УДК 512.542 DOI 10.63874/2218-0303-2025-2-82-92

Дмитрий Владимирович Грицук[1], Полина Александровна Павлушко[2], Александр Александрович Трофимук[3]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

[2]студент 4-го курса физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

[3]д-р физ.-мат. наук, доц., зав. каф. фундаментальной математики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Dmitry Gritsuk[1], Polina Pavlushko[2], Alexander Trofimuk[3]

[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Brest State A. S. Pushkin University

[2]4-th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

[3]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [1]dmitry.gritsuk@gmail.com; [2]polinapavlushko@gmail.com; [3]alexander.trofimuk@gmail.com

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СО СЛАБО ПРОПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Подгруппа A называется проперестановочной в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$ и AX – подгруппа для каждой подгруппы X из B. Говорят, что H полностью проперестановочна в G, если H проперестановочна в каждой подгруппе из G, содержащей H. Подгруппа H называется слабо проперестановочной в G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полностью проперестановочной подгруппы B из G. В работе приведены новые свойства слабо проперестановочных подгрупп, а также представлена новая информация о строении группы $G = AB$ со слабо проперестановочными подгруппами A и B. В частности, доказано, что если $A, B \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \le (G')^{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, исследованы группы $G = AB$, у которых силовские (максимальные) подгруппы из A и из B слабо проперестановочны в G.

Ключевые слова: *сверхразрешимая и нильпотентная группы, слабо проперестановочная подгруппа, X-корадикал, силовская подгруппа, максимальная подгруппа.*

On Finite Groups with Weakly Propermutable Subgroups

A subroup A is called propermutable in G, if there is a subgroup B such that $G = N_G(A)B$ and AX is a subgroup for every subgroup X of B. We say also that H is completely propermutable in G, if H is propermutable in every subgroup of G including H. A subroup H is called weakly propermutable in G, if $H = \langle A, B\rangle$ for some subnormal subgroup A of G and completely propermutable subgroup B of G. In this paper, we present new properties of weakly subnormal subgroups, and also provide new information on the structure of a group $G = AB$ with weakly propermutable subgroups A and B. In particular, we prove that if $A, B \in \mathfrak{F}$, then $G^{\mathfrak{F}} \le (G')^{\mathfrak{N}}$, where $\mathfrak{F}$ is a saturated formation such that $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Also we investigate the groups $G = AB$ when all Sylow (maximal) subgroups of A and of B are weakly propermutable in G.

Key words: *supersoluble and nilpotent groups, seminormal subgroup, weakly propermutable subgroup, the X-residual, Sylow subgroup, maximal subgroup.*

---

[*]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», номер госрегистрации 20211467).

Введение

Исследуются конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Запись $Y \le X$ означает, что Y – подгруппа группы X.

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и для каждой подгруппы $X \le B$ произведение AX является подгруппой в G. В этом случае подгруппу B называют *супердобавлением* к A.

Группы с полунормальными подгруппами интенсивно изучаются (обзор в [2]), что привело к появлению ряда обобщений этого понятия (например, [3]). Одним из таких обобщений является *проперестановочная* подгруппа [4]: подгруппа A называется проперестановочной в G, если существует подгруппа B такая, что $G = N_G(A)B$ и для каждой $X \le B$ произведение AX является подгруппой группы G. Подгруппу B в дальнейшем будем назвать *продобавлением* к A в группе G. Группы с проперестановочными подгруппами исследовались также в работах [4–8].

В группе

$$G = \langle a,b,c \parallel a|=|b|=2,|c|=12, c^b = c, (ac^{-1}b)^{-1} = ac^{-1}b, (ab)^3 = ba, c^5a = ac\rangle \simeq$$
$$\simeq (Z_{12} \times Z_2) \rtimes Z_2$$

([9], IdGroup=[48,37]), подгруппа $A = \langle a\rangle$ является проперестановочной в G, но не является проперестановочной в максимальной подгруппе $H \simeq (Z_6 \times Z_2) \rtimes Z_2$ группы G. Поэтому вполне естественно рассмотреть подгруппы вида: подгруппа H называется *полностью проперестановочной* в G, если она проперестановочна в каждой подгруппе, содержащей H [10].

