УДК 517.5

И.В. Кальчук, А.О. Задорожный, Р.А. Маковий

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ВЕЛИЧИН ОТКЛОНЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА ОТ ФУНКЦИЙ С КЛАССА ГЁЛЬДЕРА

При приближении функций класса Гёльдера их интегралами Пуассона возникают асимптотические разложения, коэффициенты которых не представлены в явном виде. Этот вопрос решен с помощью дзета-функции Римана, что дает возможность находить точные значения констант Колмогорова – Никольського. Разработана прикладная программа, позволяющая вычислять константы заданного порядка малости.

Гармонический и бигармонический интеграл как метод суммирования рядов Фурье

Пусть $f(x)$ 2π-периодическая суммируема функция и

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

ее ряд Фурье. Пусть также $\Lambda=\{\lambda_\rho(k)\}$ – множество функций натурального аргумента, зависящее от параметра $\rho\in E_\Lambda\subset R$, и при этом $\lambda_\rho(0)=1$.

Каждой такой функции $f(x)$, исходя из ее разложения (1), поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(k)(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{2}$$

Если ряд (2) при каждом $\rho\in E_\Lambda$ является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, то обозначим ее через $U_\rho(f;x;\Lambda)$ и будем говорить, что множество $\Lambda=\{\lambda_\rho(k)\}$ задает метод построения операторов $U_\rho(f;x;\Lambda)$.

Подставляя в (2) значения коэффициентов a_k и b_k, находим

$$U_\rho(f;x;\Lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(k)\cos kt\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K(\rho;t)dt, \tag{3}$$

где $K(\rho;t)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(k)\cos kt$ – ядро оператора $U_\rho(f;x;\Lambda)$.

Если в формуле (3) положить $\lambda_\rho(k)=\rho^k$, $0\le\rho<1$, то получим

$$U_\rho(f;x;\Lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)K_1(\rho;t)dt=:P_\rho(f;x), \tag{4}$$

$$K_1(\rho;t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt=\frac{1-\rho^2}{2\left(\rho^2-2\rho\cos t+1\right)},$$

а когда $\lambda_\rho(k)=\left(1+\dfrac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k$, $0\le\rho<1$, то

$$U_\rho(f;x;\Lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_2(\rho;t)dt =: B_\rho(f;x), \tag{5}$$

$$K_2(\rho;t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k\cos kt=\frac{\left(1-\rho^2\right)^2\left(1-\rho\cos t\right)}{2\left(\rho^2-2\rho\cos t+1\right)^2}.$$

Величины (4) и (5) принято называть гармоническим [1–4] и бигармоническим [5–8] интегралом Пуассона функции f соответственно.

Приближение функций класса Гёльдера

Пусть C – пространство 2π-периодических функций, норма в котором задается при помощи равенства

$$\|f\|_C=\max_t|f(t)|.$$

Классом Гёльдера порядка 1 принято называть класс функций $f\in C$, для которых выполняется условие

$$|f(x+h)-f(x)|\le|h|.$$

Обозначают этот класс H^1.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M};U_\rho(\Lambda))_C=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\left\|f(x)-U_\rho(f;x;\Lambda)\right\|_C,$$

где $\mathfrak{M}\subseteq C$ – заданный класс функций, $U_\rho(f;x;\Lambda)$ – операторы вида (3), будем называть, следуя А.И. Степанцу [9], задачей Колмогорова – Никольського. В нашем случае будем рассматривать две величины:

$$\mathcal{E}(H^1;P_\rho)_C \text{ и } \mathcal{E}(H^1;B_\rho)_C,$$

которые соответствуют величинам отклонений гармонического и бигармонического интегралов Пуассона от функций из класса H^1.

Если в явном виде найдена функция $g(\rho)=g(\mathfrak{M},\rho)$ такая, что при $\rho\to 1-$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M};U_\rho(\Lambda))_C=g(\rho)+o(g(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова – Никольського для оператора $U_\rho(f;x;\Lambda)$ на классе $\mathfrak{M}$ в метрике пространства C.

Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\rho)$ называется асимптотическим разложением или асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho\to 1-$, если для произвольного натурального N

$$f(\rho)=\sum_{n=0}^{N}g_n(\rho)+o(g_N(\rho)),\ \rho\to 1-$$

и для всех $n\in\mathbb{N}$

$$|g_{n+1}(\rho)|=o\left(|g_n(\rho)|\right).$$

Кратко это будем записывать следующим образом:

$$f(\rho)\cong\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\rho).$$

Вопрос об исследовании аппроксимативных свойств методов приближения интегралами Пуассона был и остается актуален для многих математиков.

Так, например, Э.Л. Штарк в работе [2] установил, что

$$\mathcal{E}(H^1;P_\rho)_C=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho}+\beta_k(1-\rho)^k\right\},\ \rho\to 1-,$$

$$\beta_k=\frac{1}{k}\left\{\ln 2+\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right\},k=1,2,\ldots$$

В работах [6] и [7] (независимо друг от друга) был получен следующий результат:

$$\mathcal{E}(H^1;B_\rho)_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)+\frac{2}{\pi}(1-\rho)^2\ln\frac{1}{1-\rho}+\frac{1+2\ln 2}{\pi}(1-\rho)^2+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho}+\gamma_k(1-\rho)^k\right\},\ \rho\to 1-$$

$$\gamma_k=\frac{1}{k}\left(\ln 2+\frac{1}{k}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right)-\frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-1}}.$$

Асимптотическое разложение величины $\mathcal{E}(H^1;P_\rho)_C$ по степеням $\frac{1}{\delta}$ $\left(\delta=-\frac{1}{\ln\rho}\right)$ найдено В.А. Баскаковым [3]:

$$\mathcal{E}(H^1;P_\delta)_C\cong\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{\delta}\ln\delta+\frac{1}{\delta}\left[\ln\pi+\int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^2}dt\right]\right\}+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}dt-\frac{1}{2k\pi^{2k}}\right]\frac{1}{\delta^{2k+1}}, \tag{6}$$

где под символом $(t)_{2\pi}$ понимают четное 2π-периодическое продолжение функции $\varphi(t)=t$, $0\le t\le\pi$.

Асимптотическое разложение, которое формулируется как в терминах $\frac{1}{\delta}$, так и в терминах $(1-\rho)$, установлено Т.И. Амановым и Л.П. Фалалеевым в работе [8], а именно при $\delta\to\infty$ $(\rho\to 1-)$

$$\mathcal{E}(H^1;B_\rho)_C=\frac{1-\rho^2}{\pi}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[2k\int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k+2}}dt-\frac{1}{\pi^{2k}}\right]\frac{1}{\delta^{2k}}\right\}+$$
$$+\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}-\frac{1-\rho^2}{\pi}\right)\left\{\int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^2}dt+\ln\delta+\ln\pi+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2k\pi^{2k}}-\int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k+2}}dt\right)\frac{1}{\delta^{2k}}\right\}. \tag{7}$$

С полученных разложений (6) и (7) неизвестными оставались коэффициенты, где фигурирует 2π-периодическое продолжение функции $\varphi(t)=t$.

В работе найдено значения выражений $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}dt$, а именно:

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}dt=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{(2i-1)\pi}^{2i\pi}\frac{2i\pi-t}{t^{2(k+1)}}dt+\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{2i\pi}^{(2i+1)\pi}\frac{t-2i\pi}{t^{2(k+1)}}dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{2i\pi}{2k+1}\frac{1}{t^{2k+1}}+\frac{1}{2k}\frac{1}{t^{2k}}\right)\Bigg|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k}\frac{1}{t^{2k}}+\frac{2i\pi}{2k+1}\frac{1}{t^{2k+1}}\right)\Bigg|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i}{(2k+1)\pi^{2k}}\left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}}-\frac{2}{(2i)^{2k+1}}+\frac{1}{(2i+1)^{2k+1}}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2k\pi^{2k}}\left[\frac{2}{(2i)^{2k}}-\frac{1}{(2i-1)^{2k}}-\frac{1}{(2i+1)^{2k}}\right]. \qquad (8)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся дзета-функцией Римана [10]

$$\zeta(z)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{z}} \qquad (9)$$

и равенством (9.535.1) [10]

