

УДК 539.12

В.М. Редьков, Е.М. Овсюк

ТРАНЗИТИВНОСТЬ В ТЕОРИИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ФОРМАЛИЗМ СТОКСА–МЮЛЛЕРА В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

Выполнен теоретико-групповой анализ произвольных поляризационных оптических элементов с матрицами Мюллера лоренцевского типа. Одно поляризационное измерение определяет параметры соответствующей матрицы Мюллера с точностью до трех независимых произвольных величин. Каждому поляризационному измерению ставится в соответствие определенное квадратичное уравнение связи на 4 неизвестных параметра. Аналитические выражения для этих 4 величин даются в наиболее простой форме, если использовать результаты 6 независимых поляризационных измерений; соответствующие формулы приведены в явном виде.

Введение

Известно, что 4 параметра Стокса описывают состояние поляризации света. Они были введены Стоксом в 1852 [1]. Метод Мюллера заключается в использовании матричного формализма для описания действия поляризационных элементов на поляризацию света, этот метод был предложен в 1943 [2]; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться в рамках формализма Джонса, предложенного в 1941 [3–6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, и линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. Отметим специально, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим и для описания частично поляризованного света.

Уже давно известно, что при описании (полностью или частично) поляризованного света существенную роль может играть группа преобразований $SO(3,1)$, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [7–12], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света [13–15].

В настоящей работе развита общая теоретико-групповая методика восстановления матрицы Мюллера произвольного оптического элемента по результатам нескольких независимых поляризационных экспериментов.

Проблема транзитивности в подходе Стокса–Мюллера

Математически проблема транзитивности описывается простым уравнением

$$L_b^a(k, k^*) S_a = +S'_b, \quad L - ? \quad (1)$$

Ввиду существования понятия малой группы Лоренца [10] для начального и конечного 4-векторов Стокса [16], S и S' уравнение транзитивности можно представить иначе:

$$L(L_{\text{little}} S) = L'_{\text{little}} S' \quad \Rightarrow \quad [(L'_{\text{little}})^{-1} L L_{\text{little}}] S = S'. \quad (2)$$

Это означает, что матрица транзитивности L принципиально не может быть найдена однозначным образом.

Для анализа этой ситуации применим факторизованное представление для лоренцевских матриц (используем обозначения из [12]) $L = AA^*$, уравнение (1) дает

$$A^* S = A^{-1} S', \quad \hat{A} S = (A^*)^{-1} S'. \quad (3)$$

Это означает, что задача транзитивности сводится к анализу двух линейных систем:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k_0^* & -k_1^* & -k_2^* & -k_3^* \\ -k_1^* & k_0^* & ik_3^* & -ik_2^* \\ -k_2^* & -ik_3^* & k_0^* & ik_1^* \\ -k_3^* & ik_2^* & -ik_1^* & k_0^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & ik_3 & -ik_2 \\ k_2 & -ik_3 & k_0 & ik_1 \\ k_3 & ik_2 & -ik_1 & k_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} k_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & k_0 & -ik_3 & ik_2 \\ -k_2 & ik_3 & k_0 & -ik_1 \\ -k_3 & -ik_2 & ik_1 & k_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} k_0^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ k_1^* & k_0^* & -ik_3^* & ik_2^* \\ k_2^* & ik_3^* & k_0^* & -ik_1^* \\ k_3^* & -ik_2^* & ik_1^* & k_0^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Нижє використовуємо наступні позначення для параметрів лоренцевського преобразования:

$$k_0 = n_0 + im_0, \quad k_j = -in_j + m_j, \quad k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 1.$$

Після простих вичислень приходимо до системи рівнянь відносно 8 змінних:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} (\mathbf{S} + \mathbf{S}') &= n_0 (S_0 - S'_0), \\ \mathbf{n} (\mathbf{S} - \mathbf{S}') &= -m_0 (S_0 + S'_0), \\ \mathbf{m} (S_0 + S'_0) + (\mathbf{S} + \mathbf{S}') \times \mathbf{n} &= n_0 (\mathbf{S} - \mathbf{S}'), \\ \mathbf{n} (S_0 - S'_0) - (\mathbf{S} - \mathbf{S}') \times \mathbf{m} &= -m_0 (\mathbf{S} + \mathbf{S}'). \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки рішення існують в класі матриць з ортохронної групи Лоренца, то необхідно накладувати відомі обмеження на параметри [12]

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 - m_0^2 - \mathbf{m}^2 = 1, \quad n_0 m_0 + \mathbf{n} \mathbf{m} = 0. \quad (6)$$

