

УДК 517.988

Ю.М. Вувуніян, І.В. Трыфонова

КОМПОНЕНТЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА КОМПОЗИЦИИ ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА С СОСТАВНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Эволюционный оператор второй кратности с обобщенными импульсными характеристиками находит широкое применение при решении задач нелинейных многомерных эволюционных систем с двумя входными и двумя выходными сигналами. В работе рассматривается аналитическое задание компонент высшего порядка композиции эволюционного оператора второй кратности с составным оператором слева и справа. Главной целью исследования является получение зависимости между ядрами оператора композиции и обобщенными ядрами композуемых операторов. Доказаны теорема для четвертого компонента композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором и формула для задания любой компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором слева. Получены формулы, задающие компоненты композиции оператора второй кратности с составным эволюционным оператором справа.

Введение

Будем рассматривать нелинейные эволюционные операторы второй кратности. Напомним [1], что нелинейный эволюционный оператор второй кратности имеет вид:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{n_1+n_2>0} S_{n_1+n_2} (a_{n_1, n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})),$$

где a_{n_1, n_2} – двухкомпонентная обобщенная вектор-функция с носителем на $[0; +\infty)^{n_1+n_2}$, x_1, x_2 – финитные слева бесконечно дифференцируемые функции на числовой оси, $S_{n_1+n_2}$ – оператор сокращения переменных порядка n_1+n_2 , $*$ – свертка, \otimes – операция тензорного произведения.

Отметим, что нелинейный эволюционный оператор второй кратности может быть записан в следующем виде:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 1} S_n \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1, n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2}).$$

Оператор A_n , определяемый равенством

$$A_n x^n = S_n \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1, n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2}) \quad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right),$$

называется, ***n-ым компонентом*** оператора A .

Эволюционный оператор A второй кратности называется ***составным*** [1; 2], если он имеет вид:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} x_1 \\ A^{(2)} x_2 \end{pmatrix},$$

где $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ – эволюционные операторы первой кратности:

$$A^{(1)} x_1 = \sum_{n \geq 1} S_n (a_n^{(1)} * x_1^{\otimes n}), \quad A^{(2)} x_2 = \sum_{n \geq 1} S_n (a_n^{(2)} * x_2^{\otimes n}).$$

Одной из важнейших задач теории эволюционных операторов является изучение их композиции. В данной статье мы рассмотрим оператор композиции $C = B \circ A$ двух

эволюционных операторов второй кратности в случаях, когда один из композируемых операторов является составным.

Композиция эволюционного оператора второй кратности с составным оператором

Рассмотрим сначала композицию $C = B \circ A$ в случае, когда B – произвольный эволюционный оператор второго порядка и A – составной оператор.

Первый компонент эволюционного оператора B определяется равенством

$$B_1 x = b_{1,0} * x_1 + b_{0,1} * x_2 = \begin{pmatrix} b_{1,0}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * x_1 + \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} \end{pmatrix} * x_2 = \begin{pmatrix} b_{1,0}^{(1)} & b_{0,1}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} & b_{0,1}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а первый компонент составного оператора A – равенством

$$A_1 x = \begin{pmatrix} A^{(1)} x_1 \\ A^{(2)} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда первый компонент оператора композиции C определяется равенством

$$C_1 x = B_1(A_1 x) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор сокращения переменных в дальнейших формулах будет опускаться, учитывая, что конечный результат является вектор-функция одной переменной t .

