УДК 536.9+539.1 DOI 10.63874/2218-0303-2025-2-46-58

Алексей Игоревич Серый
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Alexey Sery
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: [1]alexey_sery@mail.ru

К ВОПРОСУ О ПОРОГЕ НЕЙТРОНИЗАЦИИ В ЗВЕЗДАХ ГЛАВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И СУБКАРЛИКАХ

Найдено значение порога образования свободных нейтронов в электронно-протонной плазме с примесью альфа-частиц с плотностями и температурами, характерными для центральной части звезд, подобных Солнцу, и субкарликов, близких к таким звездам на диаграмме Герцшпрунга – Рассела. Использовались модели идеальных крайне невырожденных газов, а также крайне вырожденных нуклонных газов с более точным выражением для химического потенциала электронного газа, а также с учетом ядерного и кулоновского взаимодействия между частицами. Показано, что бета-равновесное значение концентрации нейтронов не может быть равным нулю, но оно крайне мало по сравнению со значением, соответствующим термодинамически равновесному существованию даже одного свободного нейтрона (до момента радиационного захвата протоном) во всей зоне ядерных реакций звезд указанных типов. Обе модели дают одинаковый по порядку величины результат, причем с ростом одной из трех величин (плотности, массовой доли водорода, температуры) при фиксированном значении двух остальных бета-равновесное значение концентрации нейтронов растет; рост наиболее чувствителен к изменению температуры.

Ключевые слова: *электронно-нуклонное вещество, порог нейтронизации, звезды главной последовательности, субкарлики.*

On the Issue of the Neutronization Threshold in Main-Sequence Stars and Subdwarfs

The threshold value for the formation of free neutrons in electron-proton plasma with an admixture of alpha particles with densities and temperatures typical for the central part of stars like the Sun and subdwarfs close to such stars on the Hertzsprung – Russell diagram has been found. Models of ideal extremely non-degenerate gases, as well as extremely degenerate nucleonic gases with a more precise expression for the chemical potential of the electron gas, as well as taking into account the nuclear and Coulomb interactions between particles, have been applied. It has been shown that the beta equilibrium value of the neutron density cannot be zero, but it is extremely small compared to the value corresponding to the thermodynamically equilibrium existence of even one free neutron (up to the moment of radiation capture by a proton) in the entire nuclear reaction zone of the stars of these types. Both models give the same result by the order of magnitude, and with an increase in one of the three values (density, mass fraction of hydrogen, temperature) at a fixed value of the remaining two, the beta equilibrium value of the neutron density increases; growth is most sensitive to temperature changes.

Key words: *electron-nucleon matter, neutronization threshold, main sequence stars, subdwarfs.*

Введение

Расчет концентрации протонов и электронов, при которой начинается нейтронизация (образование нейтронных капель [1, с. 32]) в водороде, а также концентраций электронов и нуклонов, соответствующих бета-равновесию (до радиационного захвата нейтронов протонами) представляет интерес для различных астрофизических приложений. В классической литературе соответствующая задача обычно решается для модели идеальных ферми-газов при температуре абсолютного нуля в отсутствии внешнего магнитного поля [1, с. 53; 2, с. 55].

Подобные задачи также рассматривались с учетом по крайней мере одного из факторов:

а) отличные от нуля температуры для всех фермионов (протонов, нейтронов, электронов) или только для некоторых;

б) наличие внешнего интенсивного магнитного поля;

в) учет энергии взаимодействия между частицами;

г) учет спиновой поляризации нуклонов [2, с. 56; 3, с. 88–92, 167–168; 4, с. 30–37; 5, с. 52–61; 6, с. 55–63].

При этом указанная проблема не исследовалась для звезд типа Солнца, а также не уточнялось смысловое содержание понятия «порог нейтронизации» для высоких температур. Такое уточнение, однако, требуется из-за логарифмической расходимости выражения для химического потенциала нейтронов при нулевом значении их концентрации.

Под нейтронизацией в данной работе будет пониматься процесс образования свободных нейтронов $p + e^- \to n + \nu_e$ (с последующим радиационным захватом протонами $p + n \to d + \gamma$) как альтернатива непосредственному образованию нейтронов в связанном состоянии в одной из реакций протон-протонного цикла $p + p \to d + e^+ + \nu_e$.

При решении задачи о нахождении порога нейтронизации (в указанном выше смысле) в зонах ядерных реакций звезд типа Солнца и субкарликов с существенным содержанием водорода следует:

а) учесть примесь других химических элементов помимо электронов и протонов [7, с. 590];

б) применить формулу для химического потенциала электронного газа, более точную по сравнению с приближениями крайнего вырождения и крайнего невырождения;

в) внести уточнение в смысловое содержание понятия «порог нейтронизации» при высоких температурах по сравнению с моделью, соответствующей температуре абсолютного нуля.