«Нерелятивістські» 3-мерні матриці Мюллера

Спочатку розглянемо більш простий (нерелятивістський) випадок, коли $S_0 = S'_0 = I = \text{inv}$ [16]; при цьому рішення рівнянь існують серед елементів групи 3-мерних обертань, тому $m_0 = 0, m_j = 0$:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{S} + \mathbf{S}') = -n_0 (\mathbf{S} - \mathbf{S}'). \quad (7)$$

Загальне рішення цього рівняння має вигляд (виникає довільний параметр $\Gamma \in [0, 2\pi]$):

$$\begin{aligned} n_0^2 + \mathbf{n}^2 &= 1, \quad n_0 = \frac{\cos \Gamma}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} (S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'), \\ \mathbf{n} &= \frac{\sin \Gamma}{\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} (\mathbf{S} + \mathbf{S}') + \frac{\cos \Gamma}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} \mathbf{S} \times \mathbf{S}'. \end{aligned} \quad (8)$$

Звернемо увагу, що при $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$ співвідношення (8) описують малу групу для групи обертань:

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1, \quad n_0 = \cos \Gamma, \quad \mathbf{n} = \sin \Gamma \frac{\mathbf{S}}{S}. \quad (9)$$

Коли $\Gamma = 0$, рішення (8) виглядає особливо просто:

$$n_0 = \frac{S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}} , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{S}'}{S \sqrt{2(S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}')}}. \quad (10)$$

Можно преобразовать решение (8) к векторной параметризации группы вращений [10]:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{n}}{n_0}, \quad \mathbf{c} = \tan \Gamma \frac{S}{S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'} (\mathbf{S} + \mathbf{S}') + \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{S}'}{S^2 + \mathbf{S} \mathbf{S}'} . \quad (11)$$

Отметим, что для векторов Стокса можно ввести следующие параметры (I – это интенсивность света, p – это степень поляризации света [16]):

$$S_0 = I, \quad \mathbf{S} = Ip \mathbf{N}, \quad I - \text{inv}, \quad \mathbf{N}^2 = 1. \quad (12)$$

Тогда (8) и (10) превращаются в

$$\begin{aligned} n_0^2 + \mathbf{n}^2 &= 1, \quad n_0 = \cos \Gamma \frac{1 + \mathbf{N} \mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N} \mathbf{N}')}} , \\ \mathbf{n} &= \sin \Gamma \frac{\mathbf{N} + \mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N} \mathbf{N}')}} + \cos \Gamma \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{\sqrt{2(1 + \mathbf{N} \mathbf{N}')}} \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\mathbf{c} = \tan \Gamma \frac{\mathbf{N} + \mathbf{N}'}{1 + \mathbf{N} \mathbf{N}'} + \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{1 + \mathbf{N} \mathbf{N}'} . \quad (14)$$

О нахождении 3-мерных матриц Мюллера по результатам поляризационных экспериментов

Поскольку один поляризационный эксперимент не позволяет найти однозначно 3-мерную матрицу Мюллера оптического элемента, то необходимо выполнить два независимых измерения:

$$\mathbf{N}_1 \longrightarrow \mathbf{N}'_1, \quad \mathbf{N}_2 \longrightarrow \mathbf{N}'_2, \quad O - ?$$

В результате простого анализа можно получить 4 разных представления для одной и той же величины:

$$\begin{aligned} \tan \Gamma &= + \frac{\mathbf{N}_1 (\mathbf{N}_2 \times \mathbf{N}'_2)}{(\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_1)(\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}'_2)}, \quad \tan \Gamma = - \frac{\mathbf{N}'_1 (\mathbf{N}'_2 \times \mathbf{N}_2)}{(\mathbf{N}'_2 - \mathbf{N}'_1)(\mathbf{N}'_2 + \mathbf{N}_2)}, \\ \tan \Gamma &= + \frac{\mathbf{N}_2 (\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}'_1)}{(\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2)(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}'_1)}, \quad \tan \Gamma = - \frac{\mathbf{N}'_2 (\mathbf{N}'_1 \times \mathbf{N}_1)}{(\mathbf{N}'_1 - \mathbf{N}'_2)(\mathbf{N}'_1 + \mathbf{N}_1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, имеем простое выражение для $\tan \Gamma$ вместе с четырьмя дополнительными соотношениями, описывающими множество возможных пар 3-векторов Стокса, связываемых одной и той же матрицей Мюллера.