В процессе вычисления мы будем использовать лемму [3, с. 151, Лемма 2] о тензорном произведении свертки финитных слева обобщенных функций.

$$C_2 x^2 = B_1(A_2 x^2) + B_2(A_1 x)^2 = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} + \\ + \left(\begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_2) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right).$$

Опишем теперь третью компоненту и её слагаемые.

$$C_3 x^3 = B_1(A_3 x) + B_2(A_2 x, A_1 x) + B_2(A_1 x, A_2 x) + B_3(A_1 x)^3.$$

Первое слагаемое задается так:

$$B_1(A_3 x^3) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) + b_{1,0}^{(1)} * a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \\ b_{0,1}^{(2)} * a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) + b_{1,0}^{(2)} * a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие слагаемые:

$$\begin{aligned}
B_2(A_2x^2, A_1x) &= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \otimes a_1^{(1)} * x_1 & a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \otimes a_1^{(1)} * x_1 & a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \otimes a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_2^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + a_2^{(2)} \otimes a_1^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}. \\
B_2(A_1x, A_2x) &= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \otimes x_1 \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1) \\ a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_2^{(2)} * (x_2 \otimes x_2)) + (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_2^{(1)} * (x_1 \otimes x_1)) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_{0,1}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Определим четвертое слагаемое третьего компонента:

$$\begin{aligned}
B_3(A_1x)^3 &= B_3(A_1x, A_1x, A_1x) = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \right]^{\otimes 3} = \\
&= \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} & b_{0,1,2}^{(1)} & b_{0,2,1}^{(1)} & b_{1,1,1}^{(1)} & b_{0,3,0}^{(1)} & b_{1,2,0}^{(1)} & b_{2,1,0}^{(1)} & b_{3,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,3}^{(2)} & b_{0,1,2}^{(2)} & b_{0,2,1}^{(2)} & b_{1,1,1}^{(2)} & b_{0,3,0}^{(2)} & b_{1,2,0}^{(2)} & b_{2,1,0}^{(2)} & b_{3,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} *
\end{aligned}$$

$$* \begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \otimes a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix}.$$

Определим следующую четвертую компоненту оператора композиции.

Теорема. Четвертая компонента композиции эволюционного оператора $C = B \circ A$ второй кратности с составным эволюционным оператором имеет вид:

$$C_4 x^4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8,$$

$$\text{где } u_1 = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * (a_4^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + b_{1,0}^{(1)} * (a_4^{(2)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ b_{0,1}^{(2)} * (a_4^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) + b_{1,0}^{(2)} * (a_4^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(1)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) + (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(1)}) * (x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ (a_1^{(2)} \otimes a_3^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{0,2}^{(1)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{0,2}^{(1)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \\ a_{2,0}^{(2)} \otimes a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_3^{(1)} \otimes (a_1^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ (a_3^{(1)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2) + (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_1) \\ (a_3^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix},$$

$$u_5 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_6 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)} \otimes a_1^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)} \otimes a_1^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_7 = \begin{pmatrix} b_{0,0,3}^{(1)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(1)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \\ b_{0,0,3}^{(2)} * ((a_1^{(1)} \otimes a_1^{(1)} \otimes a_2^{(1)}) * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + \dots + b_{3,0,0}^{(2)} * ((a_1^{(2)} \otimes a_1^{(2)} \otimes a_2^{(2)}) * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix},$$

$$u_8 = \begin{pmatrix} b_{0,0,0,4}^{(1)} & b_{0,0,1,3}^{(1)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,0,4}^{(2)} & b_{0,0,1,3}^{(2)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \\ (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \\ \dots \\ (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Зафиксируем произвольный x и обозначим $y_n = A_n x^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Рассмотрим оператор $C = B \circ A$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Cx = B(Ax) &= B_1(Ax) + B_2(Ax)^2 + B_3(Ax)^3 + \dots = B_1 y_1 + B_1 y_2 + B_1 y_3 + \dots + \\ &+ B_2(y_1, y_1) + B_2(y_1, y_2) + \dots + B_2(y_1, y_n) + B_2(y_2, y_1) + B_2(y_2, y_2) + \dots + B_2(y_2, y_n) + \\ &+ \dots + B_4(y_1, y_1, y_1, y_n) + B_4(y_1, y_1, y_2, y_1) + \dots + B_4(y_1, y_1, y_n, y_n) + \dots + B_4(y_4, y_1, y_1, y_1) + \\ &+ B_4(y_4, y_1, y_1, y_n) + \dots + B_4(y_4, y_n, y_n, y_n) + \dots + B_4(y_n, y_n, y_n, y_n) + \dots, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} C_4 x^4 &= B_1 y_4 + B_2(y_1, y_3) + B_2(y_2, y_2) + B_2(y_3, y_1) + \\ &+ B_3(y_2, y_1, y_1) + B_3(y_1, y_2, y_1) + B_3(y_1, y_1, y_2) + B_4(y_1, y_1, y_1, y_1), \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} C_4 x^4 &= B_1(A_4 x^4) + B_2(A_1 x, A_3 x^3) + B_2(A_2 x^2)^2 + B_2(A_3 x^3, A_1 x) + \\ &+ B_3(A_2 x^2, A_1 x, A_1 x) + B_3(A_1 x, A_2 x^2, A_1 x) + B_3(A_1 x, A_1 x, A_2 x^2) + B_4(A_1 x)^4 = \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8. \end{aligned}$$

