

УДК 513.82

А.А. Юдов, И.Н. Машлякевич

О РЕДУКТИВНОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ G -ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО С ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ СТАЦИОНАРНОСТИ

В работе рассматривается пространство 1R_4 – четырехмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры 2 (пространство Минковского). Исследуются однородные пространства с фундаментальной группой Ли G – группой Ли движений пространства 1R_4 . Изучается класс таких пространств, имеющих в качестве группы стационарности двухпараметрическую подгруппу Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Среди однородных пространств такого вида находятся все редуктивные пространства. В алгебрах Ли этих редуктивных пространств находятся все редуктивные дополнения.

Введение

В работе изучается геометрия однородных пространств. Исследование таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и другие, а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте [1] и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси [2; 3]. Ю. Лумисте показал применимость редуктивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуктивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редуктивных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуктивных однородных пространствах. В данной работе исследуется специальный класс однородных пространств, фундаментальной группой для которых является группа Ли G движений четырёхмерного псевдоевклидова пространства сигнатуры 2 – пространства 1R_4 . Рассматриваются такие однородные пространства, группа стационарности у которых двухпараметрическая. Среди таких пространств находятся все редуктивные однородные пространства, в алгебрах Ли фундаментальных групп Ли которых находятся все соответствующие редуктивные дополнения.

Постановка задачи и метод исследования

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства 1R_4 : $G = H \ltimes T_4$.

Алгебра Ли $\bar{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\bar{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли группы Ли: $\bar{G} = \bar{H} \oplus \tau_4$.

Рассмотрим связные подгруппы Ли группы Ли G движений пространства 1R_4 . Все связные подгруппы Ли группы Ли G , с точностью до сопряженности, перечислены в работе [4].

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i , где G_i – связная двух-

параметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства 1R_4 . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{G}$ и $\overline{G}_i$, затем находятся все двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $ad\overline{G}_i$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G}_i$. Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i . При этом можно показать, что всякое редуктивное однородное пространство G/G_i может быть получено таким образом.

Определение. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G}_i$, где $ad\overline{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G}_i$.

Для нахождения редуктивных дополнений используем следующий способ. Пусть a_1, a_2 – базис алгебры Ли $\overline{G}_i$ группы Ли G_i , принадлежащей группе Ли H . Рассмотрим четырехмерное векторное подпространство m алгебры Ли $\overline{H}$, образованное векторами b_1, b_2, b_3, b_4 , т.е. $m = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Для этого подпространства m потребуем выполнения условия инвариантности относительно $ada_i, i=1, 2$, т.е. выполнимость условий:

$$[a_i, b_j] = \alpha_{j1}b_1 + \alpha_{j2}b_2 + \alpha_{j3}b_3 + \alpha_{j4}b_4, \quad j=1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

Систему (2) будем называть системой инвариантности пространства m , или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ алгебры Ли $\overline{H}$ [5], получим систему инвариантности в виде системы алгебраических уравнений. Пусть например $b_j = \beta_{j5}i_5 + \dots + \beta_{j10}i_{10}$. Элементарными преобразованиями можно от базиса $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ перейти к базису $\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}$ с более простыми коэффициентами β_{jk} . Для этого придется рассмотреть 15 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены четырехмерные пространства $m_1, \dots, m_k$, инвариантные относительно $ad\overline{G}_i$. Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (1). Такие пространства m_l и будут искомыми редуктивными дополнениями.

Нахождение редуктивных пространств H/G_i

Все двухпараметрические подгруппы Ли группы Ли H известны [4]. Запишем алгебры Ли для этих подгрупп с помощью базисов: $\overline{G}_5 = \{i_6, i_9\}$, $\overline{G}_6 = \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}$, $\overline{G}_7 = \{i_5 - i_8, i_6\}$.

Рассмотрим оператор i_6 . Будем искать четырехмерные инвариантные подпространства алгебры Ли $\bar{H}$, инвариантные относительно $ad(i_6)$. Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9, i_{10} + \nu i_6 + \sigma i_9, i_7 + s i_6 + t i_9, i_8 + p i_6 + q i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-p = 0, -q = 0, s = 0, t = 0, \nu = 0, \sigma = 0, -\lambda = 0, \mu = 0$. Из первого, второго и седьмого уравнений следует, что $p = 0, q = 0, \lambda = 0$ соответственно. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$.

2. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10} + \nu i_8 + \sigma i_9, i_7 + s i_8 + t i_9, i_6 + p i_9\}$. Система инвариантности примет следующий вид: $-\lambda^2 = -1, -\lambda\mu = 0, -\lambda\nu + s = 0, -\nu\mu + t = 0, -\lambda s + \nu = 0, -\mu s + \sigma = 0$. Из первого уравнения следует, что $\lambda = \pm 1$, тогда рассмотрим первый случай, когда $\lambda = 1$. Получим: $\mu = 0, \nu = s, t = 0, \sigma = 0$. Рассмотрим второй случай, когда $\lambda = -1$, получим $\mu = 0, \nu = -s, t = 0, \sigma = 0$. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_6 + p i_9\}$.

3. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_6, i_{10} + \nu i_8 + \sigma i_6, i_7 + s i_8 + t i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-\lambda\mu = 0, -\lambda^2 = -1, -\nu\mu + t = 0, -\mu s + \sigma = 0, -\lambda\nu + s = 0, -\lambda s + \nu = 0$. Из второго уравнения следует, что $\lambda = \pm 1$, тогда из первого следует, что $\mu = 0$, а из третьего, четвертого ($t = 0, \sigma = 0$) и из пятого и шестого уравнений видно, что $\nu = \pm s$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_9\}$.

4. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_9, i_{10} + \nu i_7 + \sigma i_9, i_8 + s i_9, i_6 + t i_9\}$. Система инвариантности примет следующий вид: $\nu\lambda = 0, \sigma\lambda - s = 0, \nu^2 = 1, \sigma\nu = 0, -\lambda = 0, -\mu = 0$. Из третьего уравнения следует, что $\nu = \pm 1$. Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$, тогда получим из первого и четвертого $\lambda = 0, \sigma = 0$ соответственно и из второго $s = 0$. Рассмотрим случай, когда $\nu = -1$. Получим $\lambda = 0, \sigma = 0, s = 0$. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6 + t i_9\}$.

5. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_6, i_{10} + \nu i_7 + \sigma i_6, i_8 + s i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $\sigma\lambda - s = 0, \nu\lambda = 0, \sigma\nu = 0, \nu^2 = 1, -\mu = 0, \lambda = 0$. Из четвертого уравнения следует, что $\nu = \pm 1$, а из пятого $\mu = 0$. Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$, получим $\sigma = 0$, а тогда и $s = 0$. Рассмотрим случай, когда $\nu = -1$, получим $\sigma = 0, s = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10} + i_7, i_8, i_9\}$.

6. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_8, i_{10} + \nu i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-\lambda\mu + \nu\lambda = 0, -\mu^2 + \sigma\lambda = -1, -\lambda\sigma + \nu^2 = 1, -\mu\sigma + \sigma\nu = 0$. Сложив второе и третье уравнения, получим, что $\mu = \pm\nu$. Рассмотрим первый случай, когда $\mu = \nu$. Тогда $\mu = \pm\sqrt{1+\lambda\sigma}, \nu = \pm\sqrt{1+\lambda\sigma}$ при условии, что $1+\lambda\sigma \geq 0$. Рассмотрим второй случай, когда $\mu = -\nu$. Получим систему вида: $-2\lambda\mu = 0, -\mu^2 + \sigma\lambda = -1, -\lambda\sigma + \mu^2 = 1, -\mu\sigma = 0$. Рассмотрим случай 2а) $\mu \neq 0$. Тогда

да из второго уравнения системы получим $\mu = \pm 1$, из третьего $\nu = \mp 1$, а из четвертого $\sigma = 0$. Рассмотрим случай 2б) $\mu = 0$. Получаем $\sigma = -\frac{1}{\lambda}$. В итоге получим инвариантные

пространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_8, i_{10} \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5 \pm i_8, i_{10} \mp i_7, i_6, i_9\}$, $\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\}$.

7. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9, i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9, i_6 + s i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

8. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

9. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-\mu^2 + \nu \lambda = -1$, $-\lambda \mu = 0$, $-\nu \mu = 0$, $-\lambda \nu = 1$. Рассмотрим случай, когда $\mu = 0$, тогда из последнего уравнения получим $\nu = -\frac{1}{\lambda}$. В случае, когда

$\lambda = 0$, $\nu = 0$ приходим к противоречию. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\}$.

10. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности примет вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_8, i_6, i_9\}$.

11. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_9, i_7 + \mu i_9, i_8 + \nu i_9, i_6 + \sigma i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

12. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_6, i_7 + \mu i_6, i_8 + \nu i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

13. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_8, i_7 + \mu i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_{10}, i_7, i_6, i_9\}$.

14. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

15. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

Таким образом, получена

Теорема 1. Относительно adi_6 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$,
2. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_6 + \rho i_9\}$,
3. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_9\}$,
4. $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6 + \tau i_9\}$,
5. $\{i_5, i_{10} + i_7, i_8, i_9\}$,
6. $\{i_5 + \lambda i_7 \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_8, i_{10} \pm \sqrt{1 + \lambda \sigma} i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9\}$,

$$\{i_5 \pm i_8, i_{10} \mp i_7, i_6, i_9\}, \left\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\},$$

$$7. \left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\}, 8. \{i_5, i_8, i_6, i_9\}, 9. \{i_{10}, i_7, i_6, i_9\}.$$

Рассматривая аналогично операторы adi_9 , $ad(i_5 - i_8)$, $ad(i_7 + i_{10})$ приходим к следующим теоремам.