Очевидно, что каждая полунормальная подгруппа является полностью проперестановочной подгруппой, а каждая полностью проперестановочная подгруппа является проперестановочной. Обратные включения неверны. Так, в группе

$$G_1 = \langle a,b,c \parallel a|=|b|=3,|c|=2, ab = ba, ac = ca, b^c = b^{-1}\rangle \simeq Z_3 \times S_3$$

([9], IdGroup=[18,3]), подгруппа $A = \langle c\rangle$ является полностью проперестановочной в G_1, т. к. $N_G(A) = \langle ac\rangle$, $B = \langle b\rangle$ и в подгруппах S_3 и Z_6 подгруппа A является полунормальной, но A не является полунормальной в G_1.

Еще одно направление обобщений связано с комбинацией свойств подгрупп с субнормальностью. В работе [11] подгруппа H называется *слабо субнормальной* в G, если $H = \langle A,B\rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G. Ясно, что полунормальная подгруппа слабо субнормальна, но не наоборот (например, в знакопеременной группе $G = A_4$ максимальная подгруппа порядка 2 из максимальной подгруппы $V = Z_2 \times Z_2$ является субнормальной в G, но не полунормальной в G). Среди основных результатов работы [11] стоит отметить следующий: *если $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы группы G, то $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$. Более того, если $G' \in \mathfrak{N}$, то G сверхразрешима.*

В настоящей работе мы развиваем этот результат, вводя более общее понятие: подгруппа H называется *слабо проперестановочной в* G, если $H = \langle A,B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полностью проперестановочной подгруппы B из G.

Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах. Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами.

Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной.

Через G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [12; 13]. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \{G \in G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$ [13, IV. 1.7]. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Всякая функция $f : \mathbb{P} \to \{\textit{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется локальной, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп G таких, что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$ и обозначается через $\mathfrak{F} = LF(f)$. По [13, теорема IV. 3.7], для локальной формации $\mathfrak{F}$ всегда существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$, $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, где $\mathfrak{N}_p$ – формация всех p-групп. Такой экран f называется максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{F}$. Из [13, теорема IV. 4.6] следует, что всякая локальная формация является насыщенной формацией и наоборот.

Группа G называется примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром $Core_G M = \cap_{x \in G} M^x = 1$. В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G.

Лемма 1.1 *([14, VI. 9]).*

(1) *Класс $\mathfrak{U}$ – наследственная насыщенная формация.*

(2) *Каждая минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок.*

(3) *Пусть N – нормальная в G подгруппа и G/N сверхразрешима. Если N либо циклическая, либо $N \le Z(G)$, либо $N \le \Phi(G)$, то G сверхразрешима.*

(4) *Каждая сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. В частности, каждая сверхразрешимая группа G p-замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$ и q-нильпотентна для наименьшего $q \in \pi(G)$.*

(5) *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

(6) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс.*

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация и* G *– группа. Предположим, что* $G \notin \mathfrak{F}$*, но* $G/N \in \mathfrak{F}$ *для всех* $N \lhd G$*,* $N \neq 1$*. Тогда* G *– примитивная группа.*

Доказательство.

Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $\Phi(G)=1$ и группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. Тогда для некоторой максимальной подгруппы M группы G справедливо, что $G=NM$, т. к. $\Phi(G)=1$. Следовательно, $M_G=1$ и группа G примитивна.

Лемма 1.3 ([14, теорема II. 3.2]). *Пусть* G *– разрешимая неединичная примитивная группа с примитиватором* M*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $\Phi(G)=1$*;*

(2) $F(G)=C_G(F(G))=\mathrm{O}_p(G)$ *и* $F(G)$ *есть элементарная абелева подгруппа порядка* p^n *для некоторого простого* p *и натурального* n*;*

(3) G *имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадает с* $F(G)$*;*

(4) $G=F(G)\rtimes M$ *и* $\mathrm{O}_p(M)=1$.