Условия в звездах нижней части главной последовательности

Рассмотрим центральную часть (зону ядерных реакций) звезды нижней части главной последовательности с плотностью $\rho \sim 10^2$ г/см^3 и температурой $T \sim 10^7$ К [7, с. 590]. Пренебрегая углеродно-азотным циклом и продуктами промежуточных реакций водородного цикла, будем исследовать модель центральной области звезды, где ниже порога появления свободных нейтронов находятся только электроны, протоны и альфа-частицы.

Обозначим через η массовую долю водорода. Тогда концентрации протонов n_p и электронов n_e равны соответственно

$$n_p \approx \frac{\eta\rho}{m_p + m_e}, \quad n_e \approx n_p + \frac{4(1-\eta)\rho}{m_\alpha + 4m_e}, \tag{1}$$

где m_e, m_p и m_α – массы электрона, протона и альфа-частицы соответственно (массу нейтрона обозначим через m_n).

При η = 0,35 и ρ = 160 г/см^3, что характерно для центральной части Солнца [7, с. 590], получаем $n_p = 3{,}35 \cdot 10^{25}$ см$^{-3}$, $n_e = 9{,}60 \cdot 10^{25}$ см$^{-3}$.

Степени невырождения и химические потенциалы идеальных электронного и нуклонных газов

Сравним тепловую энергию kT (k – постоянная Больцмана) при температуре $T = 1{,}6\cdot10^7$ К, характерной для зоны ядерных реакций в центре Солнца [7, с. 590], со значениями выражений для химических потенциалов нерелятивистских электронов и протонов в приближении абсолютного нуля температуры и при отсчете от энергии покоя $m_i c^2$, $i = e, p$; c – скорость света в вакууме [3, с. 25, 45].

В результате получаем ($\hbar$ – постоянная Планка):

$$\frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2 n_e^{2/3}}{2m_e} < kT, \tag{2}$$

$$\frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} << kT. \tag{3}$$

Неравенство (2) означает, что для электронов порядок сравниваемых величин одинаков. Вблизи порога нейтронизации, когда концентрация нейтронов n_n мала, должно, очевидно, выполняться соотношение, аналогичное (3), для нейтронного газа:

$$\frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n} << kT. \tag{4}$$

Также можно убедиться, что электронный и нуклонный газы при указанных значениях концентраций можно считать нерелятивистскими, поскольку выполняются условия:

$$\frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2 n_i^{2/3}}{2m_i} << m_i c^2, \quad kT << m_i c^2, \quad i = e, p, n. \tag{5}$$

При конечных температурах, когда, помимо (5), справедливы неравенства (2) – (4), в приближении идеальных газов химические потенциалы нуклонов, отсчитываемые от $m_i c^2$, можно приближенно выразить по общей формуле [3, с. 52]:

$$\tilde{\mu}_i \approx -kT\, ln\left(\frac{1}{4n_i}\left(\frac{2m_i kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right), \quad i = p, n. \tag{6}$$

Для того, чтобы при этом было $\tilde{\mu}_i < 0$, должны, очевидно, быть положительными аргументы логарифмов, поэтому должны быть справедливыми неравенства

$$\frac{1}{4n_i}\left(\frac{2m_i kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} > 1, \quad i = p, n. \tag{7}$$

Для удобства сравнения с (3) и (4) можно преобразовать (7) к виду

$$\frac{4^{2/3}\pi\hbar^2 n_i^{2/3}}{2m_i} < kT, \quad i = p, n. \tag{8}$$

Поскольку $\left(3\pi^2\right)^{2/3} > 4^{2/3}\pi$, то неравенства (2) – (4) оказываются более строгими по сравнению с (8), т. е. (8) выполняется и для электронов.

Несмотря на это, для электронного газа с учетом замечания, относящегося к (2), следует предварительно доказать, что $\tilde{\mu}_e < 0$, чтобы можно было говорить о применимости (2) и (8) к электронам. Если $\tilde{\mu}_e = 0$, то, согласно [8, с. 280–281], справедливо соотношение (в отсутствие спиновой поляризации):

$$n_e = \frac{4\pi\left(2m_e\right)^{3/2}}{\left(2\pi\hbar\right)^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{exp\left(\varepsilon/\left(kT\right)\right)+1}. \tag{9}$$

Эту формулу можно преобразовать к виду

$$n_e = \frac{4\pi\left(2m_e kT\right)^{3/2}}{\left(2\pi\hbar\right)^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{1/2}dx}{e^x+1}. \tag{10}$$

Интеграл в правой части (10) равен [8, с. 596]

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{1/2}dx}{e^x+1} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}673, \tag{11}$$

где $\Gamma\left(x\right)$ – гамма-функция Эйлера [9, с. 275, 276], $\zeta\left(x\right)$ – дзета-функция Римана [10, с. 1087]. С учетом того, что $\Gamma\left(3/2\right) = \sqrt{\pi}/2$, а онлайн-калькулятор дзета-функции [11] дает значение $\zeta\left(3/2\right) = 2{,}59823$, в (9) получается значение интеграла, приближенно равное 0,674422.