О решении задачи транзитивности для релятивистских матриц Мюллера

Обратимся к анализу общего случая 4-мерных векторов Стокса, при этом будем использовать обозначения:

$$S_0 + S'_0 = A, \quad S_0 - S'_0 = B, \quad \mathbf{S} + \mathbf{S}' = \mathbf{A}, \quad \mathbf{S} - \mathbf{S}' = \mathbf{B}. \quad (16)$$

Полная система уравнений транзитивности принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \mathbf{A} &= n_0 \mathbf{B}, \quad \mathbf{n} \mathbf{B} = -m_0 \mathbf{A}; \\ \mathbf{m} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{n} &= n_0 \mathbf{B}, \\ \mathbf{n} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{m} &= -m_0 \mathbf{A}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 - m_0^2 - \mathbf{m}^2 = 1, \quad n_0 m_0 + \mathbf{n} \mathbf{m} = 0. \quad (18)$$

После необходимых математических операций можно привести эту систему уравнений к более простой:

$$\begin{aligned} n_0 &= A x - \mathbf{A}^2 y, & \mathbf{n} &= z \mathbf{A} - w A \mathbf{B} + y \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \\ m_0 &= -B z + \mathbf{B}^2 w, & \mathbf{m} &= x \mathbf{B} - y B \mathbf{A} + w \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (19)$$

где введены 4 числовых параметра. При этом остается только одно независимое дополнительное условие связи: $n_0^2 - m_0^2 = 1 + \mathbf{m}^2 - \mathbf{n}^2$. Это квадратичное условие связи принимает вид уравнения для 4 параметров:

$$\begin{aligned} &x^2 (A^2 - \mathbf{B}^2) + 2xy A(B^2 - \mathbf{A}^2) + y^2 [(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - B^2)\mathbf{A}^2 - A^2 B^2] = \\ &= z^2 (B^2 - \mathbf{A}^2) + 2zw B(A^2 - \mathbf{B}^2) + w^2 [(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - A^2)\mathbf{B}^2 - A^2 B^2] + 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя (19), можно выразить комплексный вектор-параметр k_a :

$$\begin{aligned} k_0 &= (xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2), \\ \mathbf{k} &= -(yB + iz) \mathbf{A} + (x + iwA) \mathbf{B} + (w - iy) \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) легко можно перейти к 3-мерному комплексному вектору Федорова [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}}{k_0} &= \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B} + \gamma \mathbf{A} \times \mathbf{B}, & \alpha &= \frac{-(yB + iz)}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}, \\ \beta &= \frac{x + iwA}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}, & \gamma &= \frac{w - iy}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Обращаем внимание на следующее: система уравнений (17) не меняет своего вида, если все групповые параметры умножить на любое вещественное число. Поэтому эти параметры в принципе могут быть определены из (17) только с точностью до общего множителя. Только обращаясь к уравнению (18), этот общий нормировочный множитель можно без ограничения общности полагать равным 1. В свою очередь, принципиальная неопределимость относительного множителя для четырех числовых параметров x, y, z, w означает, что в выражениях (22) для α, β, γ ничего существенного не теряется, если числитель и знаменатель разделить на любую (отличную от нуля) величину из четырех x, y, z, w ; тем самым произвол в выборе независимых параметров будет исключен. Однако вместо такого формального исключения произвола, с математической точки зрения, может быть намного удобнее использовать 4 величины, подчиненные дополнительному квадратичному условию (20). В частности, в следующем разделе будет использована именно эта возможность.

О нахождении 4-мерных матриц Мюллера по результатам поляризационных измерений

Как установлено выше, каждое поляризационное измерение

$$S_a \xrightarrow{L} S'_a$$

позволяет получить одно квадратичное уравнение (20) для четырех неизвестных параметров. Понятно, что для однозначного нахождения матрицы Мюллера необходимо выполнить несколько независимых поляризационных опытов. Начнем с возможности использовать 4 измерения $i = 1, 2, 3, 4$; проблема формулируется в виде 4 квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned} &x^2 (A_i^2 - \mathbf{B}_i^2) + 2xy A_i(B_i^2 - \mathbf{A}_i^2) + y^2 [(\mathbf{A}_i^2 + \mathbf{B}_i^2 - B_i^2)\mathbf{A}_i^2 - A_i^2 B_i^2] = \\ &= z^2 (B_i^2 - \mathbf{A}_i^2) + 2zw B_i(A_i^2 - \mathbf{B}_i^2) + w^2 [(\mathbf{A}_i^2 + \mathbf{B}_i^2 - A_i^2)\mathbf{B}_i^2 - A_i^2 B_i^2] + 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Ее можно представить короче в символическом виде:

$$\begin{aligned} a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 &= \alpha_1z^2 + 2\beta_1zw + \sigma_1w^2 + 1, \\ a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 &= \alpha_2z^2 + 2\beta_2zw + \sigma_2w^2 + 1, \\ a_3x^2 + 2b_3xy + c_3y^2 &= \alpha_3z^2 + 2\beta_3zw + \sigma_3w^2 + 1, \\ a_4x^2 + 2b_4xy + c_4y^2 &= \alpha_4z^2 + 2\beta_4zw + \sigma_4w^2 + 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Эта система решается, и логическая цепочка выглядит так:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Rightarrow x = x(y, z, w), \\ (2) \quad &\Rightarrow y = y(z, w), \quad x = x(y(z, w), z, w) = \bar{x}(z, w), \\ (3) \quad &\Rightarrow z = z(w), \\ (4) \quad &\Rightarrow w = w(\dots), \quad z = z(w(\dots)). \end{aligned}$$

Однако этот способ представляется довольно сложным. Можно предложить другую и более простую процедуру, основанную на использовании результатов 6 независимых измерений. При этом задача сводится к системе 6 линейных уравнений относительно 6 переменных $x^2, y^2, 2xy, z^2, w^2, 2zw$:

$$\begin{aligned} a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 - \alpha_1z^2 - 2\beta_1zw - \sigma_1w^2 &= +1, \\ a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 - \alpha_2z^2 - 2\beta_2zw - \sigma_2w^2 &= +1, \\ a_3x^2 + 2b_3xy + c_3y^2 - \alpha_3z^2 - 2\beta_3zw - \sigma_3w^2 &= +1, \\ a_4x^2 + 2b_4xy + c_4y^2 - \alpha_4z^2 - 2\beta_4zw - \sigma_4w^2 &= +1, \\ a_5x^2 + 2b_5xy + c_5y^2 - \alpha_5z^2 - 2\beta_5zw - \sigma_5w^2 &= +1, \\ a_6x^2 + 2b_6xy + c_6y^2 - \alpha_6z^2 - 2\beta_6zw - \sigma_6w^2 &= +1. \end{aligned}$$

Ее единственное решение определяется правилом Крамера:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\Delta_{x^2}}{\Delta}, \quad y^2 = \frac{\Delta_{y^2}}{\Delta}, \quad 2xy = \frac{\Delta_{2xy}}{\Delta}, \\ z^2 &= \frac{\Delta_{z^2}}{\Delta}, \quad w^2 = \frac{\Delta_{w^2}}{\Delta}, \quad 2zw = \frac{\Delta_{2zw}}{\Delta}, \\ x + y &= \sqrt{\frac{\Delta_{x^2} + \Delta_{y^2} + \Delta_{2xy}}{\Delta}}, \quad x - y = \sqrt{\frac{\Delta_{x^2} + \Delta_{y^2} - \Delta_{2xy}}{\Delta}}, \\ z + w &= \sqrt{\frac{\Delta_{z^2} + \Delta_{w^2} + \Delta_{2zw}}{\Delta}}, \quad z - w = \sqrt{\frac{\Delta_{z^2} + \Delta_{w^2} - \Delta_{2zw}}{\Delta}}. \end{aligned} \quad (25)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes, G.G. On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G.G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.
2. Mueller, H. Memorandum on the polarization optics of the photo-elastic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. Jones, R.C. New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. Hurwitz, H. A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.

5. Jones, R.C. A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. Jones, R.C. A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. Гельфанд, И.М. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 367 с.
8. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1958. – 380 с.
9. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
10. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
11. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
12. Bogush, A.A. On Unique Parametrization of the Linear Group $GL(4, \mathbb{C})$ and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPC. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.
13. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
14. Богуш, А.А. Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.
15. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
16. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.

V.M. Red'kov, E.M. Ovsyuk. Transitivity in the Theory of the Lorentz Group and the Stokes–Mueller Formalism in Optics

Group-theoretical analysis of arbitrary polarization elements with Mueller matrices of the Lorentzian type is performed. Any single polarization measurement fixes parameters of the corresponding Mueller matrix up to 3 arbitrary variables. To any single polarization measurement corresponds a quadratic equation on 4 numerical parameters. A corresponding Mueller matrix can be found uniquely from results of four independent polarization measurements. Analytical expressions for these 4 parameters of any Mueller matrix can be given the most simple form when using the results of 6 arbitrary and independent measurements, the corresponding formulas are written down in explicit form.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 16.01.2012