Найдем каждое слагаемое четвертой компоненты:

$$\begin{aligned} u_1 &= B_1(A_4 x^4) = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_4^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_4^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\otimes 4} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_4^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_4^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * (a_4^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) + b_{1,0}^{(1)} * (a_4^{(2)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1)) \\ b_{0,1}^{(2)} * (a_4^{(1)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) + b_{1,0}^{(2)} * (a_4^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2 \otimes x_2)) \end{pmatrix}. \\ u_2 &= B_2(A_1 x, A_3 x) = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a_1^{(1)} * x_1 \\ a_1^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_3^{(1)} * (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \\ a_3^{(2)} * (x_2 \otimes x_2 \otimes x_2) \end{pmatrix} \right) = \end{aligned}$$

$$u_8 = B_4(A_1 x)^4 = \begin{pmatrix} b_{0,0,0,4}^{(1)} & b_{0,0,1,3}^{(1)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(1)} \\ b_{0,0,0,4}^{(2)} & b_{0,0,1,3}^{(2)} & \dots & b_{4,0,0,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \\ (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(1)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \\ \dots \\ (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \otimes (a_1^{(2)} * x_1) \otimes (a_1^{(2)} * x_2) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы вычислили все слагаемые четвертой компоненты $C_4 x^4$ оператора композиции. Теорема доказана.

Композиция составного оператора с эволюционным оператором второй кратности

Рассмотрим теперь композицию $C = B \circ A$ в случае, когда B – составной оператор и A – произвольный эволюционный оператор второго порядка. Структурная схема такой композиции представлена на рисунке 1.

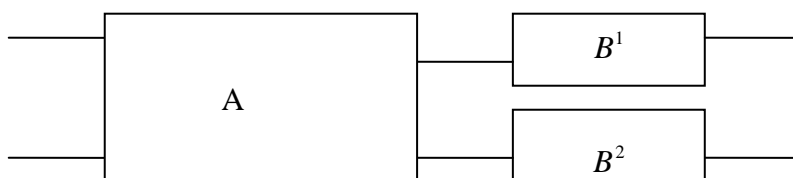


Рисунок 1 – Структурная схема композиции составного оператора с оператором второй кратности

Будем рассматривать элементы компонент в векторном виде:

$$z_1 = B^1(y_1) = \sum_{k=0}^n S_k(b_k^1 * y_1^{\otimes k});$$

$$z_2 = B^2(y_2) = \sum_{j=0}^n S_j(b_j^2 * y_2^{\otimes j});$$

$$B(y) = \begin{pmatrix} B^1(y_1) \\ B^2(y_2) \end{pmatrix};$$

$$C = (B \circ A)x;$$

$$Cx = C_1 x + C_2 x + C_3 x + \dots;$$

$$Ax = \sum_{n=n_1+n_2>0}^n S_{n_1+n_2}(a_{n_1, n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})).$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_2=0 \\ j=0}} S_i \begin{pmatrix} a_i^{(1)} * x_1^{\otimes i} \\ a_i^{(2)} * x_1^{\otimes i} \end{pmatrix} + \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_1=0 \\ i=0}} S_j \begin{pmatrix} a_j^{(1)} * x_2^{\otimes j} \\ a_j^{(2)} * x_2^{\otimes j} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} S_n \begin{pmatrix} a_{i, n-1}^{(1)} * (x_1^{\otimes i} \otimes x_2^{\otimes (n-i)}) \\ a_{i, n-1}^{(2)} * (x_1^{\otimes i} \otimes x_2^{\otimes (n-1)}) \end{pmatrix}.$$

Определим первые компоненты композиции.

