УДК 517.9 DOI 10.63874/2218-0303-2025-2-99-107

Марина Геннадьевна Кот
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Marina Kot
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: mtorkaylo@mail.ru

РЕЗОЛЬВЕНТА АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения и системы, записанные в виде $L_0u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, встречаются в различных прикладных областях и являются объектом интенсивного изучения. Произведение δu, входящее в это уравнение, не определено в рамках классической теории обобщенных функций, поэтому одной из главных задач является придание смыслового значения этому выражению в левой части уравнения, т. е. фактически создание оператора, соответствующего указанной формальной записи. Для этого используют специальные аппроксимации оператора умножения на δ-функцию. Методика исследования уравнений с δ-образными коэффициентами включает несколько основных этапов: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга; нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. В работе рассматриваются первые два этапа для систем, состоящих из трех уравнений с дельта-образными коэффициентами.

Ключевые слова: *обобщенная функция, асимптотика, резонанс, оператор.*

Resolvency of an Approximating System of Equations with Delta-Shaped Coefficients

Equations and systems of the form $L_0u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, appear in various applied fields and are subjects of intensive study. The product δu, involved in these equations, is not defined within the framework of classical theory of generalized functions, making one of the main tasks the assignment of a meaningful interpretation to this expression in the left-hand side of the equation – athat is, essentially, the construction of an operator corresponding to the given formal expression. To achieve this, specialized approximations of the operator of multiplication by the δ-function are used. The methodology for investigating equations with δ-shaped coefficients includes several main stages: construction of approximations of the expression under consideration by operators of finite rank; finding the resolvent of the approximating family; finding the limit of the resolvent and identifying cases of resonance; description of the spectrum of the constructed limit operators; investigation of the behavior of the values of the approximating operators. In this work, the first two stages of the aforementioned approach are considered for systems consisting of three equations with delta-shaped coefficients.

Key words: *generalized function, asymptotic behavior, resonance, operator.*

Введение

Уравнения, которые записываются в виде

$$\mathrm{L}_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \tag{1}$$

где δ есть δ-функция Дирака, возникают в различных приложениях [1] и изучаются очень активно.

Произведение δu, входящее в (1), не определено в рамках классической теории обобщенных функций, поэтому одной из ключевых задач является придание смыслового значения этому выражению в левой части (1), т. е. фактически построение оператора, который бы соответствовал этому формальному выражению.

Один из основных подходов к определению понятия решения уравнения и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε и затем нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{L}_\varepsilon-\lambda\right)^{-1}:=R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ оказывается резольвентой некоторого оператора, который соответствует рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R_0(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda)=\left(-\Delta-\lambda I\right)^{-1}$, но возможны случаи *резонанса*, когда $R_0(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f=E_\lambda * f,$$

где * – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u-\lambda u,$ заданное формулой

$$E_\lambda(x)=\frac{1}{4\pi\|x\|}e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2=-\lambda, \operatorname{Re}\mu>0$. Отметим, что $E_\lambda\in L_2(R^3)$.

Спектр оператора $-\Delta$ есть положительная полупрямая, причем спектр не содержит собственных значений, а у предельных операторов, отличных от $-\Delta$, имеется одно собственное значение. У аппроксимирующего оператора L_ε спектр может содержать (в зависимости от выбранного способа аппроксимации) конечный или даже бесконечный набор собственных значений. Поэтому общая задача заключается в описании поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и выяснении того, как в пределе из них получается одно собственное значение.

Анализ систем уравнений обычно оказывается более сложным по сравнению с анализом одного уравнения и содержит большее число возможных вариантов.

Цель работы:

1) построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга;

2) нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства системы из трех уравнений (1), где $u=\left(u_1, u_2, u_3\right)$, а коэффициент является матрицей вида

$$A(\varepsilon)=\begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon)\\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon)\\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon)\end{bmatrix}.$$

Основная часть

Наиболее простыми являются аппроксимации с помощью операторов конечного ранга. Рассмотрим подход, развитый в [2; 3], для исследования уравнений с δ-образными коэффициентами. Основные этапы этого подхода:

1) построение аппроксимаций рассматриваемого выражения операторами конечного ранга;

2) нахождение резольвенты аппроксимирующего семейства;

3) нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса; описание спектра построенных предельных операторов;

4) анализ поведения собственных значений аппроксимирующих операторов.

