

УДК 917.948

**В.М. Мадорский****НЕЛОКАЛЬНЫЕ НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ  
ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЛОКАЛЬНО  
СХОДЯЩИЕСЯ С КУБИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ**

В работе рассматриваются нелокальные нерегуляризованные сверхлинейные итерационные процессы для решения уравнения  $f(x) = 0$  в пространстве  $R^n$ . Ряд предлагаемых к рассмотрению методов сходится к решению уравнения локально с кубической скоростью. Процессы сходятся к точному решению операторного уравнения «плохого» начального приближения.

Для решения нелинейного уравнения

$$f(x) = 0; f \in C_D, f(D \subset R^n \rightarrow R^n) \quad (1)$$

будем применять итерационный процесс, который можно записать в следующем компактном виде:

$$x_{n+1} = x_n - [f(x_n, y_n)]^{-1} \left( f(x_n) + f \left( x_n - [f'(x_n, y_n)]^{-1} f(x_n) \right) \right). \quad (2)$$

Здесь  $f(x, y)$  – оператор первой разделенной разности оператора  $f(x)$ , и если оператор  $f(x)$  таков, справедлив аналог теоремы о среднем для непрерывных операторов

$$\|f(x) - f(y) - f(x, y)(x - y)\| \leq K \|x - y\| \|x - z\| \text{ и имеют место оценки}$$

$$\|[f(x, y)]^{-1}\| \leq B; \|f(x, z) - f(z, y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \text{ то, вводя оператор}$$

$G(x) = S(x) - [f(x, y)]^{-1} f(S(x))$ ,  $S(x)$  – оператор Стеффенсена [1], можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|G(x) - x^*\| &\leq \|[f(x, y)]^{-1}\| \|f(x, y)S(x) - f(S(x)) - f(x, y)x^*\| \leq \\ &\leq B \|f(S(x)) - f(x^*) - f(x^*, y^*)(S(x) - x^*) + \\ &+ (f(x^*, y^*) - f(x, y))(S(x) - x^*)\| \leq \\ &\leq B(K \|S(x) - x^*\| \|S(x) - y^*\| + \|f(x^*, y^*) - f(x, y)\| \|S(x) - x^*\|) \leq \\ &\leq BK \|S(x) - x^*\| \|S(x) - x^* + f(x^*)\| + \\ &+ \|f(x^*, y^*) - f(y^*, x) + f(y^*, x) - f(x, y)\| \|S(x) - x^*\| \leq \\ &\leq BK \|S(x) - x^*\|^2 + (\alpha \|x - x^*\| + \alpha \|y - y^*\|) \|S(x) - x^*\| \leq \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\leq BK \|S(x) - x^*\|^2 + (\alpha \|x - x^*\| + \alpha \|x^* - f(x^*) - x + f(x)\|) \|S(x) - x^*\| = \\ &= BK \|S(x) - x^*\|^2 + \alpha \|S(x) - x^*\| \|x - x^*\| + \|x - x^*\| (1 + C) \leq \\ &\leq BK \|S(x) - x^*\|^2 + \alpha \|S(x) - x^*\| \|x - x^*\| (2 + C) = O(\|x - x^*\|^3) \end{aligned}$$

Здесь  $x^*$  – решение уравнения (1),  $\|f(x^*, x)\| \leq C$ .

Из оценки (3) следует, по крайней мере, локальная кубическая скорость итерационного процесса (2).

Для решения уравнения (1) применяем итерационный процесс.

Этап 1. Решается линейная система.

$$f(x_n, z_n) \Delta y_n = -f(x_n), z_n = x_n - f(x_n), y_n = x_n + \Delta y_n. \quad (4)$$

Этап 2. Решается вторая линейная система.

$$\begin{aligned} f(x_n, z_n) \Delta x_n &= -(f(x_n) + \beta_n f(y_n)), \\ \beta_0 &\in [10^{-4}; 10^{-1}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Этап 3. Вносится поправка.

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n. \quad (6)$$

Этап 4. Проводим проверку окончания процесса: если  $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$ , ( $\varepsilon$  – малая величина, параметр останова), то конец просчетов, иначе этап 5.

Этап 5. Делается перерасчет регулятора длины шага по следующим формулам: если  $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$ , то  $\beta_{n+1} := 1$ , иначе

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \min \left( 1, \frac{\|f(x_n)\| \gamma_n}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n} \right), k = 0, 1, \dots \\ \gamma_{n+1} &= \frac{\beta_{n+1} \gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}, \gamma_0 = \beta_0^2 \end{aligned} \quad (7)$$

и переходим на этап 1.

