

УДК 512.542

А.А. Трофимук**О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕБОЛЬШИМИ
ПОРЯДКАМИ НЕБИЦИКЛИЧЕСКИХ
СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ФАКТОРОВ**

В работе исследована разрешимая группа G , которая обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Установлена справедливость следующих утверждений: нильпотентная длина группы G не превышает 4, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$. Также оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$, либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5. Здесь $l_p(G)$ – p -длина группы G .

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B . Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в [1, теорема 1]. В частности, доказано, что производная длина таких разрешимых групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

В [2] исследовались разрешимые группы G , обладающие нормальными рядами, факторы которых имеют бициклические силовские подгруппы. Установлена справедливость следующих утверждений: нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5; группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что фактор-группа G/N сверхразрешима; $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$; группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2, 3, 7\}'$ -холлову подгруппу. Здесь $l_p(G)$ – p -длина группы G .

В [3] установлено, что производная длина разрешимой группы G , силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$ не превышает 6; $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$, в частности, если силовская 3-подгруппа бициклическая, то $l_3(G) \leq 1$; $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп, обладающих нормальными рядами, факторы которых имеют ограничения на силовские подгруппы. Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина группы G не превышает 4.
2. Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.
3. $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$. Кроме того, если G A_4 -свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p \neq 3$.

Разрешимые группы из [2] и группы, исследуемые в теореме 1, имеют одинаковые верхние границы нильпотентной длины и p -длины, а для производной длины верхние границы различны. Однако оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$ либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5.

Теорема 2. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$, либо 16, либо 32. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше 5.
2. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 31, 307\}'$ -холлову подгруппу.

Пример 1. Пусть E_{13^3} – элементарная абелева группа порядка 13^3 , а K – экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP [4] обнаружена группа $G = [E_{13^3}][K]SL(2, 3)$ порядка 1 423 656. Очевидно, что группа G обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 13^3 и 3^3 . Подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4. Таким образом, полученные оценки производной и нильпотентной длины в теореме 1 являются точными. Кроме того, с помощью компьютерной системы GAP можно построить группу $G_1 = [E_{7^3}][K]SL(2, 3)$ порядка 222 264, обладающую теми же свойствами, что и группа G . Примеры групп G и G_1 объясняют отсутствие среди чисел $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$ теоремы 2 простых чисел 7 и 13.

Пример 2. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3 , S – экстраспециальная группа порядка 27, Q_8 – группа кватернионов порядка 8. С помощью системы компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [E_{7^3}][S]Q_8$ порядка $74088 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, которая является A_4 -свободной группой. Очевидно, что группа G обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 7^3 и 3^3 . Ее подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$ и производная длина равна 5. Таким образом, оценка производной длины в случае A_4 -свободной группы является точной.

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [5; 6]. В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций, [6; 7]. Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^F – F -корадикал группы

G , т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in \mathcal{F}$. Произведение $\mathcal{F}\mathcal{H} = \{G \in \mathcal{G} \mid G^H \in \mathcal{F}\}$ формаций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ состоит из всех групп G , для которых $\mathcal{H}$ -корадикал принадлежит формации $\mathcal{F}$. Как обычно, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}\mathcal{F}$. Формация $\mathcal{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$ следует, что $G \in \mathcal{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через $\mathcal{N}$ и $\mathcal{A}$ соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([8], лемма 9). Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$. В частности, если H A_4 -свободна, то H метациклическая.

Лемма 2. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(4,2)$, то $H \in \{[S_3 \times S_3]Z_2, S_3 \times S_3, [E_{3^2}]Z_4, [Z_{15}]Z_4, [Z_5]Z_4, Z_3 \times S_3, Z_3 \times D_{10}, D_{10}, Z_5, Z_{15}\}$.

Доказательство. Утверждение легко получить с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 3. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(5,2)$, то $H \in \{[Z_{31}]Z_5, Z_{31}\}$.

Доказательство. Утверждение легко получить с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 4 ([8], лемма 10). Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H A_4 -свободна, то H метабелева.

Лемма 5 ([8], лемма 11). Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,5)$ и $O_5(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$, $H \cong Z_4 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_3, Z_6, S_3, [Z_3]Z_4, Z_{12}, D_{12}, A_4, S_4, Z_4 \times S_3, Z_{24}, [Z_3]Z_8, Z_{31}, SL(2,3), [SL(2,3)]Z_2, [Z_4 \times Z_4]Z_3, [Z_{24}]Z_2, [Z_{31}]Z_3, [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2, [SL(2,3)]Z_4\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H A_4 -свободна, то производная длина H не превышает 3.

Лемма 6. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3,p)$ и $p \in \{11, 17\}$, то производная длина H не превышает 3.

