МАТЭМАТЫКА

УДК 510.522 DOI 10.63874/2218-0303-2025-2-75-81

Александр Евгеньевич Будько
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Alexander Budzko
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: budzko@brsu.by

ТЬЮРИНГОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СО СТАНДАРТНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ ДВИЖЕНИЯ ГОЛОВКИ

Работа посвящена получению нижних оценок сложности вычислений на машинах Тьюринга. Исследуется машина Тьюринга с одной лентой и одной головкой. Исследование проводится с помощью метода, основанного на специальном графическом представлении траектории движения головки. Доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция степени k (k ≥ 2), а траектория движения головки – стандартной, то нижняя оценка временной характеристики работы машины является полиномиальной функцией степени k + 1.
Ключевые слова: *машина Тьюринга, временная и емкостная характеристики работы машины, полиномиальная функция.*

Turing Computations with a Standard Head Trajectory

This paper is devoted to establishing lower bounds on the computational complexity of Turing machines. The study focuses on a single-tape, single-head Turing machine. The analysis is carried out using a method based on a specific graphical representation of the head movement trajectory. It is proven that if the space complexity of the machine is given by a polynomial function of degree k (k ≥ 2), and the head trajectory is standard, then the lower bound of the time complexity of the machine is a polynomial function of degree k + 1.
Key words: *Turing machine, time and capacitive characteristics of the machine, polynomial function.*

Введение

Получение нижних оценок временной характеристики вычислений машинах Тьюринга представляет особый интерес в теории сложности вычислений. Одним из основных методов получения таких оценок является метод следов [1–4], котрый позволяет находить нижние оценки не более чем квадратичной сложности.

В [5–6] рассматривалась существенная сложность вычислений, под единицей измерения которой понималось либо изменение символа на ленте, либо изменение внутреннего состояния машины. Для данного вида сложности вычислений были получены отдельные нижние оценки. В [7] изложен обобщенный метод нитей, с помощью которого получены некоторые оценки временной и существенной сложностей online-вычислений умножения.

В [8] предложена новая техника исследования тьюринговых вычислений, позволяющая получать нижние оценки. Данная техника основана на специальном графическом представлении тьюринговых вычислений. Доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является линейная функция, то нижняя оценка временной характеристики работы машины является квадратичной функцией.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующего утверждения: если емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция степени *k* и траектория движения головки – стандартной, то нижняя оценка временной характеристики работы машины является полиномиальной функцией степени $k + 1$.

Основная часть

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и с внешним алфавитом $\{0,1\}$. За один такт головка такой машины выполняет три действия: записывает в обозреваемую ячейку символ (может записать тот же); сдвигается влево или вправо к соседней ячейке или остается на месте; переходит в новое внутреннее состояние или остается в том же.

Рассмотрим работу машины М над начальной конфигурацией с длиной начальной записи n. Ячейки начальной записи занумеруем слева направо: $R_1, R_2, \dots, R_n$. Будем считать, что слева от R_1 головка не просматривает ни одной ячейки, а ячейки справа от R_n обозначим через $R_{n+1}, R_{n+2}, R_{n+3}, \dots$.

В [8] работа машины определенным образом разбивается на этапы. Каждому этапу будут соответствовать два противоположно направленных отрезка: правый, направленный слева направо, и левый, направленный справа налево. Левый отрезок располагается на строку ниже правого. Каждый отрезок проходит под изображением соответствующих просматриваемых ячеек. Отрезки $(i + 1)$-го $(i \geq 1)$ этапа располагаются под отрезками i-го этапа.

Правый и левый отрезки i-го $(i \geq 1)$ этапа обозначим соответственно через r_i и l_i. Через D_1 обозначим количество ячеек, отличных от $R_1, R_2, \dots, R_n$ и просматриваемых головкой с момента, когда она впервые попадает в ячейку R_{n+1} и до момента, когда она впервые после этого попадает в ячейку R_{n-1}.

Количество ячеек, отличных от $R_1, R_2, \dots, R_n$, $R_{n+1}, \dots, R_{n+D_1}$ и просматриваемых головкой с того момента, когда она впервые попадает в ячейку R_{n+D_1+1} и до момента, когда она впервые после этого попадает в ячейку с номером R_{n+D_1-1}, обозначим через D_2. Значения D_3, D_4 и т. д. определяются аналогично.