В данной работе рассматриваются первые два этапа вышеизложенного подхода для систем, состоящих из трех уравнений с δ-образными коэффициентами.

Построение аппроксимации.

Мы рассматриваем формальную систему

$$-\Delta u_1 + a_{11}(\varepsilon)\delta u_1 + a_{12}(\varepsilon)\delta u_2 + a_{13}(\varepsilon)\delta u_3 = f_1,$$

$$-\Delta u_2 + a_{21}(\varepsilon)\delta u_1 + a_{22}(\varepsilon)\delta u_2 + a_{23}(\varepsilon)\delta u_3 = f_2,$$

$$-\Delta u_3 + a_{31}(\varepsilon)\delta u_1 + a_{32}(\varepsilon)\delta u_2 + a_{33}(\varepsilon)\delta u_3 = f_3.$$

Пусть φ – бесконечно дифференцируемых функция с компактным носителем, т. е. $\varphi \in D(R^3)$ [4] такая, что $\iiint\limits_{R^3} \varphi(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 = 1$. Для краткости записи обозначим $\iiint\limits_{R^3} \varphi(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 = \int \varphi(x)dx.$ Тогда семейство гладких функций $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^3}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ задает аппроксимацию δ-функции как элемента пространства обобщенных функций, а семейство функционалов $\Phi_\varepsilon(u) = \int u(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$ – аппроксимацию δ-функции как функционала. Поэтому для гладких функций u имеем $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon \to u(0)\delta = \delta u$ [3], т. е. на гладких функциях семейство операторов $\Phi_\varepsilon(u)\varphi_\varepsilon$ сходится к произведению δu в пространстве $D'(R^3)$.

Таким образом, оператор

$$\mathrm{L}_\varepsilon u = -\Delta u + a(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u(y)\varphi_\varepsilon(y)dy \tag{2}$$

задает аппроксимацию формального выражения $-\Delta u + a(\varepsilon)\delta u$, и в покоординатной записи это семейство имеет вид:

$$\mathrm{L}_\varepsilon(u)_1 = -\Delta u_1 + a_{11}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy +$$
$$+ a_{12}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + a_{13}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \tag{3}$$

$$\mathrm{L}_\varepsilon(u)_2 = -\Delta u_2 + a_{21}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy +$$
$$+ a_{22}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + a_{23}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy, \tag{4}$$

$$\mathrm{L}_\varepsilon(u)_3 = -\Delta u_1 + a_{31}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy +$$
$$+ a_{32}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy + a_{33}(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)\int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy. \tag{5}$$

Задача заключается в исследовании поведения решений уравнения $(\mathrm{L}_\varepsilon - \lambda)u = f$ при $\varepsilon \to 0$.

Резольвента аппроксимирующих операторов.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ найдем для данных аппроксимаций такие решения непосредственно, т. е. построим резольвенту $\left(\mathrm{L}_{\varepsilon}-\lambda\right)^{-1} f=u$ и найдем, для каких λ она определена.

Теорема. *Если матрица коэффициентов* $A(\varepsilon)$ *обратима, то резольвента* $\left(\mathrm{L}_{\varepsilon}-\lambda\right)^{-1}$ *аппроксимирующего семейства* $\mathrm{L}_{\varepsilon}(u)$ *записывается в виде*

$$\left(\mathrm{L}_{\varepsilon}-\lambda\right)^{-1}=R_0(\lambda) f-S(\varepsilon, \lambda) \cdot \tilde{f} \cdot\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x), \tag{6}$$