Доказательство. Утверждение легко вывести с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 7 ([8], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathcal{A}^k$, когда $G \in \mathcal{N}\mathcal{A}^{k-1}$.

Лемма 8 ([8], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:

- 1) если $n = 2$, то $H \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{A}^4$;
- 2) если $n = 3$, то $H \in \mathcal{N}^3 \cap \mathcal{A}^5$.

Кроме того, если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Пример 3. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что в группе $GL(2,5)$ существует неприводимая подгруппа H , изоморфная группе $[SL(2,3)]Z_4$ порядка 96, здесь Z_4 – циклическая группа порядка 4. Кроме того, производная длина

подгруппы H равна 4, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 1 леммы 8 оценка производной и нильпотентной длины является точной.

Пример 4. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что как в группе $GL(3,7)$, так и в группе $GL(3,13)$ существует неприводимая подгруппа H , изоморфная группе $[S]SL(2,3)$ порядка 648, здесь S – экстраспециальная группа порядка 27. Кроме того, производная длина подгруппы H равна 5, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 2 леммы 8 оценка производной и нильпотентной длины является точной.

Лемма 9 ([8], лемма 13). 1. Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева. 2. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in A^4$.

Пример 5. В $GL(2,5)$ существует неприводимая метабелева подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Поэтому в п. 1 леммы 9 оценка производной длины для $p=5$ является точной.

Пример 6. В $GL(3,7)$ существует неприводимая подгруппа, изоморфная A_4 -свободной группе $[S]Q_8$, производной длины 4 и порядка 216. Здесь S – экстраспециальная группа порядка 27. Поэтому в п. 2 леммы 9 оценка производной длины является точной.

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 10. Пусть F – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит F , но $G/N \in F$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Лемма 11 ([9], теорема I.8; [5], теорема II.3.2). Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Phi(G)=1$;
- 2) $F(G)=C_G(F(G))=O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p -группой порядка p^n для некоторого простого p ;
- 3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;
- 4) $G=[F(G)]M$ и $O_p(M)=1$;
- 5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n,p)$.

Лемма 12. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Тогда индексы максимальных подгрупп группы G свободны от четвертых степеней. В частности, если силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2,3,5,11,17\}$, либо 16, либо 32, то индекс каждой максимальной подгруппы группы G есть простое число, квадрат простого числа либо 8, 16, 27, 125, 1331, 4913.

Доказательство. Пусть ряд (1) является нормальным рядом группы G , факторы которого удовлетворяют условию леммы. Уплотним этот ряд до главного следующим образом. Пусть $\bar{N} = N/G_i \subseteq G_{i+1}/G_i = \overline{G_{i+1}}$ является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\bar{G} = G/G_i$. Так как $\bar{G}$ разрешима, то $\bar{N}$ – элементарная

абелева p -подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$ и содержится в силовой p -подгруппе $\bar{P}$ группы $\overline{G_{i+1}}$. Пусть $\bar{P}$ бициклическая. Если $p > 2$, то $\bar{P}$ метациклическая, поэтому $|\bar{N}| = p$ или p^2 . Если $p = 2$, то $|\bar{N}| = 2, 4$ или 8 по лемме 1 [1]. Пусть $\bar{P}$ – небициклическая подгруппа. Тогда $|\bar{N}| \leq p^3$. Заменяя в (1) отрезок $G_i \leq G_{i+1}$ на $G_i \leq N \leq G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге получим главный ряд

$$1 = N_0 < N_1 < \dots < N_i < N_{i+1} < \dots < N_m = G$$

с факторами порядка p , q^2 или r^3 , где $p, q, r \in \pi(G)$.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G . Зафиксируем число i такое, что $N_i \subseteq M$, но $N_{i+1} \not\subseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G , то $N_{i+1}M = G$ и $|G:M| = |N_{i+1}:N_{i+1} \cap M|$. Поскольку $N_i \subseteq N_{i+1} \cap M$,

то $|N_{i+1}:N_{i+1} \cap M| = \frac{|N_{i+1}:N_i|}{|N_{i+1} \cap M:N_i|}$ и $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого

числа или куб простого числа.

Частный случай леммы непосредственным образом вытекает из вышеизложенного доказательства. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

1. Для этого покажем, что $G \in \mathcal{N}^4$. Пусть $\Phi(G) = 1$. Так как условие теоремы наследуется всеми фактор-группами, то $G/\Phi(G) \in \mathcal{N}^4$ и $G \in \mathcal{N}^4$, так как формация $\mathcal{N}^4$ насыщена. Поэтому $\Phi(G) = 1$ и по индукции $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . Кроме того, $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G . Так как $|F| = |G:M|$, то из леммы 12 следует, что порядок $|F|$ равен p либо p^2 , либо p^3 , где p – простое число.