Лемма 1.4 ([16, лемма 5.8, лемма 5.11]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– формации,* G *– группа и* K *– нормальная в* G *подгруппа. Тогда:*

(1) $(G/K)^{\mathfrak{F}}=G^{\mathfrak{F}}K/K$*;*

(2) $G^{\mathfrak{F}\circ\mathfrak{H}}=(G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$*;*

(3) *если* $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$*, то* $G^{\mathfrak{F}}\leq G^{\mathfrak{H}}$.

Напомним, что $A^G=\langle A^g \mid g\in G\rangle$ – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с A подгруппами группы G.

Лемма 1.5.

(1) *если* A *– полностью пропереставовочна в* G *и* $A\leq B$*, то* A *полностью пропереставовочна в* B*;*

(2) *если* A *– полностью пропереставовочная подгруппа группы* G *и подгруппа* N *нормальна в* G*, то* AN/N *полностью пропереставовочна в* G/N*;*

(3) *если* A *– полностью пропереставовочная подгруппа группы* G *и подгруппа* N *нормальна в* G*, то* AN *полностью пропереставовочна в* G.

Доказательство.

1. Пусть B_1 – произвольная подгруппа в B такая, что $A\leq B_1$. Поскольку B_1 – подгруппа группы G, то по определению следует, что A пропереставовочна в B_1, а значит, A полностью пропереставовочна в B.

2. Пусть $AN/N\leq E/N\leq G/N$. Так как $A\leq AN\leq E$, то по п. 1 A пропереставовочна в E. Тогда AN/N пропереставовочна в E/N по [7, лемма 3.1 (1)].

3. Пусть $A\leq E\leq G$. По условию A пропереставовочна в E. Тогда найдется такая подгруппа B из E, что $E=N_E(A)B$ и A перестановочна со всеми подгруппами из B. Тогда AN перестановочна со всеми подгруппами из B. С другой стороны, поскольку $N_E(A)\leq N_E(AN)$, то $E=N_E(AN)B$. Значит, AN пропереставовочна в E, и поэтому AN полностью пропереставовочна в G.

Лемма 1.6 ([7, лемма 3.3]).

1. *Пусть* A *– подгруппа группы* G*. Если* A *пропереставовочна в* G*, то* A^G *разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1.1) A 2*-нильпотентна;*

(1.2) *A разрешима и 3 не делит порядок A.*

2. *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G. Если A – проперестановочна в G и p не делит порядок A, то p не делит порядок подгруппы A^G.*

3. *Пусть A – проперестановочная подгруппа разрешимой группы G и r – наибольшее простое число из $\pi(G)$. Если A r-замкнута, то A_r субнормальна в G.*

Лемма 1.7 ([7, лемма 3.4]).

1. *Пусть в G существует проперестановочная π-холлова подгруппа H. Тогда G π-разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1.1) *H 2-нильпотентна;*

(1.2) *H разрешима и $3 \notin \pi$.*

2. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Если P проперестановочна в G, то G p-разрешима.*

3. *Пусть p – наибольшее простое число из $\pi(G)$ и P – силовская p-подгруппа группы G. Если P проперестановочна в G, то P нормальна в G.*

4. *Если в группе G все силовские подгруппы проперестановочны, то G сверхразрешима.*

5. *Если в группе G все максимальные подгруппы проперестановочны, то G сверхразрешима.*

Лемма 1.8 ([18, лемма 2.16]).

Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$ и G – группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E циклическая, то $G \in \mathfrak{F}$.

Свойства слабо проперестановочных подгрупп

Лемма 2.1.

(1) *Если A – слабо проперестановочна в G и $A \le B$, то A слабо проперестановочна в B.*

(2) *Если A – слабо проперестановочна в G и подгруппа N нормальна в G, то AN/N – слабо проперестановочна в G/N.*

Доказательство.

Пусть $A = \langle L, T \rangle$, где L – субнормальная и T – полностью проперестановочна в G.

