УДК 512.542 DOI 10.63874/2218-0303-2025-2-93-98

Екатерина Владимировна Зубей
канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Ekaterina Zubei
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА*

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа A называется полунормальной в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 – собственная в G подгруппа для всех собственных подгрупп B_1 из B. Если подгруппа A субнормальная или полунормальная подгруппа группы G, то она называется полусубнормальной подгруппой группы G. В работе установлена частичная разрешимость группы, в которой подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны, и перечислены неабелевы композиционные факторы такой группы.

Ключевые слова: *конечная группа, полусубнормальная подгруппа, группа Шмидта, p-разрешимая группа.*

On the Solvability of a Finite Group with Semisubnormal Schmidt Subgroups

A finite non-nilpotent group all of whose proper subgroups are nilpotent is called a Schmidt group. A subgroup A is called seminormal in G if there exists a subgroup B such that $G = AB$ and AB_1 is a proper subgroup in G for all proper subgroups B_1 of B. If a subgroup A is subnormal or seminormal in G, then it is called a semisubnormal subgroup of G. In this paper, we establish the partial solvability of a group in which the Schmidt subgroups of even order are semisubnormal, and list the non-Abelian composition factors of such group.

Key words: *finite group, semisubnormal subgroup, Schmidt group, p-soluble group.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1].

Статья В. С. Монахова [2] содержит развернутый обзор, посвященный свойствам подгрупп Шмидта, вопросу их существования в конечных группах, а также некоторым приложениям этих результатов в теории классов.

Подгруппы Шмидта, будучи минимальными ненильпотентными группами, входят в состав любой ненильпотентной группы, что подчеркивает их фундаментальную роль в теории групп. Следовательно, свойства содержащихся в группе подгрупп Шмидта во многом определяют ее структуру.

Изучению влияния этих свойств на строение конечных групп посвящены работы таких математиков, как Я. Г. Беркович, В. А. Ведерников, В. Д. Мазуров, В. С. Монахов и С. А. Сыскин.

**Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № госрегистрации 20211467).*

Основная часть

В работе [3] было предложено следующее понятие.

Определение 1. Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 – собственная в G подгруппа для всех собственных подгрупп B_1 из B.

Монография [4] содержит систематическое изложение результатов о строении групп с заданными системами полунормальных подгрупп и различных обобщений этого понятия.

А. А. Трофимук и В. С. Монахов [5] предложили следующее понятие:

Определение 2. Подгруппа A группы G называется *полусубнормальной* в группе G, если она субнормальна или полунормальна в группе G.

В работе [6] рассмотрены конечные группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта и доказаны следующие результаты:

Теорема 1 [6, теорема 2]. *Если все $\{2,3\}$ – подгруппы Шмидта полусубнормальны в группе G, то группа G 3-разрешима.*

Следствие 1 [6, следствие 1]. *Если все $\{2,3\}$ – подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$ – подгруппы Шмидта полусубнормальны в группе G, то группа G разрешима.*

В настоящей работе продолжены исследования групп, у которых подгруппы Шмидта полусубнормальны. Доказана следующая теорема.

Теорема А.

(1) *Если в группе G все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны в G, то G разрешима.*

(2) *Если в группе G все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,\ 4)$. В частности, группа G $\{2,3,5\}'$-разрешима.*

Используемые обозначения и результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [7; 8].

Пусть p – простое число. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс которой совпадает с порядком силовской p-подгруппы, называется p-нильпотентной.

Если порядок подгруппы X делится на простое число p, то говорят, что X – pd-подгруппа. Обозначим через $H^G = \langle H^x \mid x \in G \rangle$ наименьшую нормальную в G подгруппу, содержащую подгруппу H. Центр и коммутант группы G обозначаются через $Z(G)$ и G' соответственно. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n; диэдральная, циклическая и элементарная абелева группы порядков k, m и p^t обозначаются через D_k, Z_m, и E_{p^t} соответственно; $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначим через π'.

Итак, $\pi \subseteq P$ и $\pi' = P \setminus \pi$. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве N следующим образом: $\pi(m)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число m, а $\pi(G) = \pi(|G|)$.

Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π-числом. Группа G называется: π-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется примарной, а при $|\pi(G)| = 2$ – бипримарной.

Субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G_{i+1} для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Этот ряд называется композиционным, если G_i является максимальной нормальной подгруппой группы G_{i+1} для каждого i; фактор-группы G_{i+1} / G_i называются композиционными факторами этого ряда, а числа $|G_{i+1} / G_i|$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, – индексами композиционного ряда.

Группа называется π-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами.

Если в цепочке подгрупп (1) подгруппа G_i нормальна в группе G для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$, то цепочка (1) называется нормальным рядом группы G. Фактор-группы G_{i+1} / G_i называются факторами этого ряда.