Выделим первую и вторую однородные операторные компоненты оператора второй кратности:

$$A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_1 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_2 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,0}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ a_{1,0}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1^{\otimes(2,0)} \\ a_{0,2}^{(2)} * x_1^{\otimes(2,0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_2^{\otimes(0,2)} \\ a_{0,2}^{(2)} * x_2^{\otimes(0,2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} * x_1^{\otimes(1,1)} \\ a_{1,1}^{(2)} * x_2^{\otimes(1,1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{\otimes 2} \\ x_1 \otimes x_2 \\ x_2^{\otimes 2} \end{pmatrix},$$

где $x^{(2,0)}(t_1, t_2) = x_1(t_1) \cdot x_1(t_2)$, $x^{(0,2)}(t_1, t_2) = x_2(t_1) \cdot x_2(t_2)$, $x^{(1,1)}(t_1, t_2) = x_1(t_1) \cdot x_2(t_2)$,

$$S_2 \begin{pmatrix} f^{(1)}(t_1, t_2) \\ f^{(2)}(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(1)}(t, t) \\ f^{(2)}(t, t) \end{pmatrix}, S_2(u * v)(t) = \langle u(s_1, s_2), v(t - s_1, t - s_2) \rangle.$$

$$C = (B \circ A)x;$$

$$Cx = C_1x + C_2x + C_3x + \dots$$

$$Cx = \begin{pmatrix} B_1^1(A_1(x)) + B_1^1(A_2(x)) + \dots + B_1^1(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + B_2^1(A_1(x)) + B_2^1(A_2(x)) + \dots + B_2^1(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + \\ B_1^2(A_1(x)) + B_1^2(A_2(x)) + B_1^2(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + B_2^2(A_1(x)) + B_2^2(A_2(x)) + \dots + B_2^2(A_{n_1 n_2}(x)) + \dots + \end{pmatrix}$$

Тогда найдем первую компоненту композиции

$$C_1x = B_1(A_1x); C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_{0,1}^{(1)} & b_{0,1}^{(1)} * a_{1,0}^{(1)} \\ b_{1,0}^{(2)} * a_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} * a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_1x = \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} * a_{0,1}^{(1)} * x_1 + b_{0,1}^{(1)} * a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ b_{1,0}^{(2)} * a_{0,1}^{(2)} * x_1 + b_{1,0}^{(2)} * a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2.$$

Итак, первую компоненту можно записать в виде:

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^1x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) + b_{0,1}^{(1)}(s_2) a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2)) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t - s_1 - s_2) + b_{1,0}^{(2)}(s_2) a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t - s_1 - s_2)) ds_1 ds_2.$$

Тогда первая компонента оператора композиции описывается аналитически следующими зависимостями:

$$C_1^1 x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) (a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2;$$

$$C_1^2 x = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) (a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2.$$

Рассмотрим вторую компоненту:

$$C_2 x = B_2(A_1 x, A_1 x) + A_2(B_1 x, B_1 x);$$

$$C_2 x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & b_{1,1}^{(1)} & b_{2,0}^{(1)} \\ b_{0,2}^{(2)} & b_{1,1}^{(2)} & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & b_{1,0}^{(1)} \\ b_{0,1}^{(2)} & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_2 x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} & a_{1,0}^{(1)} \\ a_{0,1}^{(2)} & a_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2 \\ a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} & a_{1,1}^{(1)} & a_{2,0}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(2)} & a_{1,1}^{(2)} & a_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$C_2 x = \begin{pmatrix} b_{0,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{2,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(1)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2) \\ a_{0,1}^{(2)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{0,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & b_{1,0}^{(2)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(1)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(1)} * x_2 \otimes x_2 \\ a_{0,2}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(2)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать строки матриц как элементы компоненты. Тогда справедливы следующие формулы:

$$C_2^1 x = b_{0,2}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(1)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2)) +$$

$$+ b_{0,1}^{(1)} * b_{0,1}^{(1)} * (a_{0,2}^{(1)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(1)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(1)} * x_2 \otimes x_2);$$

$$C_2^1 x = \int_0^{+\infty} b_{0,2}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(1)}(s_2) ((a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,2}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(1)}(s_2) ((a_{0,1}^{(2)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(2)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1) a_{0,2}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) x_1(t_2-s_1-s_2) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1) a_{1,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) x_2(t_2-s_1-s_2) ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{0,1}^{(1)}(s_1) a_{2,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2) x_2(t_2-s_1-s_2) ds_1 ds_2;$$

$$C_2^2 x = b_{2,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * (a_{0,1}^{(1)} * x_1 + a_{1,0}^{(1)} * x_2) + a_{1,0}^{(2)} * (a_{0,1}^{(2)} * x_1 + a_{1,0}^{(2)} * x_2)) +$$

$$+ b_{1,0}^{(2)} * b_{1,0}^{(2)} * (a_{0,2}^{(2)} * x_1 \otimes x_1 + a_{1,1}^{(2)} * x_1 \otimes x_2 + a_{2,0}^{(2)} * x_2 \otimes x_2);$$

$$C_2^2 x = \int_0^{+\infty} b_{2,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{0,1}^{(2)}(s_2) ((a_{0,1}^{(1)}(s_1) x_1(t-s_1-s_2) + a_{1,0}^{(1)}(s_1) x_2(t-s_1-s_2)) ds_1 ds_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{+\infty} b_{2,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} a_{1,0}^{(2)}(s_2) ((a_{0,1}^{(2)}(s_1)x_1(t_1 - s_1 - s_2) + a_{1,0}^{(2)}(s_1)x_2(t_1 - s_1 - s_2)) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1) a_{0,2}^{(2)}(s_1) x_1(t_1 - s_1 - s_2) x_1(t_2 - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1) a_{1,1}^{(2)}(s_1) x_1(t_1 - s_1 - s_2) x_2(t_1 - s_1 - s_2) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_2) \int_0^{+\infty} b_{1,0}^{(2)}(s_1) a_{2,0}^{(2)}(s_1) x_2(t_1 - s_1 - s_2) x_2(t_2 - s_1 - s_2) ds_1 ds_2.
\end{aligned}$$

Выше изложенные рассуждения позволяют описать структуру компонент композиции составного оператора с эволюционным оператором второй кратности.

Заключение

В статье рассмотрена задача определения обобщенных импульсных характеристик композиции двух эволюционных операторов второй кратности, один из которых является составным оператором. Полученные результаты найдут применение в теории нелинейных эволюционных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вувуникян, Ю.М. Составные эволюционные операторы второго порядка кратности / Ю.М. Вувуникян, И.В. Трифонова // Известия Смоленского гос. ун-та. – 2012. – № 2 (18). – С. 429–440.
2. Трифонова, И.В. Композиция оператора второй кратности с составным эволюционным оператором / И.В. Трифонова // Веснік Гродзен. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2011. – № 3 (118). – С. 19–30
3. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками : монография / Ю.М. Вувуникян. – Гродно : ГрГУ, 2007. – 224 с.

Y.M. Vuvunikjan, I.V. Trifonova. Components of High Orders of Composition of the Evolution Operator and the Compound Operator

This article describes the nonlinear evolution operator of second multiplicity with two-component generalized vector functions with support on $[0; +\infty)^2$. The theorem for the fourth components of a composition the evolutionary operator with the compound operator is proved. The evolutionary operator of second multiplicity is used while studying the nonlinear multi-size evolution systems with two input and output signals. The received results will find application in the theory of nonlinear evolutionary systems.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.11.2012