1. Утверждение следует из [13, лемма A. 14.1(a)] и леммы 1.5 (1).

2. Очевидно, что $AN/N = \langle LN/N, TN/N \rangle$, где LN/N субнормальна в G/N по [13, лемма A. 14.1(b)] и TN/N полностью проперестановочна в G/N по лемме 1.5 (2). Следовательно, AN/N слабо проперестановочна в G/N.

Лемма 2.2.

(1) *Пусть M – максимальная подгруппа группы G. Если M слабо проперестановочна в G, то индекс M в G есть простое число.*

(2) *Если в группе G все максимальные подгруппы слабо проперестановочны, то G сверхразрешима.*

(3) *Если индекс подгруппы H в G есть простое число, то H слабо проперестановочна в G.*

Доказательство.

1. По условию $M = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и полностью проперестановочной подгруппы B в G. Более того, M/M_G слабо проперестановочна в G/M_G по лемме 2.1 (2). Если $M_G \ne 1$, то по индукции для некоторого

простого числа p имеем $|G:M|=|G/M_G:M/M_G|=p$. Предположим, что $M_G=1$, и пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G. Заметим, что $R\le N_G(A)$ [13, лемма А. 14.3], поэтому $A^G=A^{RM}\le M_G=1$, следовательно, $M=B$ полностью проперестановочна в G. По лемме 1.7 (5) индекс M в G есть простое число.

2. Согласно теоремы Хупперта, сверхразрешимую группу можно определить как группу, в которой все максимальные подгруппы имеют простые индексы. Из п. 1 следует, что группа G сверхразрешима.

3. По [15, теорема 1] H полунормальна в G, а следовательно, слабо проперестановочна в G.

Лемма 2.3.

(1) *Пусть в группе G существует π-холлова подгруппа H. Если H слабо проперестановочна в G, то H полностью проперестановочна в G.*

(2) *Пусть p – наибольшее простое число из $\pi(G)$ и P – силовская p-подгруппа группы G. Если P слабо проперестановочна в G, то P нормальна в G.*

(3) *Если в группе G все силовские подгруппы слабо проперестановочна, то G сверхразрешима.*

Доказательство.

1. Так как H слабо проперестановочна в G, то $H=\langle H_1,H_2\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы H_1 и полностью проперестановочной подгруппы H_2. Тогда H_1^G – π-подгруппа группы G по [16, теорема 5.31]. Значит,

$$H=\langle H_1,H_2\rangle\le H_1^GH_2\le H.$$

Следовательно, $H=H_1^GH_2$. Так как H_2 полностью проперестановочна в G, то $H=H_1^GH_2$ полностью проперестановочна в G по лемме 1.5 (3).

2. Из п. 1 следует, что P полностью проперестановочна в G. По лемме 1.7 (3) P нормальна в G.

3. Из п. 1 следует, что все силовские подгруппы группы G полностью проперестановочны в G. По лемме 1.7 (4) G сверхразрешима.

Лемма 2.4.

(1) *Если H – слабо проперестановочная 2-нильпотентная подгруппа группы G, то H^G разрешима.*

(2) *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G. Если H – слабо проперестановочна в G подгруппа и p не делит порядок H, то p не делит порядок H^G.*

Доказательство.

Докажем два утверждения одновременно. Так как H слабо проперестановочна в G, то $H=\langle A,B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полностью проперестановочной подгруппы B из G. Поскольку

$$H=\langle A,B\rangle\le\langle A^G,B^G\rangle=A^GB^G,$$

то $H^G\le A^GB^G$. Так как $A^G\le H^G$ и $B^G\le H^G$, то $H^G=A^GB^G$. Подгруппа B^G разрешима (не делится на p) по лемме 1.6 (1), (2). Так как A субнормальна, то A^G 2-нильпотентна (не делится на p) по [16, теорема 5.31]. Поэтому H^G разрешима (не делится на p).