Теорема 2. *Относительно adi_9 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:*

$$1. \{i_5, i_{10}, i_7, i_8\},$$

$$2. \left\{i_5 + \mu i_8, i_{10} - \frac{1}{\mu} i_7, i_6, i_9\right\}, \left\{i_5 \pm \sqrt{-1 - \nu \mu} i_7 + \mu i_8, i_{10} + \nu i_7 \mp \sqrt{-1 - \nu \mu} i_8, i_6, i_9\right\},$$

$$3. \{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + \lambda i_8, i_6, i_9\}, 4. \{i_{10}, i_8, i_6, i_9\}.$$

Теорема 3. *Относительно $ad(i_5 - i_8)$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:*

$$1. \{i_6, i_9, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\}, \{i_6, i_9 + \sigma i_8, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\},$$

$$\{i_6 + \lambda i_{10} \pm \sqrt{\lambda \sigma} i_8, i_9 \pm \sqrt{\lambda \sigma} i_{10} + \sigma i_8, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\},$$

$$2. \left\{i_6 + \lambda i_9, i_7 + \frac{1}{\lambda} i_8, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_5 - i_8\right\},$$

$$3. \{i_6, i_7 + i_{10}, i_5, i_8\}, 4. \{i_9, i_7, i_{10}, i_5 - i_8\}.$$

Теорема 4. *Относительно $ad(i_7 + i_{10})$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:*

$$1. \{i_6 + \lambda i_8 \pm \sqrt{-\lambda \sigma} i_{10}, i_9 \mp \sqrt{-\lambda \sigma} i_8 + \sigma i_{10}, i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_6, i_9 + \sigma i_{10}, i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\},$$

$$\{i_6, i_9, i_5 - i_8, i_7 - i_{10}\},$$

$$2. \left\{i_6 + \lambda i_9, i_5 + \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_8 + \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_7 + i_{10}\right\},$$

$$3. \{i_6, i_5 - i_8, i_7, i_{10}\}, 4. \{i_9, i_5, i_8, i_7 + i_{10}\}.$$

Вернемся к вопросу о редуктивности однородных пространств. Рассмотрим подалгебру $G_5 = \{i_6, i_9\}$. Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что для adi_6 и adi_9 одновременно инвариантным является только одно четырехмерное пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$, которое также является дополнительным к алгебре G_5 . Следовательно, получена теорема:

Теорема 5. *Однородное пространство H/G_5 являются редуктивным. Единственным редуктивным дополнением для подалгебры Ли $\overline{G}_5$ в алгебре Ли $\overline{H}$ является подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$.*

Из теорем 3 и 4 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_8)$ и $ad(i_7 + i_{10})$ нет общих инвариантных четырехмерных подпространств алгебры Ли $\overline{H}$. Поэтому алгебра Ли $\overline{G}_6$ не имеет в алгебре Ли $\overline{H}$ редуктивных дополнений. Таким образом, получим теорему:

Теорема 6. Однородное пространство H/G_6 не является редуктивным.

Рассмотрим подалгебру $G_7 = \{i_5 - i_8, i_6\}$. Из теорем 1 и 3 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_8)$ и adi_6 нет общих инвариантных четырехмерных подпространств алгебры Ли $\bar{H}$. Поэтому алгебра Ли $\bar{G}_7$, не имеет в алгебре Ли $\bar{H}$ редуктивных дополнений. Следовательно, получили теорему:

Теорема 7. Однородное пространство H/G_7 не является редуктивным.

Итоги исследований заключим в следующей теореме:

Теорема 8. Однородное пространство H/G_5 является редуктивным. Редуктивным дополнением в алгебре Ли $\bar{H}$ для подалгебры Ли $\bar{G}_5$ является только подпространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$. Однородные пространства $H/G_6, H/G_7$ не являются редуктивными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лумисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лумисте // Науч. труды I респ. конф. математиков Белоруссии. – Минск, 1965. – С. 247–258.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.1. – 343 с.
3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.2. – 413 с.
4. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца–Пуанкаре / И.В. Белько // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 16–21.
5. Корчук, О.В. Исследование и классификация редуктивных однородных пространств с группой вращений пространства 1R_4 с четырехмерными группами стационарности / О.В. Корчук, А.А. Юдов // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23 апреля 2009 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест, 2009. – С. 182–183.

A. Yudov, I. Mashliakevich. About the Reduction Homogenous Spaces with Fundamental Group G -Group of Motions of Space 1R_4

In work space 1R_4 – 4-dimensional pseudoeuclidious space of the signature two is considered. Homogenous spaces with fundamental group Lee G – group Lee of motions space 1R_4 are being dealt with. A class of such spaces, having are as group of stability a 2-parametrical subgroup Lee of group Lee H of rotations of space 1R_4 is investigated. Homogeneous spaces of such kind being all reductive homogeneous spaces. Whether there are all reductive decomposition of algebras Lee of the received reductive spaces.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.04.2012