При подстановке полученного значения в (8) с учетом значения T = 1,6·10^7 К получаем значение концентрации электронов n_{0e} = 2,35·10^{26} см$^{-3}$, которое больше значения n_e = 9,60·10^{25} см$^{-3}$, найденного по формуле (1). Отсюда следует, что $\tilde{\mu}_e < 0$.

Проверим формулу (6) для электронов в первом приближении.

При n_e = 9,60·10^{25} см$^{-3}$ и T = 1,6·10^7 К она дает значение $\tilde{\mu}_{e(1)} \approx -0{,}001611$ МэВ < 0.

Теперь применим более точную формулу, аналогичную той, которая применялась, в частности, в [12, с. 34] для нерелятивистских нуклонов:

$$\tilde{\mu}_{e(2)} \approx kT\,ln\left(\sqrt{2}\left(1-\sqrt{1-h\left(n_e,m_e,T\right)}\right)\right), \tag{12}$$

$$h\left(n_e,m_e,T\right) = \frac{\left(2\pi\hbar\right)^3 n_e}{4\left(\pi m_e kT\right)^{3/2}}. \tag{13}$$

При тех же значениях n_e и T получается $\tilde{\mu}_{e(2)} \approx -0{,}001426$ МэВ, что несколько отличается от $\tilde{\mu}_{e(1)}$.

Можно проверить еще более точную формулу, для чего запишем общую формулу (согласно [8, с. 280–281])

$$n_e = \frac{4\pi\left(2m_e\right)^{3/2}}{\left(2\pi\hbar\right)^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{exp\left(\left(\varepsilon+\left|\tilde{\mu}_e\right|\right)/\left(kT\right)\right)+1}. \tag{14}$$

Преобразуем подынтегральное выражение, приводя (14) к виду

$$n_e = \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^{1/2}\,exp\left(-\left(\varepsilon+\left|\widetilde{\mu}_e\right|\right)/(kT)\right)d\varepsilon}{1+exp\left(-\left(\varepsilon+\left|\widetilde{\mu}_e\right|\right)/(kT)\right)}. \tag{15}$$

Выполняя приближенное разложение подынтегрального выражения в (15), согласно [9, с. 161], получаем:

$$n_e \approx \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}\left(\int\limits_0^{+\infty}\varepsilon^{1/2}\,exp\left(-\frac{\varepsilon+\left|\widetilde{\mu}_{e(3)}\right|}{kT}\right)d\varepsilon-\int\limits_0^{+\infty}\varepsilon^{1/2}\,exp\left(-2\frac{\varepsilon+\left|\widetilde{\mu}_{e(3)}\right|}{kT}\right)d\varepsilon+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{+\infty}\varepsilon^{1/2}\,exp\left(-3\frac{\varepsilon+\left|\widetilde{\mu}_{e(3)}\right|}{kT}\right)d\varepsilon\right). \tag{16}$$

Вводя обозначение

$$y \equiv exp\left(-\left|\widetilde{\mu}_{e(3)}\right|/(kT)\right)= exp\left(\widetilde{\mu}_{e(3)}/(kT)\right), \tag{17}$$

после выполнения интегрирования в (16) с учетом формул для гамма-функции от полуцелых аргументов [9, с. 277], получаем кубическое уравнение относительно y:

$$y^3-\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}y^2+3^{3/2}y-\frac{3^{3/2}n_e(2\pi\hbar)^3}{2(2m_e\pi kT)^{3/2}}=0. \tag{18}$$

Проверим левую часть (18) на наличие локальных экстремумов, дифференцируя по y. В результате получаем уравнение

$$3y^2-2\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}y+3^{3/2}=0, \tag{19}$$

дискриминант которого отрицателен, т. е. искомые точки отсутствуют. Это является достаточным (хотя и не необходимым) условием наличия единственного вещественного корня уравнения (18).