где

$$R_0(\lambda) f=\begin{bmatrix} R_0(\lambda) f_1 \\ R_0(\lambda) f_2 \\ R_0(\lambda) f_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}=\begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix},$$

$$S(\varepsilon, \lambda)=\left(\left[A(\varepsilon)\right]^{-1}+B(\varepsilon, \lambda)\right)^{-1}, \quad B(\varepsilon, \lambda)=\begin{bmatrix} b(\varepsilon, \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_1=\int\left(R_0(\lambda) f_1\right)(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y, \quad \tilde{f}_2=\int\left(R_0(\lambda) f_2\right)(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y,$$

$$\tilde{f}_3=\int\left(R_0(\lambda) f_3\right)(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y, \quad b(\varepsilon, \lambda)=\int\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y.$$

Резольвента определена, если $\lambda \in R^{+}$ *и* $\det\left|\left[A(\varepsilon)\right]^{-1}+B(\varepsilon, \lambda)\right| \neq 0.$

Доказательство.

Построение резольвенты эквивалентно нахождению решения системы

$$\begin{gathered}
-\Delta u_1-\lambda u_1+a_{11}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_1(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y+a_{12}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_2(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y+ \\
+a_{13}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_3(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y=f_1, \\
-\Delta u_2-\lambda u_2+a_{21}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_1(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y+a_{22}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_2(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y+ \\
+a_{23}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_3(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y=f_2, \\
-\Delta u_3-\lambda u_3+a_{31}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_1(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y+a_{32}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_2(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y+ \\
+a_{33}(\varepsilon) \varphi_{\varepsilon}(x) \int u_3(y) \varphi_{\varepsilon}(y) d y=f_3.
\end{gathered} \tag{7}$$

Из системы (7) получаем, если решение существует, то оно имеет вид

$$\begin{gathered}
u_1(x)=R_{\lambda} f_1-C_{11}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x)- \\
-C_{12}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x)-C_{13}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x), \\
u_2(x)=R_{\lambda} f_2-C_{21}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x)- \\
-C_{22}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x)-C_{23}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x), \\
u_3(x)=R_{\lambda} f_3-C_{31}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x)- \\
-C_{32}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x)-C_{33}(\varepsilon, \lambda)\left(R_0(\lambda) \varphi_{\varepsilon}\right)(x),
\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$C_{11}(\varepsilon) = a_{11}(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{12}(\varepsilon) = a_{12}(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{13}(\varepsilon) = a_{13}(\varepsilon)\int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{21}(\varepsilon) = a_{21}(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{22}(\varepsilon) = a_{22}(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{23}(\varepsilon) = a_{23}(\varepsilon)\int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{31}(\varepsilon) = a_{31}(\varepsilon)\int u_1(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{32}(\varepsilon) = a_{32}(\varepsilon)\int u_2(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{33}(\varepsilon) = a_{33}(\varepsilon)\int u_3(y)\varphi_\varepsilon(y)dy. \qquad (9)$$

Подставив (8) в (9), получаем систему уравнений

$$C_{11}(\varepsilon,\lambda) = a_{11}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_1)(y) - C_{11}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{12}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{13}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{12}(\varepsilon,\lambda) = a_{12}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_2)(y) - C_{21}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{22}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{23}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{13}(\varepsilon,\lambda) = a_{13}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_3)(y) - C_{31}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{32}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{33}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{21}(\varepsilon,\lambda) = a_{21}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_1)(y) - C_{11}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{12}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{13}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{22}(\varepsilon,\lambda) = a_{22}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_2)(y) - C_{21}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{22}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{23}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{23}(\varepsilon,\lambda) = a_{23}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_3)(y) - C_{31}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{32}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{33}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{31}(\varepsilon,\lambda) = a_{31}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_1)(y) - C_{11}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{12}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{13}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{32}(\varepsilon,\lambda) = a_{32}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_2)(y) - C_{21}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{22}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{23}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$
$$C_{33}(\varepsilon,\lambda) = a_{33}(\varepsilon)\int\Big((R_0(\lambda)f_3)(y) - C_{31}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) -$$
$$-C_{32}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y) - C_{33}(\varepsilon,\lambda)\big(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\big)(y)\Big)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