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{2k}}=\zeta(2k)-2^{-2k}\zeta(2k). \qquad (10)$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i}{2k+1}\left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}}+\frac{1}{(2i+1)^{2k+1}}\right]=\frac{1}{2k+1}\sum_{i=1}^{\infty}(2i-1+1)\left[\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}}+\frac{1}{(2i+1)^{2k+1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2k+1}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}}+\frac{2i-1}{(2i+1)^{2k+1}}+\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}}+\frac{1}{(2i+1)^{2k+1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2k+1}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}}+\frac{1}{(2i+1)^{2k}}+\frac{1}{(2i-1)^{2k+1}}-\frac{1}{(2i+1)^{2k+1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2k+1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2i-1)^{2k}}+\frac{1}{(2i+1)^{2k}}\right]+1\right)=\frac{1}{2k+1}\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{2k}}\right)=$$

$$=\frac{2}{2k+1}\left(\zeta(2k)-2^{-2k}\zeta(2k)\right), \qquad (11)$$

$$\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^{2k}}=\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2i-1)^{2k}}-1\right)=\frac{1}{2k}\left(\zeta(2k)-2^{-2k}\zeta(2k)-1\right). \qquad (12)$$

Используя (9), (10) и подставляя (11), (12) в (8), находим

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}dt=\frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}}\left(\zeta(2k)-2^{-2k}\zeta(2k)-\frac{1}{2^{2k}}\zeta(2k)\right)+$$

$$+\frac{1}{2k\pi^{2k}}\left(2\cdot\frac{1}{2^{2k}}\zeta(2k)-\zeta(2k)+2^{-2k}\zeta(2k)-\zeta(2k)+2^{-2k}\zeta(2k)+1\right)=$$

$$=\frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}}\zeta(2k)\left[1-2^{-2k+1}\right]+\frac{2}{2k\pi^{2k}}\zeta(2k)\left[2^{-2k+1}-1\right]+\frac{1}{2k\pi^{2k}}=$$

$$=\frac{2}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\left[1-2^{-2k+1}\right]\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k\pi^{2k}}=$$

$$=\frac{1}{2k\pi^{2k}}-\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\frac{1-2^{-2k+1}}{2k(2k+1)}. \tag{13}$$

В случае $k=0$ находим

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^2}dt=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{(2i-1)\pi}^{2i\pi}\frac{2i\pi-t}{t^2}dt+\sum_{i=1}^{\infty}\int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi}\frac{t-2i\pi}{t^2}dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{2i\pi}{t}-\ln t\right)\Bigg|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\ln t+\frac{2i\pi}{t}\right)\Bigg|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{2i\pi}{2i\pi}+\frac{2i\pi}{(2i-1)\pi}-\ln(2i\pi)+\ln\left[(2i-1)\pi)\right]+\ln\left[(2i+1)\pi)\right]-\ln(2i\pi)+\frac{2i\pi}{(2i+1)\pi}-\frac{2i\pi}{2i\pi}\right)=$$

$$=-2+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2i}{2i-1}+\frac{2i}{2i+1}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\ln\frac{(2i-1)(2i-1)}{2i\cdot 2i}=1+\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(2i)^2}\right)=1+\ln\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2i)^2}\right).$$

Учитывая, что (0.262.2) [10]

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)=\frac{2}{\pi},$$

имеем

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}}{t^2}dt=1+\ln\frac{2}{\pi}. \tag{14}$$

