картера группы G. Поскольку группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа в силу [9, лемма 3.2], то $r = \min \pi(G)$ и в группе G существует нормальная r'-холлова подгруппа $G_{r'}$. Поэтому $G = G_{r'} \rtimes R$ и $G_{r'} \leq G^{\mathfrak{N}}$. С другой стороны, $G/G_{r'} \simeq R \in \mathfrak{N}$, а значит, $G^{\mathfrak{N}} = G_{r'}$ и $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes R$. Пусть X – собственная подгруппа из R и B – произвольная примарная подгруппа из $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X$. По условию, подгруппа B самонормализуема или субмодулярна в группе G. Если $N_G(B) = B$, то подгруппы R и B сопряжены – противоречие. Поэтому подгруппа B субмодулярна в группе G. Отсюда, по лемме 2 (4), подгруппа B субмодулярна в $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X$, и $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X \in \mathcal{Z}$. Пусть теперь $G \notin \mathcal{C}$ и группа G представима в виде $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ – силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и подгруппа Картера группы G и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{C}$. Выберем произвольную примарную подгруппу B группы $G' \rtimes \langle x^p \rangle$. Поскольку $|\langle x \rangle|$ не делит $|B|$, то подгруппа B несамонормализуема в группе G. Отсюда, по условию подгруппа, B субмодулярна в G. Следовательно, по лемме 2 (4), подгруппа B субмодулярна в группе $G' \rtimes \langle x^p \rangle$, и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{Z}$.

Наоборот, если $G \in \mathcal{Z}$, то каждая примарная подгруппа группы G субмодулярна в G. Пусть группа $G \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Z}$ и $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes R$, где R – несубмодулярная нециклическая силовская r-подгруппа и подгруппа Картера группы G, $r = \min \pi(G)$, и $G^{\mathfrak{N}} \rtimes X \in \mathcal{Z}$ для каждой собственной подгруппы X из R. Выберем произвольную q-подгруппу Q группы G. Если $q \neq r$, то $Q \leq G^{\mathfrak{N}} \in \mathcal{Z}$ и подгруппа Q субмодулярна в G (по лемме 2). Пусть $q = r$, тогда $Q^g \leq R$ для некоторого $g \in G$. Если $Q^g = R$, то $Q = N_G(Q)$. Пусть $Q^g < R$, тогда $G^{\mathfrak{N}} \rtimes Q^g \in \mathcal{Z}$ и подгруппа Q субмодулярна в G (по лемме 2).

Аналогично можно показать, что если группа $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ – силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и подгруппа Картера группы G и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathcal{Z}$, то в группе G каждая примарная подгруппа субмодулярна или самонормализуема. Следствие доказано.

Пример. В знакопеременной группе A_4 степени 4 каждая CP-подгруппа субмодулярна или самонормализуема, при этом подгруппа C_2 немодулярна и несамонормализуема.

Следствие 1.2. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в группе G каждая* CP-*подгруппа модулярна или самонормализуема;*

(2) *в группе G каждая примарная подгруппа модулярна или самонормализуема;*

(3) *в группе G каждая подгруппа модулярна или самонормализуема;*

(4) *группа G либо является М-группой, либо представима в виде $G = G' \rtimes \langle x\rangle$, где $\langle x\rangle$ – силовская подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и подгруппа Картера группы G, и каждая собственная подгруппа группы G, которая не содержит подгруппу Картера группы G, перестановочна в G, в частности, $G' \rtimes \langle x^p\rangle$ – группа Ивасавы.*

Доказательство.

Пусть в группе G каждая CP-подгруппа модулярна или самонормализуема и A – произвольная примарная подгруппа группы G. Если подгруппа A содержит некоторую самонормализуемую CP-подгруппу X, то A также самонормализуема. Пусть все CP-подгруппы из A модулярны в G. Тогда, по лемме 1 (5), подгруппа A модулярна в G. Таким образом, в группе G каждая примарная подгруппа модулярна или самонормализуема, а значит, $(1) \Rightarrow (2)$. Аналогично можно показать, что $(1) \Rightarrow (3)$.

Понятно, что если в группе G каждая примарная подгруппа (каждая подгруппа) субмодулярна или самонормализуема, то и каждая CP-подгруппа субмодулярна или самонормализуема, а значит, $(2) \Rightarrow (1)$ и $(3) \Rightarrow (1)$.