Выполняя замену

$$y=\xi+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}, \tag{20}$$

получаем, согласно общему алгоритму [9, с. 114], кубическое уравнение

$$\xi^3+\left(3^{3/2}-\frac{9}{8}\right)\xi+\frac{9}{2^{3/2}}-\frac{3^{3/2}}{2^{7/2}}-\frac{3^{3/2}n_e(2\pi\hbar)^3}{2(2m_e\pi kT)^{3/2}}=0. \tag{21}$$

Решение (21) находится на основе формулы Кардано [9, с. 114] и в нашем случае имеет вид:

$$\xi=\sqrt[3]{f(n_e,T)+\sqrt{f^2(n_e,T)+\left(\sqrt{3}-\frac{3}{8}\right)^3}}+\sqrt[3]{f(n_e,T)-\sqrt{f^2(n_e,T)+\left(\sqrt{3}-\frac{3}{8}\right)^3}},$$

$$f(n_e,T)=\frac{3^{3/2}}{2^{9/2}}+\frac{3^{3/2}n_e(2\pi\hbar)^3}{4(2m_e\pi kT)^{3/2}}-\frac{9}{2^{5/2}}. \tag{22}$$

В соответствии с (17), (20) и (22) получаем окончательное выражение для $\widetilde{\mu}_{e(3)}$:

$$\widetilde{\mu}_{e(3)} \approx kT\,ln\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} + \sqrt[3]{f\left(n_e,T\right)+\sqrt{f^2\left(n_e,T\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{3}{8}\right)^3}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{f\left(n_e,T\right)-\sqrt{f^2\left(n_e,T\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{3}{8}\right)^3}}\right). \qquad (23)$$

Подстановка упомянутых выше численных значений n_e и T дает $\widetilde{\mu}_{e(3)}$ $\approx -0{,}001468$ МэВ, что близко к значению $\widetilde{\mu}_{e(2)}$, найденному по формулам (12) и (13), поэтому дальнейшим уточнением, связанным с решением уравнения четвертой степени, можно пренебречь.

Учет взаимодействий между частицами

Поскольку в рамках исследуемой модели нейтрон (в случае его возникновения) должен взаимодействовать с протонами и альфа-частицами (если пренебречь взаимодействием с электронами), то для химического потенциала нейтронного газа можно записать:

$$\mu_n \approx \widetilde{\mu}_n + \varepsilon_{n\alpha} + \varepsilon_{np}\,, \qquad (24)$$

где $\varepsilon_{n\alpha}$ и ε_{np} – энергия взаимодействия нейтрона с альфа-частицами и протонами соответственно.

Протон в рамках исследуемой модели взаимодействует с протонами, электронами и альфа-частицами (если пренебречь взаимодействием с нейтронами вблизи порога нейтронизации).

Тогда для химического потенциала протонного газа можно записать:

$$\mu_p \approx \widetilde{\mu}_p + \varepsilon_{p\alpha} + \varepsilon_{pe}^{(\alpha)} + \varepsilon_{pp}^{C} + \varepsilon_{pp}^{N} + \varepsilon_{pe}^{(p)}, \qquad (25)$$

где введены обозначения для энергии взаимодействия протона:

а) $\varepsilon_{p\alpha}$ – с альфа-частицами;

б) $\varepsilon_{pe}^{(\alpha)}$ – с электронами, компенсирующими заряд альфа-частиц;

в) ε_{pp}^{C} – кулоновская с другими протонами;

г) ε_{pp}^{N} – ядерная с другими протонами;

д) $\varepsilon_{pe}^{(p)}$ – с электронами, компенсирующими заряд протонов.

Электрон в рамках исследуемой модели взаимодействует с протонами, альфа-частицами и другими электронами (если пренебречь взаимодействием с нейтронами вблизи порога нейтронизации).

Тогда для химического потенциала электронного газа можно записать:

$$\mu_e \approx \widetilde{\mu}_{e(3)} + \varepsilon_{ee} + \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{e\alpha}\,, \qquad (26)$$

где введены обозначения для энергии взаимодействия электрона:

а) $\varepsilon_{e\alpha}$ – с альфа-частицами;

б) ε_{ep} – с протонами;

в) ε_{ee} – с другими электронами.

Уравнение порога нейтронизации

Уравнение порога нейтронизации в пренебрежении химическим потенциалом нейтрино имеет вид [3, с. 88]:

$$m_p c^2 + \mu_p + m_e c^2 + \mu_e = m_n c^2 + \mu_n . \tag{27}$$

Подставляя (24)–(26) в (27), получаем:

$$m_p c^2 + \tilde{\mu}_p + \varepsilon_{p\alpha} + \varepsilon_{pe}^{(\alpha)} + \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{pe}^{(p)} + m_e c^2 + \tilde{\mu}_e + \varepsilon_{ee} + \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{e\alpha} =$$

$$= m_n c^2 + \tilde{\mu}_n + \varepsilon_{n\alpha} + \varepsilon_{np} . \tag{28}$$

Учитывая изотопическую симметрию альфа-частицы, зарядовую независимость ядерных сил и приближенную компенсацию кулоновского отталкивания протона альфа-частицами кулоновским притяжением протона электронами, можно записать:

$$\varepsilon_{p\alpha} + \varepsilon_{pe}^{(\alpha)} \approx \varepsilon_{n\alpha} . \tag{29}$$