При помощи (13) и (14) с (6) и (7) следует соответственно

$$\mathcal{E}(H^1;P_\rho)_C\cong\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{\delta}\ln\delta+\frac{1}{\delta}\left[1+\ln 2\right]\right\}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\frac{1-2^{-2k+1}}{2k(2k+1)}\frac{1}{\delta^{2k+1}}, \tag{15}$$

$$\mathcal{E}(H^1;B_\rho)_C\cong\frac{1-\rho^2}{\pi}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\frac{1-2^{-2k+1}}{2k+1}\frac{1}{\delta^{2k}}\right\}+$$
$$+\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}-\frac{1-\rho^2}{\pi}\right)\left\{1+\ln 2+\ln\delta+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\frac{1-2^{-2k+1}}{2k+1}\frac{1}{\delta^{2k}}\right\}, \tag{16}$$

где $\zeta(2k)$ – дзета-функция Римана определена по формуле (9).

Чтобы иметь возможность находить значения коэффициентов разложения величин $\mathcal{E}(H^1;P_\rho)_C$ и $\mathcal{E}(H^1;B_\rho)_C$ по степеням $\frac{1}{\delta}$ была разработана прикладная программа.

Разработка исполнена в среде Visual C# 2008. Ниже приведен фрагмент исходного кода основной части программы.

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Text;
namespace VAApp
{
   public static class CMath
   {
      // alpha
      // infiniteSmall - порядок малости
      public static double CalcHarm(double alpha, int infiniteSmall)
      {
         double result = 0;
         switch (infiniteSmall)
         {
            case 1:
               if (alpha == 1)
                  result = (2 / Math.PI);
               else
                  result = (1 / Math.Cos(alpha * Math.PI / 2));
               break;
            case 2:
               if (alpha == 1)
                  result = Math.Log(2)+1;
               else
                  result = 2 / Math.PI * (Math.Log(2 * Math.E / Math.Pow(Math.PI, 2)) -
1 / ((1 - alpha) * Math.Pow(Math.PI, 1 - alpha)));
               break;
            default:
              if (alpha ==1)
                if (infiniteSmall % 2 == 0)
                {
                  result = 2 / Math.PI * common_calc1(infiniteSmall - 2);
                 }
                else
               {
                  result = -2 / Math.PI * common_calc1(infiniteSmall - 2);
               }
              else
                  if (infiniteSmall % 2 == 0)
                  {
                     result = 2 / Math.PI * common_calc(alpha, infiniteSmall);
                  }
                  else
                  {
                     result = -2 / Math.PI * common_calc(alpha,infiniteSmall);
                  }
               break;
         }
```

```
            return result;
        }
        public static double CalcBiHarm(double alpha, int infiniteSmall)
        {
            double result = 0;
            switch (infiniteSmall)
            {
                case 1:
                    if (alpha == 1)
                        result = (4 / Math.PI);
                    else
                        result = (1 - 2 * alpha / Math.PI) / Math.Cos(alpha * Math.PI / 2);
                    break;
                case 2:
                    if (alpha == 1)
                        result = (-2 / Math.PI) * (1 + Math.Log(2 * Math.E / 
Math.Pow(Math.PI, 2))) + 2 / Math.PI * Math.Log((Math.Pow(Math.PI, 2) / (2 * Math.E)));
                    else
                        result = 4 / Math.PI * common_calc(alpha, 0);
                    break;
                default:
                    if (infiniteSmall % 2 == 0)
                    {
                        if ((infiniteSmall / 2) % 2 == 0)
                        {
                            // четные
                            if (alpha == 1)
                            {     double lDiv2 = infiniteSmall / 2 ;
                              // result = (1/Math.PI)*Math.Pow(4*Math.E/infiniteSmall, infini-
teSmall/2)*(1/Math.Sqrt(Math.PI*infiniteSmall)) + (1/Math.PI)*summa2p(infiniteSmall) + 
(2/Math.PI)*addition2(infiniteSmall);
                            result = 2 * Math.Pow(-1, lDiv2) * Math.Pow((2 * Math.E / lDiv2), 
lDiv2) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * lDiv2)) + Math.Log(Math.PI) + 1 + 2 / Math.PI + (1 / 
Math.PI) * summa2p(infiniteSmall) +(1 / Math.PI) * summa2p_sec(infiniteSmall);
                            }
                            else
                            {
                                result = (1 / Math.PI) * summa20p(infiniteSmall, alpha) + (1 / 
Math.PI) * summa21p(infiniteSmall, alpha);
                            }
                        }
                        else // нечетные
                        {
                            if (alpha == 1)
                            {
                                double lDiv2 = infiniteSmall / 2;
                                // result = (1 / Math.PI) * Math.Pow(4 * Math.E / infiniteSmall, 
infiniteSmall / 2) * (1 / Math.Sqrt(Math.PI * infiniteSmall)) + (1 / Math.PI) * sum-
ma2p(infiniteSmall);
```