После преобразований получаем

$$C_{11}(\varepsilon,\lambda)=a_{11}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{11}(\varepsilon)C_{11}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{11}(\varepsilon)C_{12}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{11}(\varepsilon)C_{13}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{12}(\varepsilon,\lambda)=a_{12}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{12}(\varepsilon)C_{21}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{12}(\varepsilon)C_{22}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{12}(\varepsilon)C_{23}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{13}(\varepsilon,\lambda)=a_{13}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_3)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{13}(\varepsilon)C_{31}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{13}(\varepsilon)C_{32}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{13}(\varepsilon)C_{33}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{21}(\varepsilon,\lambda)=a_{21}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{21}(\varepsilon)C_{11}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{21}(\varepsilon)C_{12}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{21}(\varepsilon)C_{13}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{22}(\varepsilon,\lambda)=a_{22}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{22}(\varepsilon)C_{21}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{22}(\varepsilon)C_{22}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{22}(\varepsilon)C_{23}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{23}(\varepsilon,\lambda)=a_{23}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_3)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{23}(\varepsilon)C_{31}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{23}(\varepsilon)C_{32}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{23}(\varepsilon)C_{33}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{31}(\varepsilon,\lambda)=a_{31}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_1)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{31}(\varepsilon)C_{11}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{31}(\varepsilon)C_{12}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{31}(\varepsilon)C_{13}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{32}(\varepsilon,\lambda)=a_{32}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_2)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{32}(\varepsilon)C_{21}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{32}(\varepsilon)C_{22}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{32}(\varepsilon)C_{23}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$C_{33}(\varepsilon,\lambda)=a_{33}(\varepsilon)\int(R_0(\lambda)f_3)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{33}(\varepsilon)C_{31}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-$$

$$-a_{33}(\varepsilon)C_{32}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy-a_{33}(\varepsilon)C_{33}(\varepsilon,\lambda)\int\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

Введем обозначения

$$b(\varepsilon,\lambda)=\int\left(R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$\tilde{f}_1=\int\left(R_0(\lambda)f_1\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$\tilde{f}_2=\int\left(R_0(\lambda)f_2\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy,$$

$$\tilde{f}_3=\int\left(R_0(\lambda)f_3\right)(y)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

Тогда система примет вид

$$C_{11}(\varepsilon,\lambda)+a_{11}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{11}(\varepsilon,\lambda)+a_{11}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{12}(\varepsilon,\lambda)+a_{11}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{13}(\varepsilon,\lambda)=a_{11}(\varepsilon)\widetilde{f_1},$$

$$C_{12}(\varepsilon,\lambda)+a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{21}(\varepsilon,\lambda)+a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{22}(\varepsilon,\lambda)+a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{23}(\varepsilon,\lambda)=a_{12}(\varepsilon)\widetilde{f_2},$$

$$C_{13}(\varepsilon,\lambda)+a_{13}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{31}(\varepsilon,\lambda)+a_{13}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{32}(\varepsilon,\lambda)+a_{13}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{33}(\varepsilon,\lambda)=a_{13}(\varepsilon)\widetilde{f_3},$$

$$C_{21}(\varepsilon,\lambda)+a_{21}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{11}(\varepsilon,\lambda)+a_{21}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{12}(\varepsilon,\lambda)+a_{21}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{13}(\varepsilon,\lambda)=a_{21}(\varepsilon)\widetilde{f_1},$$

$$C_{22}(\varepsilon,\lambda)+a_{22}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{21}(\varepsilon,\lambda)+a_{22}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{22}(\varepsilon,\lambda)+a_{22}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{23}(\varepsilon,\lambda)=a_{22}(\varepsilon)\widetilde{f_2},$$

$$C_{23}(\varepsilon,\lambda)+a_{23}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{31}(\varepsilon,\lambda)+a_{23}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{32}(\varepsilon,\lambda)+a_{23}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{33}(\varepsilon,\lambda)=a_{23}(\varepsilon)\widetilde{f_3},$$

$$C_{31}(\varepsilon,\lambda)+a_{31}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{11}(\varepsilon,\lambda)+a_{31}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{12}(\varepsilon,\lambda)+a_{31}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{13}(\varepsilon,\lambda)=a_{31}(\varepsilon)\widetilde{f_1},$$

$$C_{32}(\varepsilon,\lambda)+a_{32}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{21}(\varepsilon,\lambda)+a_{32}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{22}(\varepsilon,\lambda)+a_{32}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{23}(\varepsilon,\lambda)=a_{32}(\varepsilon)\widetilde{f_2},$$

$$C_{33}(\varepsilon,\lambda)+a_{33}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{31}(\varepsilon,\lambda)+a_{33}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{32}(\varepsilon,\lambda)+a_{33}(\varepsilon)b(\varepsilon,\lambda)C_{33}(\varepsilon,\lambda)=a_{33}(\varepsilon)\widetilde{f_3}.$$