Конечные группы, факторизуемые слабо проперестановочными сомножителями

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация такая, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G = AB$, где A и B – слабо проперестановочные подгруппы группы G. Если подгруппы A и B принадлежат $\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \le (G')^{\mathfrak{N}}$.*

Доказательство.

Рассмотрим случай, когда коммутант G' нильпотентен. Тогда группа G разрешима. Предположим противное, что $G \not\in \mathfrak{F}$. Если N – неединичная нормальная в G подгруппа, то подгруппы AN / N и BN / N слабо проперестановочны в G / N по лемме 2.1 (2) и принадлежат F ввиду того, что F – формация. Так как

$$(G / N)' = G'N / N \simeq G' / G' \cap N,$$

то коммутант $(G / N)'$ нильпотентен. Следовательно, по индукции $G / N \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенная и группа G разрешима, то по лемме 1.3 $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G) = \mathrm{O}_p(G)$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Так как G' нильпотентен, то $N = G'$ и G / N абелева.

Предположим, что $AN = G$. Тогда $A \cap N = 1$, A – максимальная в G подгруппа. Так как A – слабо проперестановочная в G подгруппа, то по лемме 2.2 (1) индекс подгруппы A в группе G будет простым числом. Значит, $|N| = p$ и группа $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.8. Противоречие. Поэтому предположение неверно, и $AN < G$. Согласно лемме 2.1 (1) подгруппа A слабо проперестановочна в AN. Так как N абелева, то $N \in \mathfrak{F}$. Кроме того, $(AN)' \le G'$, а значит, коммутант $(AN)'$ нильпотентен. По индукции $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогично получаем, что $BN < G$ и $BN \in \mathfrak{F}$. Таким образом, группа $G = (AN)(BN)$ является произведением нормальных подгрупп AN и BN, каждая из которых принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Так как AN нормальна в G, то $F_p(AN) = N$ и $AN / F_p(AN) = AN / N \in f(p)$, где f – внутренний максимальный локальный экран насыщенной формации $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$, $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Аналогично можно показать, что $BN / N \in f(p)$.

Так как G / N абелева, то $[AN / N, BN / N] = 1$ и $G / N \in f(p)$, поскольку $f(p)$ – формация. Так как $N \in \mathfrak{N}_p$, то $G \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, предположение неверно.

Пусть $(G')^{\mathfrak{N}} \ne 1$. Покажем, что фактор-группа $G / (G')^{\mathfrak{N}}$ принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Так как

$$(G / (G')^{\mathfrak{N}})' = G'(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}} = G' / (G')^{\mathfrak{N}},$$

то коммутант $(G / (G')^{\mathfrak{N}})'$ нильпотентен. Фактор-группа

$$G / (G')^{\mathfrak{N}} = (A(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}})(B(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}}),$$
$$A(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}} \simeq A / A \cap (G')^{\mathfrak{N}}, B(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}} \simeq B / B \cap (G')^{\mathfrak{N}},$$

поэтому подгруппы $A(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}}$ и $B(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}}$ принадлежат формации $\mathfrak{F}$, и по лемме 2.1 (2) они слабо проперестановочны в $G / (G')^{\mathfrak{N}}$. По доказанному выше, фактор-группа $G / (G')^{\mathfrak{N}}$ принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Поскольку $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$, то $G^{(\mathfrak{N}\circ\mathfrak{A})} = (G^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{N}} = (G')^{\mathfrak{N}} \leq G^{\mathfrak{U}}$ по лемме 1.4 (2), (3). Поэтому при $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ справедливо

Следствие 3.1. *Пусть A и B – сверхразрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}}$ в каждом из следующих случаев:*

(1) *A и B – слабо субнормальны в G [11, следствие 1.6];*

(2) *A и B – субнормальны в G [17, теорема 2];*

(3) *A и B – полунормальны в G [2, теорема 2.3];*

(4) *A и B – проперестановочны в G [7, теорема 2.3].*

Приложения для системы компьютерной алгебры GAP

Современные исследования в теории конечных групп требуют не только теоретического осмысления новых понятий и выдвижения интуитивных гипотез, но и их тщательной проверки на характерных примерах. Практическая проверка гипотез является важнейшим этапом научного исследования, позволяющим обосновать целесообразность введения новых классов подгрупп и уточнить границы их применения.