```
                        result = 2 * Math.Pow(-1, lDiv2) * Math.Pow((2 * Math.E /
lDiv2), lDiv2) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * lDiv2)) + Math.Log(Math.PI) + 1 + 2 / Math.PI
+ (1 / Math.PI) * summa2p(infiniteSmall) + (1 / Math.PI) * summa2p_sec(infiniteSmall);
                    }
                    else
                    {
                        result = (1 / Math.PI) * summa20p(infiniteSmall, alpha) + (1 /
Math.PI) * summa21p(infiniteSmall, alpha);
                    }
                }
            }
            else
            {
                double lDiv2plus1 = infiniteSmall / 2 + 1;
                double comm_expr = Math.Pow(-1, lDiv2plus1) * Math.Pow((2 *
Math.E / lDiv2plus1), lDiv2plus1) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * lDiv2plus1));
                if (alpha == 1)
                {
                    result = 1 / Math.PI * comm_expr;
                }
                else
                {
                    result = 1 / Math.Cos(alpha * Math.PI / 2) * Math.Pow(-1, infini-
teSmall / 2 + 1) * Math.Pow((2 * Math.E / infiniteSmall / 2 + 1), infiniteSmall / 2 + 1) * (1 /
Math.Sqrt(2 * Math.PI * infiniteSmall / 2 + 1));
                }
            }
            break;
        }
        return result;
    }
    private static double zeta(double i)
    {
        return math_fnc.Math.riemann_zeta(i);
    }
    // Функция подсчета для гармонического метода при alpha >= 3
    private static double  common_calc(double alpha, int k)
    {
        double i2Kplus1minusAlpha = 2 * k + 1 - alpha;
         double zeta2K = zeta(2 * k);
         double zeta2Kplus1minusAlpha = zeta(i2Kplus1minusAlpha);
         double expr1 = (2-Math.Pow(2,2-
2*k))*zeta2K/((2*k+1)*Math.Pow(Math.PI,2*k));
         double expr2 = (2-Math.Pow(2,alpha-
2*k))*zeta2Kplus1minusAlpha/((2*k+1-alpha)*Math.Pow(Math.PI,2*k+1-alpha));
        // double expr1 = 2 / (2 * k + 1);
       //  double expr2 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * k);
       //  double expr3 = -1 * Math.Pow(2, -2 * k) * zeta2K - 2 * zeta2K -
Math.Pow(2, 1 - 2 * k) * zeta(2 * k + 1);
       //  double expr4 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * k);
```