Пусть в группе G каждая CP-подгруппа модулярна или самонормализуема. Если в группе G все CP-подгруппы модулярны, то G – M-группа по лемме 1 (5). Пусть группа G содержит немодулярную CP-подгруппу $A = \langle x\rangle$. Для определенности будем считать, что A является p-группой для некоторого $p \in \pi(G)$. По условию, $N_G(A) = A$, а значит, A – силовская подгруппа и подгруппа Картера группы G. Согласно теореме 1, либо $G \in \mathcal{C}$, либо $G = G' \rtimes \langle x\rangle$ и $G' \rtimes \langle x^p\rangle \in \mathcal{C}$.

Если группа $G \in \mathcal{C}$, то в силу [9, лемма 3.2] группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Поэтому $p = \min \pi(G)$ и в группе G существует нормальная p'-холлова подгруппа $G_{p'}$, а значит, $G = G_{p'} \rtimes \langle x\rangle$ и $G_{p'} \leq G'$. Так как $G/G_{p'} \simeq \langle x\rangle \in \mathfrak{A}$, то $G_{p'} = G'$ и $G = G' \rtimes \langle x\rangle \in \mathcal{C}$, в частности, $G' \rtimes \langle x^p\rangle \in \mathcal{C}$ в силу [9, предложение 3.3, следствие 3.5]. Пусть X – произвольная CP-подгруппа группы G, порядок которой не делится на $|\langle x\rangle|$. По условию, подгруппа X модулярна или самонормализуема в группе G. Если $X = N_G(X)$, то X – подгруппа Картера группы G и подгруппы X и $\langle x\rangle$ сопряжены – противоречие. Поэтому X модулярна в G.

Докажем, что подгруппа X субнормальна в группе G.

Предположим обратное. Тогда, в силу леммы 4, подгруппа X неперестановочна в G и, по лемме 3, $G/X_G = X^G/X_G \times B/X_G$, где X^G/X_G – холлова неабелева P-группа. Так как порядок подгруппы X не делится на $|\langle x\rangle|$, то $G'X$ – собственная подгруппа группы G. Подгруппа $\langle x\rangle X_G/X_G$ является подгруппой Картера группы G/X_G. Поскольку $(|X^G/X_G|, |B/X_G|) = 1$, то либо $\langle x\rangle X_G/X_G \leq X^G/X_G$, либо $\langle x\rangle X_G/X_G \leq B/X_G$. Если $\langle x\rangle X_G/X_G \leq X^G/X_G$, то $G = X^G \leq G'X < G$ – противоречие. Пусть $\langle x\rangle X_G/X_G \leq B/X_G$, тогда $X^G = X_G$ и подгруппа X нормальна в G – противоречие. Таким образом, каждая CP-подгруппа группы G, порядок которой не делится на $|\langle x\rangle|$, субнормальна и модулярна в группе G, а значит, перестановочна (в силу леммы 4). Отсюда, согласно [6, с. 202], каждая подгруппа группы G, порядок которой не делится на $|\langle x\rangle|$, перестановочна в G, в частности, $G' \rtimes \langle x^p\rangle$ – группа Ивасавы. Поэтому $(1) \Rightarrow (4)$.

Если группа G является M-группой, то каждая ее подгруппа, в частности, каждая CP-подгруппа модулярна. Пусть группа G представима в виде $G = G' \rtimes \langle x\rangle$, где $\langle x \rangle$ – силовская подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$, и подгруппа Картера группы G, и каждая собственная подгруппа группы G, порядок которой не делится на $|\langle x \rangle|$, перестановочна в G. Выберем произвольную CP-подгруппу X группы G. Если $p \notin \pi(X)$, то подгруппа X перестановочна в G, а значит, модулярна (по лемме 4.)

Пусть $p \in \pi(X)$, тогда $X^g \leq \langle x \rangle$ для некоторого $g \in G$. Если $X^g = \langle x \rangle$, то подгруппы $\langle x \rangle$ и X сопряжены, и X – подгруппа Картера группы G, а значит, $X = N_G(X)$. Пусть $X^g < \langle x \rangle$, тогда подгруппа X перестановочна в группе G. Отсюда, по лемме 4, подгруппа X модулярна в G. Таким образом, $(4) \Rightarrow (1)$. Следствие доказано.

Следствие 1.2 дополняет результат, полученный в [14, следствие 3].