Сумму энергии кулоновского отталкивания протона другими протонами и энергии кулоновского притяжения протона остальными электронами приближенно приравняем к сумме обменной и корреляционной кулоновским поправкам к химическому потенциалу протонов, как это было сделано в [12, с. 34] в случае невырожденных газов:

$$\varepsilon_{pp}^{C} + \varepsilon_{pe}^{(p)} \approx -\frac{\alpha_0 \sqrt{m_p c^2 kT}\left(1-\sqrt{1-h\left(n_p, m_p, T\right)}\right)}{\sqrt{\pi\left(1-h\left(n_p, m_p, T\right)\right)}} - \frac{3(kT)^{1/4}\alpha_0^{3/2}\left(m_p c^2\right)^{3/4}}{\pi^{1/4}} \times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-h\left(n_p, m_p, T\right)}}\right)\sqrt{\sqrt{1-h\left(n_p, m_p, T\right)}+h\left(n_p, m_p, T\right)-1}\,, \tag{30}$$

где α_0 – постоянная тонкой структуры, или постоянная электромагнитного взаимодействия; $h\left(n_p, m_p, T\right)$ записывается аналогично (13).

Сумму энергий кулоновского взаимодействия электрона с протонами, альфа-частицами и остальными электронами приближенно приравняем к сумме обменной и корреляционной кулоновским поправкам к химическому потенциалу электронов по аналогии с (30):

$$\varepsilon_{ee} + \varepsilon_{ep} + \varepsilon_{e\alpha} \approx -\frac{\alpha_0 \sqrt{m_e c^2 kT}\left(1-\sqrt{1-h\left(n_e, m_e, T\right)}\right)}{\sqrt{\pi\left(1-h\left(n_e, m_e, T\right)\right)}} - \frac{3(kT)^{1/4}\alpha_0^{3/2}\left(m_e c^2\right)^{3/4}}{\pi^{1/4}} \times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-h\left(n_e, m_e, T\right)}}\right)\sqrt{\sqrt{1-h\left(n_e, m_e, T\right)}+h\left(n_e, m_e, T\right)-1}\,. \tag{31}$$

Для энергий ядерного взаимодействия отдельного протона и отдельного нейтрона с невырожденным протонным газом воспользуемся формулами, полученными в [13, с. 52, 57], с некоторыми уточнениями:

$$\varepsilon_{pp}^{N} = -\frac{2\pi\hbar^2 n_p \Omega\left(a_p, r_{0p}, 3m_p, T\right)}{m_p\left(\Omega^2\left(a_p, r_{0p}, 3m_p, T\right) + \frac{6m_p kT}{\hbar^2}\right)}, \tag{32}$$

$$\varepsilon_{np} = -\frac{\left(m_p + m_n\right)\pi\hbar^2 n_p}{2m_p m_n}\left(3\frac{\Omega\left(a_t, r_{0t}, \frac{3}{2}\left(m_p + m_n\right), T\right)}{\Omega^2\left(a_t, r_{0t}, \frac{3}{2}\left(m_p + m_n\right), T\right) + \frac{3\left(m_p + m_n\right)kT}{\hbar^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Omega\left(a_s, r_{0s}, \frac{3}{2}\left(m_p + m_n\right), T\right)}{\Omega^2\left(a_s, r_{0s}, \frac{3}{2}\left(m_p + m_n\right), T\right) + \frac{3\left(m_p + m_n\right)kT}{\hbar^2}}\right), \tag{33}$$

$$\Omega\left(x_1, x_2, x_3, T\right) = -\frac{1}{x_1} + \frac{x_2 x_3 kT}{\hbar^2}. \tag{34}$$

При этом длины рассеяния и эффективные радиусы равны (в 10^{-13} см) $a_t = 5{,}42$, $a_s = -23{,}71$, $a_p = -17{,}2$, $r_{0t} = 1{,}76$, $r_{0s} = 2{,}70$, $r_{0p} = 2{,}79$ [14, с. 20, 30, 31].

Переписывая (28) с учетом (6), (23), (29) – (34), получаем:

$$\Xi\left(n_p, n_e, T\right) = kT\, ln\left(4n_n\left(\frac{\pi\hbar^2}{2m_n kT}\right)^{3/2}\right), \tag{35}$$

$$\Xi\left(n_p, n_e, T\right) = m_p c^2 - kT\, ln\left(\frac{1}{4n_p}\left(\frac{2m_p kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right) - \frac{2\pi\hbar^2 n_p \Omega\left(a_p, r_{0p}, 3m_p, T\right)}{m_p\left(\Omega^2\left(a_p, r_{0p}, 3m_p, T\right) + \frac{6m_p kT}{\hbar^2}\right)} -$$