Начало отрезка r_1 соответствует ячейке, обозреваемой в начальный момент. Конец отрезка r_1 и начало отрезка l_1 соответствует моменту, когда головка впервые попадает в ячейку R_{n+D_1}, конец отрезка r_2 и начало отрезка l_2 соответствует моменту, когда головка впервые попадает в ячейку $R_{n+D_1+D_2}$, и т. д.

Конец отрезка l_1 и начало отрезка r_2 соответствует моменту, когда головка впервые попадает в самую левую ячейку, просматриваемую в период между тем, как она впервые попала в ячейку R_{n+D_1} и впервые в ячейку $R_{n+D_1+D_2}$.

Конец отрезка l_2 и начало отрезка r_3 соответствует моменту, когда головка впервые попадает в самую левую ячейку, просматриваемую в период между тем, как она впервые попала в ячейку $R_{n+D_1+D_2}$ и впервые в ячейку $R_{n+D_1+D_2+D_3}$, и т. д.

Часть правого отрезка r_i $(i \geq 2)$, проходящую под предшествующим левым отрезком l_{i-1}, обозначим через $\gamma(r_i)$. $\gamma(r_1)$ определим как часть отрезка r_1, проходящую под изображением ячеек начальной записи. Часть отрезка r_i $(i \geq 1)$, расположенную правее части $\gamma(r_i)$, обозначим через $\beta(r_i)$.

Определение 1. *Длиной отрезка или его части будем называть количество ячеек, под изображением которых этот отрезок или его часть проходит.*

Длину отрезка или его части $\alpha \in \{l_i, r_i, \ \gamma(r_i) \ \beta(r_1)\}$ будем обозначать через $|\alpha|$. Очевидно, $|\gamma(r_i)| + |\beta(r_i)| = |r_i|$, $|\beta(r_i)| = D_i$, т. е. $|r_i| = |\gamma(r_i)| + D_i$, где $i \geq 1$. Через δ обозначим количество всех отрезков r_i $(i \geq 1)$.

Замечание 1. *Пусть g(n) – емкостная характеристика работы машины M. Через k_j ($j \ge 1$) обозначим целое значение, удовлетворяющее условию*

$$g(k_j - 1) - (k_j - 1) < \sum_{i=j}^{\delta} D_i \le g(k_j) - k_j \qquad (1)$$

Замечание 2. *Количество значений k_j, удовлетворяющих условию $k_j = i$, обозначим через t_i. Очевидно, $\sum_{i=1}^{n} t_i = \delta$.*

Лемма 1 [8]. *Пусть в последовательности $k_1, k_2, \dots, k_\delta$ имеются члены $i + B_1$, i, $i - B_2$, где $B_1 \ge 1$, $B_2 \ge 1$ и нет членов j, где $i - B_2 < j < i + B_1$, $j \ne i$. Тогда*

$$t_i \ge \frac{1}{D_{max}}(g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + 1), \qquad (2)$$

где $D_{max} = max\{D_j | 1 \le j \le \delta\}$.

Рассмотрим тьюринговые вычисления с емкостной характеристикой, равной

$$g(n) = C_k n^k + C_{k-1} n^{k-1} + C_{k-2} n^{k-2} + \dots + C_1 n + C_0, \qquad (3)$$

где $C_k, C_{k-1}, \dots, C_0$ – некоторые константы, не зависящие от n и $C_k > 0$. Это значит, емкость тьюринговых вычислений выражается полиномом степени k.

Введем обозначение $B_1' = B_1 - 1$.

Лемма 2. *Если емкостной характеристикой тьюринговых вычислений является полиномиальная функция (3), то значение t_i удовлетворяет условию*

$$t_i \ge \frac{1}{D_{max}}\left(\sum_{m=1}^{k} i^{\,k-m} \sum_{j=1}^{m} C_{k+1-j} C_{k-j+1}^{m-j+1} \left(\left(B_1'\right)^{m-j+1} - (-1)^{m-j+1}(B_2)^{m-j+1}\right) - \right.$$
$$\left. - (B_1' + B_2)\right), \qquad (4)$$

где $C_k^j = {k!}/{(k-j)!\,j!}$ – биномиальный коэффициент.

Доказательство.