Докажем сходимость этого процесса. Описанный выше итерационный процесс символически можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \beta_n [f(x_n, z_n)]^{-1} (f(x_n) + \beta_n f(x_n - [f(x_n, z_n)]^{-1} f(x_n))) = \\ &= x_n - \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, \dots; \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}]. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу того, что  $f \in C_D$ , справедлива оценка

$$\begin{aligned} |f(x_{n+1}) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n)| &\leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (4) соотношение (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1}) - f(x_n) + \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n)\| &\leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) имеем оценку

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (11)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Оценим  $\|f(y_n)\|$  и  $\|f(x_n)\|$ . Используя теорему о среднем, имеем

$$\|f(y_n) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(y_n - x_n)\| \leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (12)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

откуда в силу (4), (12) справедлива оценка для  $\|f(y_n)\|$

$$\|f(y_n)\| \leq KB^2 \|f(x_n)\|^2; \beta_n \|f(y_n)\| = h_n \|f(x_n)\|. \quad (13)$$

Здесь  $h_n = \beta_n KB^2 \|f(x_n)\|$ , далее из (5), (13) имеем

$$\|\Delta x_n\| \leq \beta_n B (\|f(x_n)\| + \beta_n \|f(y_n)\|) \leq \beta_n B (1 + h_n) \|f(x_n)\|. \quad (14)$$

Подстановка (13), (14) в (10) позволяет выразить связь между нормами невязок на соседних шагах.

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n h_n \|f(x_n)\| + \beta_n h_n (1 + h_n)^2 = \\ &= (1 - \beta_n (1 - h_n (2 + 2h_n + h_n^2))) \|f(x_n)\|. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (7) имеем, что при  $\beta_k < 1$  справедлива цепочка равенств

$$\beta_0 \|f(x_0)\| = \beta_1 \|f(x_1)\| = \dots = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|. \quad (16)$$

Если положить  $\delta_n = h_n (2 + 2h_n + h_n^2)$  и  $q_n = 1 - \beta_n (1 - \delta_n)$ , то неравенство (15) можно переписать в более компактном виде

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n (1 - \delta_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|. \quad (17)$$

Соотношение (17) является базовым при доказательстве сходимости итерационных процессов локально сходящихся с кубической скоростью.

**Теорема 2.1.** Пусть в области  $D = S(x_0, r)$ ,  $r = \frac{B \|f(x_0)\| (2 + h_0)}{1 - q_0}$  существует  $x^*$  – решение нелинейного уравнения (1), оператор  $f$  удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$\delta_0 = h_0 (2 + 2h_0 + h_0^2) < 1. \quad (18)$$

Тогда итерационный процесс (4) – (7) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к  $x^*$ .

*Доказательство.* При  $n = 0$  из (17), (16) имеем, что

$$\|f(x_1)\| \leq (1 - \beta_0 (1 - \delta_0)) \|f(x_0)\| = q_0 \|f(x_0)\|;$$

$$q_0 = 1 - \beta_0 (1 - \delta_0) < 1, h_0 < 1.$$

Откуда следует, что  $\|f(x_1)\| < \|f(x_0)\|$ ,  $\beta_1 > \beta_0$ .

При  $n = 1$  имеем, что

$$h_1 = \beta_1 KB^2 \|f(x_1)\| = h_0,$$

$$\alpha_1 = 1 - \beta_1 (1 - h_1) = 1 - \beta_1 (1 - h_0) < 1 - \beta_0 (1 - h_0) = \alpha_0,$$

$$\delta_1 = h_1 (2 + 2h_1 + h_1^2) = \delta_0 < 1,$$

$$\|f(x_2)\| \leq (1 - \beta_1 (1 - \delta_1)) \|f(x_1)\| = q_1 \|f(x_1)\|, q_1 < q_0.$$

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность  $\{q_n\}$  монотонно убывает к нулю, последовательность  $\{\beta_n\}$  монотонно возрастает к 1, и справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_0)\|,$$

из которой следует, что последовательность элементов  $\{x_n\}$  по функционалу стремиться к нулю,  $h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и при некотором  $k > n_0$  итерационный процесс (4) – (7) входит в область притяжения процесса с  $\beta_k = 1$ .