Находим сумму первого, второго и третьего уравнения, а также четвертого с пятым и шестым, а седьмого с восьмым и девятым. Тогда система примет вид

$$\left(I+\begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b(\varepsilon,\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon,\lambda) \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} C_{11}(\varepsilon,\lambda) & C_{12}(\varepsilon,\lambda) & C_{13}(\varepsilon,\lambda) \\ C_{21}(\varepsilon,\lambda) & C_{22}(\varepsilon,\lambda) & C_{23}(\varepsilon,\lambda) \\ C_{31}(\varepsilon,\lambda) & C_{32}(\varepsilon,\lambda) & C_{33}(\varepsilon,\lambda) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix},$$

т. е. можем записать систему в виде

$$\big(I+A(\varepsilon)B(\varepsilon,\lambda)\big)C(\varepsilon,\lambda)=A(\varepsilon)F,$$

где

$$A(\varepsilon)=\begin{bmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) & a_{13}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) & a_{23}(\varepsilon) \\ a_{31}(\varepsilon) & a_{32}(\varepsilon) & a_{33}(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$B(\varepsilon,\lambda)=\begin{bmatrix} b(\varepsilon,\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & b(\varepsilon,\lambda) \end{bmatrix},$$

$$C(\varepsilon,\lambda)=\begin{bmatrix} C_{11}(\varepsilon,\lambda) & C_{12}(\varepsilon,\lambda) & C_{13}(\varepsilon,\lambda) \\ C_{21}(\varepsilon,\lambda) & C_{22}(\varepsilon,\lambda) & C_{23}(\varepsilon,\lambda) \\ C_{31}(\varepsilon,\lambda) & C_{32}(\varepsilon,\lambda) & C_{33}(\varepsilon,\lambda) \end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\left(\left[A(\varepsilon)\right]^{-1}+B(\varepsilon,\lambda)\right)C(\varepsilon,\lambda)=F.$$

Поэтому если

$$\det\left|\left[A(\varepsilon)\right]^{-1}+B(\varepsilon,\lambda)\right|\neq 0,$$

то

$$C(\varepsilon,\lambda)=\left(\left[A(\varepsilon)\right]^{-1}+B(\varepsilon,\lambda)\right)^{-1}F.$$

Следовательно, решение представится в виде

$$\begin{bmatrix}u_1(\varepsilon)\\u_2(\varepsilon)\\u_3(\varepsilon)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_0(\lambda)f_1\\R_0(\lambda)f_2\\R_0(\lambda)f_3\end{bmatrix}-S(\varepsilon,\lambda)\begin{bmatrix}\tilde{f}_1\\\tilde{f}_2\\\tilde{f}_3\end{bmatrix}\left(R_0\left(\lambda\right)\varphi_\varepsilon\right)(x), \tag{10}$$

где

$$S(\varepsilon,\lambda)=\left(\left[A(\varepsilon)\right]^{-1}+B(\varepsilon,\lambda)\right)^{-1}.$$

Выражение вида (10) эквивалентно (6).

Здесь мы предполагаем, что матрица $A(\varepsilon)$ обратима при $\varepsilon>0$. Это не ограничивает общности, т. к., добавив к этой матрице члены более высокого порядка, всегда можем получить обратимую матрицу. При этом интересующие нас выражения зависят только от нескольких главных членов в разложении $A(\varepsilon)$, т. е. члены высокого порядка не влияют на окончательные результаты.

Таким образом, резольвента определена, если

$$\det\left|\left[A(\varepsilon)\right]^{-1}+B(\varepsilon,\lambda)\right|\neq 0,$$

а те точки λ, при которых этот определитель равен нулю, являются спектральными значениями этого оператора. Теорема доказана.