Группа G называется сверхразрешимой, если существует нормальный ряд такой, что подрядки факторов этого ряда простые числа.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

Лемма 1 [1]. *Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $S = [P]Q$, *где P – нормальная силовская p-подгруппа, Q – ненормальная силовская q-подгруппа, p и q – различные простые числа;*

(2) $Q = \langle y \rangle$ *– циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P / P'| = p^m$, *где m – показатель числа p по модулю q.*

Условимся называть $S_{<p,q>}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической силовской q-подгруппой Q. Минимальным добавлением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B, что $G = AB$ и $G \neq AB_1$ для всех собственных подгрупп B_1 из B.

Лемма 2 [9, лемма 2 (3)]. *Если H – полунормальная подгруппа группы G, а B ее супердобавление, то H перестановочна с подгруппой L^g для всех $L \leq B$ и $g \in G$. В частности, подгруппа B^g будет супердобавлением к подгруппе H для каждого $g \in G$.*

Лемма 3 [10, лемма 1]. *$S_{<p,q>}$-группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда $|P| = p$ и q делит $p-1$.*

Лемма 4 [8, IV.5.4]. *Каждая не p-нильпотентная группа содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$.*

Лемма 5 [11, 3.1.1]. *Каждая не 2-замкнутая группа содержит $S_{<q,2>}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$.*

Проведенные с помощью системы компьютерной алгебры GAP вычисления подтверждают справедливость следующего утверждения.

Лемма 6. *В группе $G = SL(2,4)$ подгруппы Шмидта исчерпываются с точностью до сопряженности следующими подгруппами: $S_1 = A_4$, $S_2 = [Z_5]Z_2$ и $S_3 = [Z_3]Z_2$.*

Лемма 7 [8, VI.4.10]. *Пусть A и B – подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

Лемма 8 [6, лемма 7].

(1) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и $H \leq X \leq G$, то H полусубнормальна в X.*

(2) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G, $N \lhd G$, то HN – полусубнормальна в G и HN/N полусубнормальна в G/N.*

(3) *Если H – полусубнормальная подгруппа группы G и Y непустое множество элементов в G, то подгруппа*

$$H^Y = \left\langle H^y \mid y \in Y \right\rangle$$

полусубнормальна в G. В частности H^g, полусубнормальна в G для любых $g \in G$.

Лемма 9 [6, лемма 8]. *Пусть в группе G все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны. Тогда:*

(1) *если H – подгруппа группы G, то все $S_{<p,q>}$-подгруппы из H полусубнормальны в H;*

(2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны в G/N;*

(3) *если $N \leq H \leq G$, $N \lhd G$, то в H/N все $S_{<p,q>}$-подгруппы полусубнормальны.*

Лемма 10. *Если в простой группе G существует полусубнормальная подгруппа Шмидта A, то $G \simeq SL(2,4)$, $A \simeq A_4$, $B \simeq Z_5$.*

Доказательство.

Так как G – простая группа, то в ней не существует отличных от нее нормальных подгрупп. Следовательно, подгруппа A может быть только полунормальной. Пусть B – супердобавление к A в G, а P – силовская p-подгруппа из B такая, что P не содержится в A. Подгруппа P существует, иначе $G = AB = A$ – противоречие с тем, что $A \neq G$.

Предположим, что $G \neq AP$. По лемме 2 подгруппа A перестановочна с P^g для каждого $g \in G$, поэтому $A^G \neq G$ или $P^G \neq G$ по лемме 7. Но это противоречит простоте группы G. Поэтому допущение $G \neq AP$ неверно и $G = AP$.

В лемме [12, терема 3] перечислены неразрешимые группы $G = AB$, где A – группа Шмидта, а B – нильпотентная группа. При такой факторизации $G/S(G)$ изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,7), PGL(2,7), SL(2,2^n)$, $2^n - 1$ – простое число, $P\Gamma L(2,2^n)$ для некоторое простого n. Так как в нашем случае группа G простая и $|\pi(G)|=3$, то для группы $SL(2,2^n)$ возможны только ситуации, когда $n\in\{2,3\}$.

Таким образом,

$$G\in\{PSL(2,7), PSL(2,5)=SL(2,4)=A_5, SL(2,8)\}.$$

Факторизации этих групп известны. Среди указанных подгрупп только в группе $SL(2,\ 4)$ существует полунормальная подгруппа Шмидта $A\simeq A_4$, которая имеет супердобавление $B\simeq Z_5$.