Применим формулу (2) к функции (3). Для этого определим вначале значение $g(i + B_1 - 1)$ в рассматриваемом случае:

$$g(i + B_1 - 1) = g(i + B_1') = C_k(i + B_1')^k + C_{k-1}(i + B_1')^{k-1} +$$
$$+ C_{k-2}(i + B_1')^{k-2} + \dots + C_1(i + B_1') + C_0.$$

Аналогично получаем

$$g(i - B_2) = C_k(i - B_2)^k + C_{k-1}(i - B_2)^{k-1} + C_{k-2}(i - B_2)^{k-2} + \dots + C_1(i - B_2) + C_0.$$

Тогда

$$g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) = (C_k(i + B_1')^k + C_{k-1}(i + B_1')^{k-1} + C_{k-2}(i + B_1')^{k-2} + \dots +$$
$$+ C_1(i + B_1') + C_0) - (C_k(i - B_2)^k + C_{k-1}(i - B_2)^{k-1} + C_{k-2}(i - B_2)^{k-2} + \dots +$$
$$+ C_1(i - B_2) + C_0) = C_k((i + B_1')^k - (i - B_2)^k) + C_{k-1}((i + B_1')^{k-1} - (i - B_2)^{k-1}) +$$
$$+ C_{k-2}((i + B_1')^{k-2} - (i - B_2)^{k-2}) + \dots + C_1(B_1' + B_2).$$

Рассмотрим разность $(i + B_1')^k - (i - B_2)^k$. Каждое из выражений $(i + B_1')^k$, $(i - B_2)^k$ является полиномом степени k:

$$(i + B_1')^k = i^k + C_k^1 i^{k-1} B_1' + C_k^2 i^{k-2} (B_1')^2 + \dots + (B_1')^k,$$
$$(i - B_2)^k = i^k - C_k^1 i^{k-1} B_2 + C_k^2 i^{k-2} (B_2)^2 + \dots + (-1)^k (B_2)^k.$$

Тогда разность $(i + B_1')^{k} - (i - B_2)^{k}$ является полиномом степени $(k-1)$:

$$C_k^1(B_1' + B_2)\, i^{k-1} + C_k^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-2} + \ldots + ((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k).$$

Аналогично разность $(i + B_1')^{k-1} - (i - B_2)^{k-1}$ является полиномом степени $(k-2)$:

$$C_{k-1}^1(B_1' + B_2)\, i^{k-2} + C_{k-1}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-3} + \ldots + ((B_1')^{k-1} - (-1)^{k-1}(B_2)^{k-1}).$$

Точно также разность $(i + B_1')^{k-2} - (i - B_2)^{k-2}$ является полиномом степени $(k-3)$:

$$C_{k-2}^1(B_1' + B_2)\, i^{k-3} + C_{k-2}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) i^{k-4} + \ldots + ((B_1')^{k-2} - (-1)^{k-2} (B_2)^{k-2}) \text{ и т. д.}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) = C_k((i + B_1')^{k} - (i - B_2)^{k}) + \\
+ C_{k-1}((i + B_1')^{k-1} - (i - B_2)^{k-1} + \\
+ C_{k-2}((i + B_1')^{k-2} - (i - B_2)^{k-2}) + \ldots + C_1(B_1' + B_2) = \\
= C_k(C_k^1(B_1' + B_2)\, i^{k-1} + C_k^2\left(\left(B_1'\right)^2 - (B_2)^2\right) i^{k-2} + \ldots + ((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k)) + \\
+ C_{k-1}(C_{k-1}^1(B_1' + B_2)\, i^{k-2} + C_{k-1}^2\left(\left(B_1'\right)^2 - (B_2)^2\right) i^{k-3} + \ldots + ((B_1')^{k-1} - \\
- (-1)^{k-1}(B_2)^{k-1})) + C_{k-2}(C_{k-2}^1(B_1' + B_2)\, i^{k-3} + C_{k-2}^2\left(\left(B_1'\right)^2 - (B_2)^2\right) i^{k-4} + \ldots + \\
+ ((B_1')^{k-2} - (-1)^{k-2} (B_2)^{k-2})) + \ldots + \\
+ ((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k) + ((B_1')^{k-1} - (-1)^{k-1}(B_2)^{k-1} \ldots + C_1(B_1' + B_2) = \\
= C_k\, C_k^1(B_1' + B_2)\, i^{k-1} + (C_k C_k^2((B_1')^2 - (B_2)^2) + C_{k-1}C_{k-1}^1(B_1' + B_2))\, i^{k-2} + \\
+ (C_k C_k^3((B_1')^3 + (B_2)^3) + C_{k-1}C_{k-1}^2((B_1')^2 - (B_2)^2) + C_{k-2}C_{k-2}^1(B_1' + B_2))\, i^{k-3} + \ldots + \\
+ (C_k\, C_k^j((B_1')^j + (B_2)^j) + C_{k-1}C_{k-1}^{j-1}((B_1')^{j-1} - (B_2)^{j-1}) + \\
+ C_{k-2}C_{k-2}^{j-2}((B_1')^{j-2} - (B_2)^{j-2}) + \ldots + C_{k-j+1}C_{k-j+1}^1(B_1' + B_2))\, i^{k-j} + \ldots + \\
+ (C_k C_k^{k-1}((B_1')^{k-1} + (B_2)^{k-1}) + C_{k-1}C_{k-1}^{k-2}((B_1')^{k-2} - (B_2)^{k-2}) + C_{k-2}C_{k-2}^{k-3}(((B_1')^{k-3} - \\
- (B_2)^{k-3}) + \ldots + C_2C_2^1(B_1' + B_2))i + (C_k((B_1')^k - (-1)^k (B_2)^k) + C_{k-1}((B_1')^{k-1} - \\
- (-1)^{k-1}(B_2)^{k-1}) + C_{k-2}((B_1')^{k-2} - (-1)^{k-2} (B_2)^{k-2}) + \ldots + C_1(B_1' + B_2) = \\
= i^{k-1}\, C_k\, C_k^1(B_1' + B_2) + i^{k-2} \textstyle\sum_{j=0}^{1} C_{k-j}C_{k-j}^{2-j}\left(\left(B_1'\right)^{2-j} - (-1)^j (B_2)^{2-j}\right) + \\
+ i^{k-3} \textstyle\sum_{j=0}^{2} C_{k-j}C_{k-j}^{3-j}\left(\left(B_1'\right)^{3-j} - (-1)^{j+1}(B_2)^{3-j}\right) + \ldots + \\
+ \textstyle\sum_{j=0}^{k} C_j \left(\left(B_1'\right)^j - (-1)^j (B_2)^j\right) = \textstyle\sum_{m=1}^{k-1} i^{k-m} \textstyle\sum_{j=1}^{m} C_{k+1-j}C_{k-j+1}^{m-j+1}\left(\left(B_1'\right)^{m-j+1} - \right. \\
\left. - (-1)^{m-j+1}(B_2)^{m-j+1}\right).
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}
t_i \geq \frac{1}{D_{max}}(g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + 1) = \\
= \frac{1}{D_{max}}(g(i + B_1') - g(i - B_2) - (B_1' + B_2)) = \\
= \frac{1}{D_{max}}\left(\textstyle\sum_{m=1}^{k} i^{k-m} \textstyle\sum_{j=1}^{m} C_{k+1-j}C_{k-j+1}^{m-j+1}\left(\left(B_1'\right)^{m-j+1} - (-1)^{m-j+1}(B_2)^{m-j+1}\right) - \right. \\
\left. - (B_1' + B_2)\right).
\end{gathered}$$

Лемма 2 доказана.

Замечание 3. *Введем следующие обозначения:*

$$A_{k-m} = \frac{1}{D_{max}} \sum_{j=1}^{m} C_{k+1-j} C_{k-j+1}^{m-j+1} \left(\left(B_1' \right)^{m-j+1} - (-1)^{m-j+1} (B_2)^{m-j+1} \right),$$

где $1 \le m \le k - 1$;

$$A_0 = \frac{1}{D_{max}} \sum_{j=1}^{k} C_{k+1-j} \left(\left(B_1' \right)^{k-j+1} - (-1)^{k-j+1} (B_2)^{k-j+1} \right) - \frac{1}{D_{max}} (B_1' + B_2).$$

Тогда формула (4) *примет вид*

$$t_i \ge A_{k-1}\, i^{\,k-1} + A_{k-2}\, i^{\,k-2} + A_{k-3}\, i^{\,k-3} + \ldots + A_1\, i + A_0 \qquad (5)$$

Замечание 4. *Запись $f(n) = \Omega(h(n))$ означает, что функция $h(n)$ является нижней оценкой скорости роста функции $f(n)$, т. е. имеются такие константы c и n_0, что для каждого $n \ge n_0$ выполняется условие $f(n) \ge c\, h(n)$.*

Лемма 3. *Если емкостной характеристикой тьюринговых вычислений является полиномиальная функция (3), то имеет место оценка*

$$\sum_{j=1}^{\delta} k_j = \Omega(n^{k+1}) \qquad (6)$$

Доказательство.