$$- \frac{\alpha_0\sqrt{m_p c^2 kT}\left(1 - \sqrt{1 - h\left(n_p, m_p, T\right)}\right)}{\sqrt{\pi\left(1 - h\left(n_p, m_p, T\right)\right)}} - \frac{3(kT)^{1/4}\alpha_0^{3/2}\left(m_p c^2\right)^{3/4}}{\pi^{1/4}} \times$$

$$\times\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - h\left(n_p, m_p, T\right)}}\right)\sqrt{\sqrt{1 - h\left(n_p, m_p, T\right)} + h\left(n_p, m_p, T\right) - 1} + m_e c^2 +$$

$$+ kT\, ln\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} + \sqrt[3]{f\left(n_e, T\right) + \sqrt{f^2\left(n_e, T\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{8}\right)^3}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{f\left(n_e, T\right) - \sqrt{f^2\left(n_e, T\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{8}\right)^3}}\right) - \frac{\alpha_0\sqrt{m_e c^2 kT}\left(1 - \sqrt{1 - h\left(n_e, m_e, T\right)}\right)}{\sqrt{\pi\left(1 - h\left(n_e, m_e, T\right)\right)}} -$$

$$-\frac{3(kT)^{1/4}\alpha_0^{3/2}\left(m_e c^2\right)^{3/4}}{\pi^{1/4}}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-h(n_e,m_e,T)}}\right)\sqrt{\sqrt{1-h(n_e,m_e,T)}+h(n_e,m_e,T)-1}-$$

$$-m_n c^2+\frac{(m_p+m_n)\pi\hbar^2 n_p}{2m_p m_n}\left(3\frac{\Omega\left(a_t,r_{0t},\frac{3}{2}(m_p+m_n),T\right)}{\Omega^2\left(a_t,r_{0t},\frac{3}{2}(m_p+m_n),T\right)+\frac{3(m_p+m_n)kT}{\hbar^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Omega\left(a_s,r_{0s},\frac{3}{2}(m_p+m_n),T\right)}{\Omega^2\left(a_s,r_{0s},\frac{3}{2}(m_p+m_n),T\right)+\frac{3(m_p+m_n)kT}{\hbar^2}}\right). \qquad (36)$$

Таким образом, в (35) и (36) характеристики альфа-частиц отсутствуют, но, поскольку $n_p \neq n_e$, их массовая доля должна косвенно влиять на численные результаты расчетов. Из (35) можно непосредственно выразить n_n:

$$n_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2m_n kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} exp\left(\frac{\Xi(n_p,n_e,T)}{kT}\right). \qquad (37)$$

Если пренебречь ядерным и кулоновским взаимодействиями, а для химического потенциала электронов использовать формулу, аналогичную (6), то вместо (35) получаем упрощенное уравнение:

$$m_n c^2-kT\,ln\left(\frac{1}{4n_n}\left(\frac{2m_n kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right)=\sum_{i=e,p}\left(m_i c^2-kT\,ln\left(\frac{1}{4n_i}\left(\frac{2m_i kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right)\right). \qquad (38)$$

Тогда вместо (37) получаем выражение для n_n:

$$n_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2m_n kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} exp\left(\frac{1}{kT}\left(\sum_{i=e,p}\left(m_i c^2-kT\,ln\left(\frac{1}{4n_i}\left(\frac{2m_i kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right)\right)-m_n c^2\right)\right). \qquad (39)$$

О смысловом значении понятия «порог нейтронизации»

В модели, в которой температура равна абсолютному нулю, порог нейтронизации соответствует значению $n_n=0$.

В отличие от этой модели любая конечная температура становится для нейтронов на пороге нейтронизации высокой, поскольку, согласно (6), $\tilde{\mu}_n \to -\infty$ при $n_n \to 0$. Из (36) следует, что при конечных значениях n_e, n_p и T получается конечное значение n_n, т. е. значение $n_n=0$ невозможно.

Тогда порог нейтронизации можно понимать как такое значение n_{n0}, при котором во всем объеме зоны ядерных реакций возникает хотя бы один свободный нейтрон.

Поскольку, например, для Солнца радиус указанной зоны не превышает 0, R_S (R_S – радиус Солнца) [15, с. 243], который равен R_S = 6,96·10^8 м [7, с. 589], получаем пороговое значение

$$n_{n0} = \left(\frac{4}{3}\pi(0{,}3R_S)^3\right)^{-1} \approx 2{,}62\cdot10^{-26}\ \text{см}^{-3}. \qquad (40)$$

Остается сравнить значения, рассчитанные по формулам (37) и (39), с n_{n0}.

Численные результаты и их обсуждение

Численные расчеты по формулам (37) и (39) приводят к результатам, представленным в таблице.