Следствие 1.3. *Пусть в группе G каждая CP-подгруппа модулярна или самонормализуема, K – подгруппа Картера группы G и H – собственная подгруппа группы G. Если $|K|$ делит $|H|$, то подгруппа H абнормальна в группе G. Если $|K|$ не делит $|H|$, то подгруппа H перестановочна в группе G.*

Заключение

В настоящей работе описано строение группы с субмодулярными или самонормализуемыми CP-подгруппами. В такой группе либо все CP-подгруппы субмодулярны, либо она представима в виде полупрямого произведения своего коммутанта и подгруппы Картера, которая является циклической силовской подгруппой.

В качестве следствия установлено, то в группе с модулярными или самонормализуемыми CP-подгруппами каждая подгруппа, порядок которой не делится на порядок подгруппы Картера группы, перестановочна в группе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Monakhov, V. S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

2. Мурашко, В. И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами / В. И. Мурашко // Сибирский математический журнал. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 1353–1367.

3. Монахов, В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами / В. С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

4. Монахов, В. С. О трех формациях над $\mathfrak{U}$ / В. С. Монахов // Математические заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 358–367.

5. Васильева, Т. И. О конечных группах с $\mathbb{P}_\pi$-субнормальными подгруппами / Т. И. Васильева, А. Г. Коранчук // Математические заметки. – 2023. – Т. 114, № 4. – С. 483–496.

6. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin ; New York : Walter De Gruyter, 1994. – 584 p.

7. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : De Gruyter, 2010. – 346 p.

8. Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Mathematische Zeitschrift. – 1989. – Vol. 202, nr 4. – P. 545–557.

9. Monakhov, V. S. Finite groups with submodular primary subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Archiv der Mathematik. – 2023. – Vol. 121, nr 1. – P. 1–10.

10. Васильев, В. А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В. А. Васильев // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. – 793 p.

12. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

13. Вдовин, Е. П. Картеровы подгруппы конечных групп / Е. П. Вдовин // Математические труды. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 20–106.

14. Sokhor, I. L. Finite groups with modular and submodular subgroups / I. L. Sokhor // Сибирские электронные математические известия. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. 501–512.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

2. Murashko, V. I. Klassy konechnykh grupp s obobshchenno subnormal'nymi tsiklicheskimi primarnymi podgruppami / V. I. Murashko // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2014. – T. 55, № 6. – S. 1353–1367.

3. Monakhov, V. S. Konechnye gruppy s abnormal'nymi i $\mathfrak{U}$-subnormal'nymi podgruppami / V. S. Monakhov // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2016. – T. 57, № 2. – S. 447–462.

4. Monakhov, V. S. O trekh formatsiyakh nad $\mathfrak{U}$ / V. S. Monakhov // Matematicheskie zametki. – 2021. – T. 110, № 3. – S. 358–367.

5. Vasil'eva, T. I. O konechnykh gruppakh s $\mathbb{P}_{\pi}$-subnormal'nymi podgruppami / T. I. Vasil'eva, A. G. Koranchuk // Matematicheskie zametki. – 2023. – T. 114, № 4. – S. 483–496.

6. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin ; New York : Walter De Gruyter, 1994. – 584 p.

7. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : De Gruyter, 2010. – 346 p.

8. Zimmermann, I. Submodular subgroups in finite groups / I. Zimmermann // Mathematische Zeitschrift. – 1989. – Vol. 202, nr 4. – P. 545–557.

9. Monakhov, V. S. Finite groups with submodular primary subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Archiv der Mathematik. – 2023. – Vol. 121, nr 1. – P. 1–10.

10. Vasil'ev, V. A. Konechnye gruppy s submodulyarnymi silovskimi podgruppami / V. A. Vasil'ev // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2015. – T. 56, № 6. – S. 1277–1288.

11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. – 793 p.

12. Shemetkov, L. A. Formatsii konechnykh grupp / L. A. Shemetkov. – M. : Nauka, 1978. – 272 s.

13. Vdovin, E. P. Karterovy podgruppy konechnykh grupp / E. P. Vdovin // Matematicheskie trudy. – 2008. – T. 11, № 2. – S. 20–106.

14. Sokhor, I. L. Finite groups with modular and submodular subgroups / I. L. Sokhor // Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya. – 2024. – T. 21, № 1. – S. 501–512.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 08.11.2025