Имеем:

$$\sum_{j=1}^{\delta} k_j = \sum_{i=1}^{n} t_i\, i \ge \sum_{i=1}^{n} (A_{k-1}\, i^{\,k-1} + A_{k-2}\, i^{\,k-2} + A_{k-3}\, i^{\,k-3} + \ldots + A_1\, i + A_0) i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (A_{k-1}\, i^{\,k} + A_{k-2}\, i^{\,k-1} + A_{k-3}\, i^{\,k-2} + \ldots + A_1\, i^{\,2} + A_0 i) =$$

$$= A_{k-1} \sum_{i=1}^{n} i^{\,k} + A_{k-2} \sum_{i=1}^{n} i^{\,k-1} + A_{k-3} \sum_{i=1}^{n} i^{\,k-2} + \ldots + A_0 \sum_{i=1}^{n} i\ .$$

Рассмотрим первое слагаемое $A_{k-1} \sum_{i=1}^{n} i^{\,k}$. Как известно, сумма

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\,k} = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

является полиномом степени $k + 1$ от n. Тогда и весь член $A_{k-1} \sum_{i=1}^{n} i^{\,k}$ является полиномом степени $k + 1$ от n.

Аналогично член $A_{k-2} \sum_{i=1}^{n} i^{\,k-1}$ является полиномом степени k от n, член $A_{k-3} \sum_{i=1}^{n} i^{\,k-2}$ – полиномом степени $k - 1$ от n и т. д. Тогда сумма полиномов от n степени $k + 1, k, \ k - 1, \ldots, 1$ является полиномом степени $k + 1$.

Таким образом, для суммы $\sum_{j=1}^{\delta} k_j$ нижней оценкой является полином от n степени $k + 1$, т. е. $\sum_{j=1}^{\delta} k_j = \Omega(n^{k+1})$. Лемма 3 доказана.

Определение 3. Траектория движения головки, у которой левый конец каждого отрезка $r_{i+1} (i \ge 1)$ находится правее или совпадает с левым концом предшествующего отрезка r_i, называется стандартной траекторией.

Лемма 4 [8]. У стандартной траектории для каждого $i \ge 1$ выполняется условие $|\gamma(r_i)| \ge k_i$.

Теорема 1. *Если емкостной характеристикой работы машины Тьюринга является полиномиальная функция (3), а траектория движения головки – стандартной, то временная характеристика $T(n)$ работы машины удовлетворяет условию*

$$T(n) = \Omega(n^{k+1}) \qquad (7)$$

Доказательство.

Пусть емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция (3), а траектория движения головки – стандартной. За время работы машины, соответствующее каждому правому отрезку r_i $(i \ge 1)$, головка совершает количество тактов не меньшее, чем длина этого отрезка. Такая же ситуация и с левыми отрезками l_i $(i \geq 1)$. Поэтому время работы машины будет не меньше, чем сумма длин всех правых и левых отрезков, т. е. $T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta}(|r_i| + |l_i|)$.

Так как для каждого $i \geq 1$ выполняются условия $|r_i| = |\gamma(r_i)| + D_i$ и $|\gamma(r_i)| \geq k_i$, то $|r_i| \geq k_i + D_i$. Кроме того, выполняется требование $|l_i| \geq D_i + 2$ $(i \geq 1)$. Тогда

$$T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta}(|r_i| + |l_i|) \geq \sum_{i=1}^{\delta}((k_i + D_i) + (D_i + 2)) = \sum_{i=1}^{\delta} k_i + 2\sum_{i=1}^{\delta} D_i + 2\,\delta.$$