```
    //  double expr5 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * i2Kplus1minusAlpha);
    //  double expr6 = Math.Pow(2, 2 - 2 * k) * zeta2Kplus1minusAlpha - 2 - 4 *
zeta2Kplus1minusAlpha - Math.Pow(2, 1 + alpha - 2 * k) * zeta2Kplus1minusAlpha;
     return expr1 * expr2;
   }
   private static double common_calc1 (int k)
   {
      double zeta2K = zeta(2 * k);
      double expr1 = ((2-Math.Pow(2,2-2*k))/(Math.Pow(Math.PI,2*k)))*zeta2K*(-
1)/ (2*k*(2*k+1));
      return expr1;
   }
   private static double summa_common(int n, int k)
   {
      double nDiv2minus2k = (n / 2 - 2 * k);
      return Math.Pow(-1, (n / 2 - k + 1)) * Math.Pow((2 * Math.E / nDiv2minus2k),
nDiv2minus2k) * (1 / Math.Sqrt((n - 4 * k) * Math.PI));
   }
   private static double summa_common20(int n, int k, double alpha)
   {
      return (-1)*summa_common(n, k) * common_calc(alpha, k);
   }
   private static double summa_common2(int k)
   {
      return common_calc1(k);
   }
   private static double summa2np(int n)
   {
      double summ = 0;
      for (int k = 1; k <= (n / 4); k++)
      {
         summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
      }
      return summ;
   }
   private static double summa2p(int n)
   {
      double summ = 0;
      for (int k = 1; k <= (n/4-3/2); k++)
      {
         summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
      }
      return summ;
   }
   private static double summa2p_sec(int n)
   {
      double summ = 0;
      for (int k = 1; k <= (n/4 - 2); k++)
      {
         summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
```

```
        }
       // summm += summa_common2(n / 4);
        return summ;
    }
    private static double addition2(int n)
    {
        double zetanNa2 = zeta(n/2);
        return ((Math.Pow(-1, n / 4 + 1)) / (n / 2 + 1) * Math.Pow(Math.PI, n / 2)) *
(Math.Pow(2, -n / 2) * zetanNa2 + 2 * zetanNa2 - Math.Pow(2, 1 - n / 2) * zetanNa2 + 1) - (4
/ (n * Math.Pow(Math.PI, n / 2))) * (1 + 2 * zetanNa2);
    }
    private static double summa20p(int n, double alpha)
    {
        double summ = 0;
        for (int k = 0; k <= (n / 4 - 2); k++)
        {
            summ += summa_common20(n, k, alpha);
        }
        summ += common_calc(alpha, n / 4);
        return summ;
    }
    private static double summa21p(int n, double alpha)
    {
        double summ = 0;
        for (int k = 0; k <= (n / 4 - 1); k++)
        {
            summ += 2*k * summa_common20(n, k, alpha);
        }
        summ += common_calc(alpha, n / 4);
        return summ;
    }
    private static double summa20np(int n, double alpha)
    {
        double summ = 0;
        for (int k = 0; k <= (n / 4); k++)
        {
            summ += summa_common20(n, k, alpha);
        }
        return summ;
    }
    private static double summa21np(int n, double alpha)
    {
        double summ = 0;
        for (int k = 0; k <= (n / 4); k++)
        {
            summ += 2 * k * summa_common20(n, k, alpha);
        }
        return summ;
    }
}
```

}

Таким образом, мы получили возможность при заданном порядке малости на основании (15) и (16) вычислять константы Колмогорова – Никольського для асимптотических разложений величин $\mathcal{E}(H^1;P_\rho)_C$ и $\mathcal{E}(H^1;B_\rho)_C$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72, № 1 – С. 11–14.
2. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip1$ от их сингулярного интеграла Абеля – Пуассона / Э.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.
3. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – 17, № 2. – С.169–180.
4. Zhyhallo, K.M. Complete Asymptotics of the Deviation of a Class of Differentiable Functions from the Set of Their Harmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №1. – P. 51–63.
5. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
6. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонений функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (Материалы всесоюз. симп.). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.
7. Zhyhallo, K.M. Approximation of Differentiable Periodic Functions by Their Biharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №9. – P. 1462–1470.
8. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля – Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // 5-е советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики ; Алма-Ата, 1976. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
9. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1981. – 340 с.
10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

I.V. Kalchuk, A.O. Zadorozhnyi, R.O. Makovij. **Exact Constants for the Poisson Integral Deviations Values from the Functions Class of Hölder**

When approximating the functions from class H^1 there appear the asymptotic expansions, whose coefficients are not expressed in explicit form. This problem has been solved by the instrumentality of Riemann zeta-function, which gives the possibility to find the exact values of Kolmogorov-Nikolskiy constants. The program that allows us to find the constants of given infinitesmall order has been developed.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 01.06.2012