Нетрудно проверить, что все  $x_n, y_n \in D$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta x_i\| < B \|f(x_0)\| \frac{1+h_0}{1-q_0}; \\ \|y_n - x_0\| &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| < \\ &< B \|f(x_n)\| + B \frac{\|f(x_0)\| (1+h_0)}{1-q_0} < \frac{B \|f(x_0)\|}{1-q_0} (2+h_0). \end{aligned}$$

Стандартным образом можно показать не только слабую сходимость последовательности  $\{x_n\}$  к  $x^*$ , но и сильную сходимость  $\{x_n\}$  к  $x^*$ :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|\Delta x_i\| < B \|f(x_0)\| (1+h_0) \prod_{i=0}^{n-1} q_i. \quad (19)$$

Из (19) следует фундаментальность элементов  $\{x_n\}$ , в силу полноты пространства  $R^n$  существование предельного элемента  $x^*$ , который, как просто проверить, является решением исходной нелинейной системы. Так как  $\exists k \in N$ , при котором  $\beta_k = 1$ , а следовательно  $\forall n > k \beta_n = 1$ , то, как показано выше, процесс (4) – (7) с  $\beta_n = 1$  обладает кубической скоростью сходимости. *Теорема доказана.*

Опишем следующий эффективный процесс, реализующий неполный прогноз.

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(y_n - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta y_n = -f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор  $x_n$  для определения вектора  $y_n$

$$y_n = x_n + \Delta y_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Шаг 3. Решается линейная система

$$\begin{aligned} f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n) &= f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n (f(x_n) + \beta_n f(y_n)), \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Шаг 4. Вносится поправка в вектор  $x_n$  для определения вектора очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Шаг 5. Проверяется окончание итерационного процесса: если  $\|f(x_{n+1})\|$  и (или)  $\|\Delta x_n\| < \varepsilon$  – конец подсчетов, иначе – переход на шаг 6.

Шаг 6. Производится пересчет шаговой длины по формуле если  $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$ , то  $\beta_{n+1} := 1$ , иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n (\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|)}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \beta_{n+1} \|f(x_n)\| (\|f(x_{n+1})\| + \|f(x_{n+2})\|)}{\beta_n (\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|) \|f(x_{n+2})\|}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (24)$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2 (\|f(x_0)\| + \|f(x_1)\|)}{\|f(x_1)\|}, \quad \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]$$

и переход на шаг 1.

Описанный выше итерационный процесс символически можно записать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n [f(x_n, z_n)]^{-1} \left( f(x_n) + \beta_n f \left( x_n - [f(x_n, z_n)]^{-1} f(x_n) \right) \right) =$$

$$= x_n - \beta_n \Delta x_n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}].$$

В силу того, что  $f \in C_D$ , справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n)\| \leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (25)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

С учетом (20), соотношение (25) можно переписать в виде

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) + \beta_n f(x_n) + \beta_n^2 f(y_n)\| \leq K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (26)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Из (26) имеем оценку

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n^2 \|f(y_n)\| + K \|x_{n+1} - x_n\| \|x_{n+1} - z_n\|, \quad (27)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Оценим  $\|f(y_n)\|$  и  $\|\Delta x_n\|$ . Используя теорему о среднем, имеем

$$\|f(y_n) - f(x_n) - f(x_n, z_n)(y_n - x_n)\| \leq K \|y_n - x_n\| \|y_n - z_n\|, \quad (28)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

откуда в силу (19), (28) справедлива оценка для  $\|f(y_n)\|$ :

$$\|f(y_n)\| \leq KB^2 \|f(x_n)\|^2; \quad \beta_n \|f(y_n)\| = h_n \|f(x_n)\|. \quad (29)$$

Здесь  $h_n = \beta_n KB^2 \|f(x_n)\|$ . Далее, из (24), (29) имеем:

$$\|\Delta x_n\| \leq \beta_n B (\|f(x_n)\| + \beta_n \|f(y_n)\|) \leq \beta_n B (1 + h_n) \|f(x_n)\|. \quad (30)$$

Подстановка (29), (30) в соотношение (27) позволяет выразить связь между нормами невязок на соседних шагах

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n) \|f(x_n)\| + \beta_n h_n \|f(x_n)\| + \beta_n h_n (1 + h_n)^2 =$$

$$= (1 - \beta_n (1 - h_n (2 + 2h_n + h_n^2))) \|f(x_n)\|. \quad (31)$$

Из (24) имеем, что при  $\beta_k < 1$  справедлива цепочка равенств:

$$\beta_0 \|f(x_0)\| = \beta_1 \|f(x_1)\| = \dots = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|, \quad n+1 \leq k. \quad (32)$$

Если положить  $\delta_n = h_n(2 + 2h_n + h_n^2)$  и  $q_n = 1 - \beta_n(1 - \delta_n)$ , неравенство (30) можно переписать в более компактном виде:

$$\|f(x_{n+1})\| \leq (1 - \beta_n(1 - \delta_n)) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|. \quad (33)$$

Соотношение (33) является базовым при доказательстве сходимости итерационных процессов локально сходящихся с кубической скоростью.