Таблица – Значения концентраций нейтронов, соответствующих бета-равновесию, рассчитанные в рамках двух моделей при различных заданных значениях плотности ρ, массовой доли водорода η, температуры T

ρ, г/см^3	η	T, 10^7 К	n_{n1}, см$^{-3}$ (решение (37))	n_{n2}, см$^{-3}$ (решение (39))
150	0,35	1,6	3,038·10^{-238}	3,166·10^{-238}
160	0,3	1,6	2,964·10^{-238}	3,102·10^{-238}
160	0,35	1,4	2,646·10^{-273}	2,673·10^{-273}
160	0,35	1,6	3,457·10^{-238}	3,613·10^{-238}
160	0,35	1,8	6,953·10^{-211}	7,234·10^{-211}
160	0,4	1,6	3,950·10^{-238}	4,123·10^{-238}
170	0,35	1,6	3,903·10^{-238}	4,091·10^{-238}

Таким образом, значения n_{n1} и n_{n2} растут с ростом любого из трех параметров (плотности ρ, массовой доли водорода η, температуры T) при фиксированном значении двух остальных. Результаты наиболее чувствительны к изменению температуры. Для всех исследованных случаев полученные результаты значительно меньше n_{n0}. Это означает, что один нейтрон образуется в пространственной области с линейными размерами более 10^{70} см, если она однородно заполнена веществом с параметрами, соответствующими исследуемой модели.

Такие расстояния значительно превышают оцениваемые в настоящее время масштабы наблюдаемой части Вселенной [16, с. 81], поэтому в зоне ядерных реакций в центральной части звезд типа Солнца крайне мала вероятность термодинамически равновесного существования (до момента радиационного захвата протоном) даже одного нейтрона.

Следует отметить, что в приближении абсолютного нуля температуры (которое для Солнца было бы очень грубым) и идеальных газов результат качественно остался бы таким же: отсутствие свободных нейтронов. Но такой ответ был бы основан на выполнении неравенства:

$$m_n c^2 > \sum_{i=e,p}\left(m_i c^2 + \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2 n_i^{2/3}}{2m_i}\right). \qquad (41)$$

Решения (37) и (39), как показывают расчеты, сравнимы с решением (40) при $T > 10^8$ К (в довольно широких пределах значений ρ и η), но при таких температурах нельзя пренебрегать продуктами других ядерных реакций (помимо водород-

ного цикла), в том числе в субкарликах; кроме того, такие условия более характерны для красных гигантов [15, с. 401].

Отсюда следует, что альтернативный канал образования дейтронов (т. е. образования свободных нейтронов с последующим их радиационным захватом протонами) не играет заметной роли в звездах типа Солнца и соседствующих с ними субкарликов на диаграмме Герцшпрунга – Рассела по сравнению с основным каналом образования дейтронов в протон-протонном цикле.

Полученный результат:

а) несущественно зависит от учета взаимодействий между фермионами;

б) существенно отличается от результатов, полученных для более высоких плотностей и более низких температур (например, в водородных белых карликах), где исследуемый канал дейтронизации играет главную роль по сравнению с реакцией $p + p \to d + e^+ + \nu_e$, которая относится уже не к термоядерной, а к пикноядерной [3, с. 74–75].

Заключение

В модели невырожденных газов найдено значение порога образования свободных нейтронов в электронно-протонной плазме с примесью альфа-частиц с плотностями и температурами, характерными для центральной части Солнца.

Использовались модели:

а) идеальных крайне невырожденных газов;

б) крайне невырожденных нуклонных газов с более точным выражением для химического потенциала электронного газа, а также с учетом ядерного и кулоновского взаимодействия между частицами.

Показано, что при указанных значениях температуры, плотности вещества и массовой доли водорода равновесное значение концентрации нейтронов хоть и не может быть равным нулю (во избежание логарифмической расходимости в выражении для химического потенциала нейтронов), но оно настолько мало, что в зоне ядерных реакций в центральной части Солнца вероятность термодинамически равновесного существования (до момента радиационного захвата протоном) даже одного нейтрона крайне мала.

Также показано, что этот результат по порядку величины один и тот же для указанных выше двух моделей, причем бета-равновесное значение концентрации нейтронов растет с ростом любого из трех параметров (плотности, массовой доли водорода, температуры) при фиксированном значении двух остальных, а результаты наиболее чувствительны к изменению температуры.

Сделан вывод о том, что данный канал образования дейтронов (через радиационный захват образовавшихся свободных нейтронов протонами) не играет заметной роли в звездах типа Солнца и соседствующих с ними субкарликов на диаграмме Герцшпрунга – Рассела по сравнению с основным каналом образования дейтронов в протон-протонном цикле.

Полученные уравнения могут представлять интерес для теоретического исследования звезд, содержащих водород, при таких температурах и плотностях, когда использованные в работе модельные приближения еще применимы, но вероятность данного канала дейтронизации вещества более существенна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : пер. с англ. : в 2 ч. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски. – М. : Мир, 1985. – Ч. 1. – 256 с.

2. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.

3. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : моногр. / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

4. Серый, А. И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2012. – №1. – С. 30–37.

5. Секержицкий, В. С. О бета-равновесии электронно-нуклонного вещества при низких температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2021. – № 2. – С. 52–61.

6. Серый, А. И. Об условии бета-равновесия электронно-нуклонного вещества при низких температурах вблизи порога нейтронизации / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2022. – № 1. – С. 55–63.

7. Физическая энциклопедия / гл. ред. А. М. Прохоров ; редкол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Большая рос. энцикл., 1994. – Т. 4 : Пойнтинга – Робертсона – Стримеры. – 704 с.

8. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.

9. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Мн. : Выш. шк., 1995. – 380 с.

10. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.

11. Калькулятор дзета-функции Римана и тождества Эйлера. – URL: https://wpcalccom/dzeta-funkciya-rimana (дата обращения: 06.10.2025).

12. Серый, А. И. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.

13. Серый, А. И. О поправках к критерию Стонера для ядерной материи / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 48–60.

14. Ситенко, А. Г. Лекции по теории ядра / А. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский // М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.

15. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии : учеб. пособие / Э. В. Кононович, В. И. Мороз ; под ред. В. В. Иванова. – Изд. 2-е, испр. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 544 с.

16. Сурдин, В. Г. Большая энциклопедия астрономии / В. Г. Сурдин. – М. : Эксмо, 2012. – 480 с.

REFERENCES

1. Shapiro, S. L. Chernye dyry, belye karliki i neitronnye zvezdy : per. s angl. : v 2 ch. / S. L. Shapiro, S. A. T'yukolski. – M. : Mir, 1985. – Ch. 1. – 256 s.

2. Saakyan, G. S. Ravnovesnye konfiguratsii vyrozhdennykh gazovykh mass / G. S. Saakyan. – M. : Nauka, 1972. – 344 s.

3. Sekerzhitskii, V. S. Ravnovesnye sistemy fermionov i bozonov v magnitnykh polyakh : monogr. / V. S. Sekerzhitskii ; Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Brest : Izd-vo BRGU, 2008. – 198 s.

4. Seryi, A. I. O ferromagnetizme vyrozhdennoi neitronno-protonnoi sistemy / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2012. – №1. – S. 30–37.

5. Sekerzhitskii, V. S. O beta-ravnovesii elektronno-nuklonnogo veshchestva pri nizkikh temperaturakh / V. S. Sekerzhitskii, A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2021. – № 2. – S. 52–61.

6. Seryi, A. I. Ob uslovii beta-ravnovesiya elektronno-nuklonnogo veshchestva pri nizkikh temperaturakh vblizi poroga neitronizatsii / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2022. – № 1. – S. 55–63.

7. Fizicheskaya entsiklopediya / gl. red. A. M. Prokhorov ; redkol.: D. M. Alekseev [i dr.]. – M. : Bol'shaya ros. entsikl., 1994. – T. 4 : Pointinga – Robertsona – Strimery. – 704 s.

8. Rumer, Yu. B. Termodinamika, statisticheskaya fizika i kinetika : ucheb. posobie / Yu. B. Rumer, M. Sh. Ryvkin. – 2-e izd., ispr. i dop. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.

9. Vodnev, V. T. Osnovnye matematicheskie formuly : spravochnik / V. T. Vodnev, A. F. Naumovich, N. F. Naumovich ; pod red. Yu. S. Bogdanova. – 3-e izd., pererab. i dop. – Mn. : Vysh. shk., 1995. – 380 s.

10. Gradshtein, I. S. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii / I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik. – M. : GIFML, 1963. – 1100 s.

11. Kal'kulyator dzeta-funktsii Rimana i tozhdestva Eilera. – URL: https://wpcalccom/dzeta-funkciya-rimana (data obrashcheniya: 06.10.2025).

12. Seryi, A. I. O nekotorykh polyarizatsionnykh effektakh v astrofizicheskoi plazme / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2014. – № 1. – S. 30–43.

13. Seryi, A. I. O popravkakh k kriteriyu Stonera dlya yadernoi materii / A. I. Seryi // Vesnik Brestskaga universiteta. Seryya 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 2. – S. 48–60.

14. Sitenko, A. G. Lektsii po teorii yadra / A. G. Sitenko, V. K. Tartakovskii // M. : Atomizdat, 1972. – 351 s.

15. Kononovich, E. V. Obshchii kurs astronomii : ucheb. posobie / E. V. Kononovich, V. I. Moroz ; pod red. V. V. Ivanova. – Izd. 2-e, ispr. – M. : Editorial URSS, 2004. – 544 s.

16. Surdin, V. G. Bol'shaya entsiklopediya astronomii / V. G. Surdin. – M. : Eksmo, 2012. – 480 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.10.2025