В связи с этим в статье разработаны три алгоритма для системы компьютерной алгебры GAP:

1) проперестановочность (IsPropermutable);

2) полностью проперестановочность (IsCompletelyPropermutable);

3) слабая проперестановочность (IsWeaklyPropermutable).

Алгоритм функции IsPropermutable:

Вход: группа G и подгруппа $H \leq G$.

Выход: *true*, если H проперестановочна в G, иначе *false*.

Метод:

- Если H нормальна в G, вернуть *true*.
- Получить все подгруппы $K \leq G$.
- Для каждой подгруппы K проверить:
  - Проверить, что $G = N_G(H)K$, где $N_G(H)$ – нормализатор H в G.
  - Проверить перестановочность $N_G(H)$ и K в G.
  - Если да, получить все подгруппы $m \leq K$.
  - Для каждой m проверить перестановочность H и m.
  - Если все перестановочности выполняются, вернуть *true*.
- Если ни для какого K условия не выполняются, вернуть *false*.

Алгоритм функции IsCompletelyPropermutable:

Вход: группа G и подгруппа $H \leq G$.

Выход: *true*, если H слабо проперестановочна в G, иначе *false*.

Метод:

- Получить все подгруппы $C = \{K \leq G \mid H \leq K\}$.
- Проверить, что для каждой $K \in C$ подгруппа H проперестановочна в K (вызов IsPropermutable(K, H)).
- Если для всех таких K условие выполнено, вернуть *true*, иначе *false*.

Алгоритм функции IsWeaklyPropermutable:

Вход: группа G и подгруппа $H \leq G$.

Выход: *true*, если H слабо проперестановочна в G, иначе *false*.

Метод:

• Получить все субнормальные подгруппы $A \le G$ такие, что $A \le H$.

• Для каждой такой подгруппы A получить все подгруппы $B \le G$, для которых выполняется:

- B полностью проперестановочна в G;
- $H = \langle A, B \rangle$.

• Если существует хотя бы одна пара подгрупп (A, B), удовлетворяющая условиям, вернуть *true*.

• Если ни одна пара не подходит, вернуть *false*.

Заключение

В данной работе введено и исследовано новое понятие слабо проперестановочной подгруппы, которое обобщает такие известные классы подгрупп, как субнормальные, полунормальные, проперестановочные и полностью проперестановочные подгруппы. Установлены ключевые свойства слабо проперестановочных подгрупп, а также связь со строением конечной факторизуемой группы. Основным результатом является доказательство того, что если группа $G = AB$ факторизуется двумя слабо проперестановочными подгруппами A и B, принадлежащими насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все сверхразрешимые группы, то $\mathfrak{F}$-корадикал группы G содержится в нильпотентном корадикале ее коммутанта: $G^{\mathfrak{F}} \le (G')^{\mathfrak{N}}$. Это обобщает ряд ранее известных результатов для полунормальных, субнормальных и проперестановочных подгрупп.

Также изучены группы, у которых все силовские или все максимальные подгруппы являются слабо проперестановочными, и показано, что в этих случаях группа оказывается сверхразрешимой.

Важным практическим аспектом работы является разработка алгоритмов для системы компьютерной алгебры GAP, позволяющих проверять проперестановочность, полную проперестановочность и слабую проперестановочность подгрупп.