Доказательство теоремы А

(1) Предположим, что группа G неразрешима, и пусть H/K – неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H/K – простая группа четного порядка, она не 2-замкнута. По лемме 5 в H/K существует $S_{<p,2>}$-подгруппа A/K для некоторого $p\in\pi(G)$. По лемме 3 каждая $S_{<p,2>}$-подгруппа из G сверхразрешима и по условию полусубнормальна. По лемме 9 (3) подгруппа A/K полусубнормальна в H/K, и применима лемма 10. Но там исключается возможность, при которой A/K является $S_{<p,2>}$-подгруппой. Поэтому предположение, что G – неразрешимая группа неверно и G – разрешима.

(2) Предположим, что группа G неразрешима, и пусть H/K – неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H/K – простая группа четного порядка, поэтому не 2-нильпотентна. Согласно лемме 4, в H/K существует $S_{<2,q>}$-подгруппа A/K для некоторого $q\in\pi(G)$. По лемме 3 каждая $S_{<2,q>}$-подгруппа несверхразрешима. По лемме 9 (3) и условию подгруппа A/K полусубнормальна в H/K, и применима лемма 10. Тогда $H/K\simeq SL(2,\ 4)$ и $A/K\simeq A_4$. Среди перечисленных в лемме 6 подгрупп Шмидта группы $SL(2,\ 4)$ подгруппы $[Z_5]Z_2$ и $[Z_3]Z_2$ сверхразрешимы, подгруппа A_4 несверхразрешима и полунормальна. Поэтому группа $SL(2,\ 4)$ может быть композиционным фактором группы G.

Таким образом, неабелевы композиционные факторы группы G исчерпываются только группой $SL(2,\ 4)$, которая имеет порядок $2^2\cdot 3\cdot 5$. Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G будут $\{2,3,5\}$-группами и G – $\{2,3,5\}'$-разрешима. Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в настоящей статье доказана разрешимость и частичная разрешимость конечной группы, в которой некоторые из подгрупп Шмидта полусубнормальны. В частности, доказана разрешимость конечной группы, в которой все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полусубнормальны.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Математический сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Алгебра і теорія чисел : Пр. Укр. мат. конгреса – 2001. / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2002. – С. 81–90.

3. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.

4. Трофимук, А. А. Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители / А. А. Трофимук. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2021. – 262 с.

5. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23. – P. 893–911.

6. Knyagina, V. N. Finite groups with semisubnormal Schmidt subgroups / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // Algebra Discrete Math. – 2020. – Vol. 29, nr 1. – P. 66–73.

7. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Мн. : Выш. шк., 2006. – 207 с.

8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.

9. Княгина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

10. Монахов, В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В. С. Монахов // Математические заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.

11. Монахов, В. С. О подгруппах Шмидта конечных групп Шмидта / В. С. Монахов // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 13. – С. 153–171.

12. Монахов, В. С. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта / В. С. Монахов // Доклады АН БССР. – 1974. – Т. 18, № 10. – С. 871–874.

REFERENCES

1. Shmidt, O. Yu. Gruppy, vse podgruppy kotorykh spetsial’nye / O. Yu. Shmidt // Matematicheskii sbornik. – 1924. – T. 31. – S. 366–372.

2. Monakhov, V. S. Podgruppy Shmidta, ikh sushchestvovanie i nekotorye prilozheniya / V. S. Monakhov // Algebra i teoriya chysel : Pr. Ukr. mat. kongresa – 2001. / In-t matematyky NAN Ukrainy. – Kyiv, 2002. – S. 81–90.

3. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8, 1. – P. 7–9.

4. Trofimuk, A. A. Konechnye faktorizuemye gruppy s ogranicheniyami na somnozhiteli / A. A. Trofimuk. – Mn. : Izd. tsentr BGU, 2021. – 262 s.

5. Monakhov, V. S. On the supersolubility of a group with semisubnormal factors / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23. – P. 893–911.

6. Knyagina, V. N. Finite groups with semisubnormal Schmidt subgroups / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // Algebra Discrete Math. – 2020. – Vol. 29, nr 1. – P. 66–73.

7. Monakhov, V. S. Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Mn. : Vysh. shk., 2006. – 207 s.

8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 796 p.

9. Knyagina, V. N. Konechnye gruppy s polunormal’nymi podgruppami Shmidta / V. N. Knyagina, V. S. Monakhov // Algebra i logika. – 2007. – T. 46, № 4. – S. 448–458.

10. Monakhov, V. S. O konechnykh gruppakh s zadannym naborom podgrupp Shmidta / V. S. Monakhov // Matematicheskie zametki. – 1995. – T. 58, № 5. – S. 717–722.

11. Monakhov, V. S. O podgruppakh Shmidta konechnykh grupp Shmidta / V. S. Monakhov // Voprosy algebry. – 1998. – Vyp. 13. – S. 153–171.

12. Monakhov, V. S. O proizvedenii 2-razlozhimoi gruppy i gruppy Shmidta / V. S. Monakhov // Doklady AN BSSR. – 1974. – T. 18, № 10. – S. 871–874.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.10.2025