Заключение

В ходе проведенного исследования были успешно выполнены ключевые этапы анализа систем уравнений с дельта-образными коэффициентами, а именно – построение аппроксимаций рассматриваемого оператора с помощью операторов конечного ранга и нахождение резольвенты соответствующего аппроксимирующего семейства. Эти результаты являются важным шагом в понимании спектральных свойств таких систем и позволяют более глубоко анализировать их поведение в предельных случаях.

Построение аппроксимаций с помощью операторов конечного ранга обеспечивает возможность точно моделировать сложные дельта-образные взаимодействия, что в условиях классической теории функций остается затруднительным или невозможным. Полученные формы аппроксимаций дают ясное представление о структуре решений, позволяют исследовать предельные поведение и выявлять феномен резонанса, возникающего в процессе изменения параметров систем.

Определение резольвенты для аппроксимирующего семейства является важным результатом, т. к. оно дает возможность не только аналитически исследовать спектральные характеристики построенных операторов, но и применять полученные результаты для анализа устойчивости решений и динамики соответствующих систем.

Анализ резольвенты позволяет выявить возможные резонансные ситуации и определить существенные различия между предельными и исходными операторами.

Полученные результаты имеют потенциальное применение в различных областях математики и математической физики, где возникают уравнения с дельта-образными коэффициентами, например в теории квантовых графов, моделях диффузий и волновых процессов с точечными взаимодействиями.

Таким образом, выполненная работа вносит значительный вклад в развитие теории операторов с дельта-образными коэффициентами и предлагает новые методы анализа подобных систем, что в дальнейшем может способствовать решению актуальных задач в математической физике и прикладных науках.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Альбеверио, С. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.] ; пер. с англ. В. А. Гейлера [и др.] – М. : Мир, 1991. – 566 с.

2. Антоневич, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.

3. Антоневич, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен : LAPLAMBERT, 2012.

4. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.

5. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестник Белорусского государственного университета. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.

6. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ-образными коэффициентами / М. Г. Кот // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.

7. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.

8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод указания / И. С. Кащенко ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.

REFERENCES

1. Al’beverio, S. Reshaemye modeli v kvantovoi mekhanike / S. Al’beverio [i dr.] ; per. s angl. V. A. Geilera [i dr.] – M. : Mir, 1991. – 566 s.

2. Antonevich, A. B. Approksimatsii operatorov s del’ta-obraznymi koeffitsientami / A. B. Antonevich, T. A. Romanchuk // Aktual’nye problemy matematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly ; redkol.: E. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008. – S. 11–28.

3. Antonevich, A. B. Uravneniya s del’ta-obraznymi koeffitsientami: metod konechno-mernykh approksimatsii / A. B. Antonevich, T. A. Romanchuk. – Saarbryukken : LAPLAMBERT, 2012.

4. Berezin, F. A. Zamechanie ob uravnenii Shredingera s singulyarnym potentsialom / F. A. Berezin, L. D. Faddeev // Doklady AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.

5. Kot, M. G. O rezol’ventnoi skhodimosti operatorov, approksimiruyushchikh sistemu uravnenii s δ-obraznymi koeffitsientami / M. G. Kot // Vestnik Belorusskogo gosudarsevennogo universiteta. Fizika. Matematika. Informatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.

6. Kot, M. G. Asimptotika sobstvennykh vektor-funktsii operatorov, approksimiruyushchikh differentsial’nye uravneniya s δ-obraznymi koeffitsientami / M. G. Kot // Vestsi Natsyyanal’nai akademii navuk Belaruci. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.

7. Romanchuk, T. A. Yavlenie rezonansa dlya matrichno-znachnykh funktsii / T. A. Romanchuk // Vestsi Natsyyanal’nai akademii navuk Belaruci. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.

8. Kashchenko, I. S. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenii uravnenii : metod ukazaniya / I. S. Kashchenko ; Yarosl. gos. un-t im. P. G. Demidova. – Yaroslavl’ : YarGU, 2011. – 44 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 09.10.2025