Так как для каждого $i \geq 1$ выполняется условие $D_i \geq 1$, то $\sum_{i=1}^{\delta} D_i \geq \delta$. Поэтому

$$T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta} k_i + 4\delta.$$

Поскольку

$$n + \sum_{i=1}^{\delta} D_i = g(n) \text{ и } D_i \leq D_{max} \text{ для каждого } i \geq 1,$$

$$\text{то } n + \delta D_{max} \geq g(n).$$

Тогда $\delta \geq \frac{1}{D_{max}}(g(n) - n)$, или

$$\delta \geq \frac{1}{D_{max}}(C_k n^k + C_{k-1}n^{k-1} + C_{k-2}n^{k-2} + \ldots + C_1 n + C_0 - n) =$$

$$= \frac{1}{D_{max}}(C_k n^k + C_{k-1}n^{k-1} + C_{k-2}n^{k-2} + \ldots + (C_1 - 1)n + C_0).$$

Таким образом, для δ нижней оценкой является полином от n степени k. В лемме 3 было установлено, что нижней оценкой для суммы $\sum_{i=1}^{\delta} k_i$ является полином от n степени $k + 1$. Тогда из условия $T(n) \geq \sum_{i=1}^{\delta} k_i + 4\delta$ следует, что нижней оценкой для $T(n)$ является полином от n степени $k + 1$, т. е. $T(n) = \Omega(n^{k+1})$.

Теорема 1 доказана.

Заключение

Доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является полиномиальная функция степени k, а траектория движения головки – стандартной, то нижняя оценка временной характеристики работы машины является полиномиальной функцией степени $k + 1$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Барздинь, Я. М. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга / Я. М. Барздинь // Проблемы кибернетики. – 1965. – Вып. 15. – С. 245–248.

2. Фрейвалд, Р. В. Сложность распознавания симметрии па машинах Тьюринга со входом / Р. В. Фрейвалд // Алгебра и логика. Семинар. – 1965. – № 1. – С. 47–58.

3. Трахтенброт, Б. А. Сложность алгоритмов и вычислений / Б. А. Трахтенброт. – Новосибирск : НГУ, 1967. – 198 с.

4. Hartmanis, J. Computational complexity of one tape Turing machine computations / J. Hartmanis // Assoc. Comput. Mach. – 1968. – Nr 2. – P. 325–339.

5. Мощенский, В. А. К вопросу о сложности тьюринговых вычислений / В. А. Мощенский // Доклады АН БССР. – 1969. – № 10. – С. 871–878.

6. Мощенский, В. А. Об оценке некоторых функций, характеризующих работу машин Тьюринга / В. А. Мощенский // Кибернетика. – 1971. – № 1. – С. 34–40.

7. Мощенский, В. А. Обобщенный метод нитей и некоторые его применения / В. А. Мощенский. – Мн. : БГУ, 2000. – 69 с.

8. Будько, А. Е. Об одной технике исследования тьюринговых вычислений / А. Е. Будько // Веснік ВДУ. – 2024. – № 1 (122). – С. 14–22.

REFERENCES

1. Barzdin’, Ya. M. Slozhnost’ raspoznavaniya simmetrii na mashinakh T’yuringa / Ya. M. Barzdin’ // Problemy kibernetiki. – 1965. – Vyp. 15. – S. 245–248.

2. Freivald, R. V. Slozhnost’ raspoznavaniya simmetrii pa mashinakh T’yuringa so vkhodom / R. V. Freivald // Algebra i logika. Seminar. – 1965. – № 1. – S. 47–58.

3. Trakhtenbrot, B. A. Slozhnost’ algoritmov i vychislenii / B. A. Trakhtenbrot. – Novosibirsk : NGU, 1967. – 198 s.

4. Hartmanis, J. Computational complexity of one tape Turing machine computations / J. Hartmanis // Assoc. Comput. Mach. – 1968. – Nr 2. – P. 325–339.

5. Moshchenskii, V. A. K voprosu o slozhnosti t’yuringovykh vychislenii / V. A. Moshchenskii // Doklady AN BSSR. – 1969. – № 10. – S. 871–878.

6. Moshchenskii, V. A. Ob otsenke nekotorykh funktsii, kharakterizuyushchikh rabotu mashin T’yuringa / V. A. Moshchenskii // Kibernetika. – 1971. – № 1. – S. 34–40.

7. Moshchenskii, V. A. Obobshchennyi metod nitei i nekotorye ego primeneniya / V. A. Moshchenskii. – Mn. : BGU, 2000. – 69 s.

8. Bud’ko, A. E. Ob odnoi tekhnike issledovaniya t’yuringovykh vychislenii / A. E. Bud’ko // Vesnik VDU. – 2024. – № 1 (122). – S. 14–22.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.10.2025