Полученные результаты открывают перспективы для изучения неразрешимых групп со слабо проперестановочными подгруппами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin : De Gruyter, 2010.
2. Монахов, В. С. О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 1. – С. 148–159.
3. Трофимук, А. А. Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители / А. А. Трофимук. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2021. – 262 с.
4. Yi, X. On S-propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, nr 2. – P. 605–616.
5. Yi, X. Some new characterizations of PST-groups / X. Yi, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2014. – Vol. 399. – P. 39–54.
6. Al-Sharo, K. A. Finite groups with given systems of weakly S-propermutable subgroups / K. A. Al-Sharo // J. Group Theory. – 2016. – Vol. 19. – P. 871–887.
7. Trofimuk, A. A. Finite groups with given systems of propermutable subgroups / A. A. Trofimuk // Eurasian Math. J. – 2024. – Vol. 15, nr 1. – P. 91–97.
8. Zubei, E. V. On a finite group with OS-propermutable Sylow subgroup / E. V. Zubei // Acta Math. Hungar. – 2024. – Vol. 174. – P. 570–577.

9. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.15.0 released on 28 September 2025. – URL: http://www.gap-system.org.

10. Йи, С. Проперестановочные характеризации конечных разрешимых PST-групп и PT-групп / С. Йи // Сибрский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 2. – С. 377–388.

11. Хуан, Ц. Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Ц. Хуан, Б. Ху, А. Н. Скиба // Сибрский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 210–220.

12. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.

14. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.

15. Подгорная, В. В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп / В. В. Подгорная // Весцi Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. – 2000. – № 4. – С. 22–25.

16. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн. : Выш. шк., 2006. – 207 с.

17. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сибрский математический журнал. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.

18. Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

REFERENCES

1. Ballester-Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin : De Gruyter, 2010.

2. Monakhov, V. S. O sverkhrazreshimosti gruppy s polunormal’nymi podgruppami / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sibirskii matematicheskii zhurnal. – 2020. – T. 61, № 1. – S. 148–159.

3. Trofimuk, A. A. Konechnye faktorizuemye gruppy s ogranicheniyami na somnozhiteli / A. A. Trofimuk. – Mn. : Izd. tsentr BGU, 2021. – 262 s.

4. Yi, X. On S-propermutable subgroups of finite groups / X. Yi, A. N. Skiba // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2015. – Vol. 38, nr 2. – P. 605–616.

5. Yi, X. Some new characterizations of PST-groups / X. Yi, A. N. Skiba // J. Algebra. – 2014. – Vol. 399. – P. 39–54.

6. Al-Sharo, K. A. Finite groups with given systems of weakly S-propermutable subgroups / K. A. Al-Sharo // J. Group Theory. – 2016. – Vol. 19. – P. 871–887.

7. Trofimuk, A. A. Finite groups with given systems of propermutable subgroups / A. A. Trofimuk // Eurasian Math. J. – 2024. – Vol. 15, nr 1. – P. 91–97.

8. Zubei, E. V. On a finite group with OS-propermutable Sylow subgroup / E. V. Zubei // Acta Math. Hungar. – 2024. – Vol. 174. – P. 570–577.

9. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.15.0 released on 28 September 2025. – URL: http://www.gap-system.org.

10. Ii, S. Properestanovochnye kharakterizatsii konechnykh razreshimykh PST-grupp i PT-grupp / S. Ii // Sibrskii matematicheskii zhurnal. – 2015. – T. 56, № 2. – S. 377–388.

11. Khuan, Ts. Konechnye gruppy so slabo subnormal’nymi i chastichno subnormal’nymi podgruppami / Ts. Khuan, B. Khu, A. N. Skiba // Sibrskii matematicheskii zhurnal. – 2021. – T. 62, № 1. – C. 210–220.

12. Shemetkov, L. A. Formatsii konechnykh grupp / L. A. Shemetkov. – M. : Nauka, 1978. – 272 s.

13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.

14. Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.

15. Podgornaya, V. V. Polunormal’nye podgruppy i sverkhrazreshimost’ konechnykh grupp / V. V. Podgornaya // Vestsi Natsyyanal’nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk. – 2000. – № 4. – S. 22–25.

16. Monakhov, V. S. Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Mn. : Vysh. shk., 2006. – 207 c.

17. Monakhov, V. S. O sverkhrazreshimom koradikale proizvedeniya subnormal’nykh sverkhrazreshimykh podgrupp / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Sibrskii matematicheskii zhurnal. – 2017. – T. 58, № 2. – S. 353–364.

18. Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.07.2025