**Теорема 2.2.** Пусть в области  $D = S\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)\|(2+h_0)}{1-q_0}\right)$  существует  $x^*$  – решение уравнения (1), оператор  $f$  удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$h_0(2 + 2h_0 + h_0^2) < 1 \quad (34)$$

Тогда итерационный процесс (20)–(24) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к  $x^*$ .

*Доказательство.* При  $n = 0$  из (33), (34) следует, что

$$\begin{aligned} \|f(x_1)\| &\leq (1 - \beta_0(1 - \delta_0)) \|f(x_0)\| = q_0 \|f(x_0)\|; \\ q_0 &= 1 - \beta_0(1 - \delta_0) < 1, \quad h_0 < 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (23) и (35) следует, что  $\|f(x_1)\| < \|f(x_0)\|$ ,  $\beta_1 > \beta_0$ .

При  $n = 1$  имеем, что  $h_1 = \beta_1 K B^2 \|f(x_1)\| = h_0$ ,  
 $\alpha_1 = 1 - \beta_1(1 - h_1) = 1 - \beta_1(1 - h_0) < 1 - \beta_0(1 - h_0) = \alpha_0$ ,  $\delta_1 = h_1(2 + 2h_1 + h_0) = \delta_0 < 1$ ,  
 $\|f(x_2)\| \leq (1 - \beta_1(1 - \delta_1)) \|f(x_1)\| = q_1 \|f(x_1)\|$ ,  $q_1 < q_0$ .

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность  $\{q_n\}$  монотонно убывает к нулю, последовательность  $\{\beta_n\}$  монотонно возрастает к 1 и справедлива оценка

$$\|f(x_{n+1})\| \leq \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_0)\|, \quad (36)$$

из которой следует, что последовательность элементов  $\{x_n\}$  по функционалу стремится к нулю,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  и при некотором  $k > n_0$  итеративный процесс (20)–(24) входит в область притяжения процесса с  $\beta_k = 1$ . Нетрудно проверить, что все  $x_n, y_n \in D$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\Delta x_i\| < B \|f(x_0)\| \frac{(1+h_0)}{1-q_0}. \\ \|y_n - x_0\| &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| < B \|f(x_n)\| + \frac{B \|f(x_0)\|(1+h_0)}{1-q_0} < \frac{B \|f(x_0)\|}{1-q_0} (2+h_0). \\ \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \|\Delta x_n\| < B \|f(x_0)\| (1+h_0) \prod_{i=0}^{n-1} q_i. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (37) следует фундаментальность последовательности элементов  $\{x_n\}$ , а в силу полноты пространства  $R^n$  существование предельного элемента  $x^*$ , который, как просто проверить, является решением уравнения (1). *Теорема доказана.*

Достаточно эффективным является следующий итерационный процесс:

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(y_n - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta y_n = -f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (38)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор  $x_n$  для определения вектора  $y_n$

$$y_n = x_n + \Delta y_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (39)$$

Шаг 3. Решается линейная система

$$f(x_n, z_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_n, z_n)\Delta x_n = -\beta_n(f(x_n) + \beta_n f(y_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Шаг 4. Вносится поправка в вектор  $x_n$  для определения вектора очередного приближения

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (41)$$

Шаг 5. Проверяется окончание итерационного процесса: если  $\|f(x_{n+1})\|$  и (или)  $\|\Delta x_n\| < \varepsilon$  – конец расчетов, иначе – переход на шаг 6.

Шаг 6. Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{\alpha\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (42)$$

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1})W_n + \beta_{n+1}^2\beta_n\|f(x_{n+1})\|, \quad W_0 = \gamma\|f(x_0)\|, \quad \gamma \ll 1 \quad (43)$$

и переход на шаг 1.

**Теорема 2.3.** Пусть в области  $D = S(x, W_n \leq W_0)$  существует  $x^*$  – решение уравнения (2.1), оператор  $f$  удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$h_0(2 + 2h_0 + h_0^2) < 1. \quad (44)$$

Тогда итерационный процесс (38)–(43) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к  $x^*$ .

Доказательство сходимости процесса (38)–(43) в идейном плане вполне аналогично тому, как это сделано в работе [1] при доказательстве теоремы 2.3.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский – Брест : БрГУ, 2005 – 186 с.

**V.M. Madorski. Nonlocal Nonregularised Iterative Processes Locally Converge with Cubic Speed**

Nonlocal superlinear nonregularized iterative processes for the solution of  $f(x) = 0$  equation in space  $R^n$  are considered in the article. A number of suggested methods meet locally with cubic speed. The processes converge to exact solution of the operator equation from the “bad” initial approximation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.09.2012