Пусть $|F| = p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p , и $G/F \in \mathcal{A}$.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2, p)$. По п. 1 леммы 8 фактор-группа $G/F \in \mathcal{N}^3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе H группы $GL(3, p)$. По п. 2 леммы 8 группа $G/F \in \mathcal{N}^3$. Итак, мы доказали, что $G/F \in \mathcal{N}^3$. Поскольку F нильпотентна, то $G \in \mathcal{N}^4$.

2. По лемме 12 индексы максимальных подгрупп в группе G являются простыми числами, квадратами простых чисел либо кубами простых чисел. Такие группы исследовались в работе [10], где установлено, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

3. Так как p -длина метанильпотентной группы не превышает 1, то из включения $G \in \mathcal{N}^4$ следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого p . Применим индукцию по порядку группы G . Покажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [5] можно считать, что $O_p(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга

$F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа и $|F| = |G:M|$. Из леммы 12 следует, что порядок $|F|$ равен p либо p^2 , либо p^3 , где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\text{Aut} F$ группы F , порядок которой равен $p-1$. Отсюда, $G_p = F$ и $l_p(G) \leq 1$.

Если $|F| = p^n$, $n \in \{2, 3\}$, то $\text{Aut} F = GL(n, p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 8 G/F – p' -группа, т.е. $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$.

Пусть G является A_4 -свободной группой. Повторяя доказательство утв. 1 теоремы и используя лемму 9, несложно показать, что $G \in \text{NA}^4$. Теперь из леммы 7 следует, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Покажем, что для A_4 -свободной группы $l_2(G) \leq 1$. По лемме VI.6.9 [5] и лемме 12 можно считать, что подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой порядка 2^α , где $\alpha \leq 3$.

Если $|F| = 2$, то $l_2(G) \leq 1$.

Если $|F| = 4$, то $\text{Aut}(F) \cong GL(2, 2) \cong S_3$. Тогда $G/F \cong Z_3$ или $G/F \cong S_3$. Если $G/F \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F \cong S_3$, то $G \cong S_4$. В любом случае группа не A_4 -свободна. Противоречие.

Пусть теперь $|F| = 8$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3, 2)$. Из леммы 1 следует, что во всех случаях, кроме $G/F \cong S_3$, 2-длина не превышает 1. По теореме 4.32 [6] в группе G существует подгруппа $H = [F]Z_3$, у которой в качестве подгруппы выступает знакопеременная группа A_4 . Противоречие. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

1. Вначале докажем, что $G \in \text{NA}^4$. По индукции $G/\Phi(G) \in \text{NA}^4$. Так как NA^4 – насыщенная формация, то, по лемме 10, G – примитивная группа: $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G , $F = C_G(F)$, F – элементарная абелева подгруппа порядка p^n , $G = [F]M$, а G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе из группы $\text{Aut} F \cong GL(n, p)$ (лемма 11). Из леммы 12 следует, что порядок F равен либо p , либо p^2 , либо 2^3 , либо 2^4 , либо 2^5 , либо 3^3 , либо 5^3 , либо 11^3 , либо 17^3 .

Если $|F| = p$, то $\text{Aut} F = Z_{p-1}$ и G/F – циклическая группа. Поэтому $G/F \in \mathcal{A}$ и $G \in \text{NA} \subseteq \text{NA}^4$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе группы $GL(2, p)$. По лемме 8, $G/F \in \mathcal{A}^4$, поэтому $G \in \text{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3, 2)$. Так как $O_2(G/F) = 1$, то из леммы 1 следует, что $G/F \in \mathcal{A}^2$ и $G \in \text{NA}^2 \subseteq \text{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^4$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(4, 2)$. Из леммы 2 следует, что $G/F \in \mathcal{A}^3$ и $G \in \text{NA}^3 \subseteq \text{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^5$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(5,2)$. Из леммы 3 следует, что $G/F \in A^2$ и $G \in NA^2 \subseteq NA^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 3^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,3)$. Так как $O_3(G/F) = 1$, то из леммы 4 следует, что $G \in NA^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 5^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,5)$. Так как $O_5(G/F) = 1$, то из леммы 5 следует, что $G \in NA^4$.

Осталось рассмотреть случаи, когда $|F| = 11^3$ или $|F| = 17^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(3,11)$ или $GL(3,17)$ соответственно. Из леммы 6 следует, что в каждом из случаев $G \in NA^3 \subseteq NA^4$.

Итак, $G \in NA^4$. Из леммы 7 получаем, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы, а G_p – ее силовская p -подгруппа. Предположим, что $p > 19$ и $p \notin \{31, 307\}$. Используя индукцию по порядку группы, покажем, что G_p нормальна в G . Поскольку формация всех p -замкнутых подгрупп является насыщенной формацией, то по лемме 10 G – примитивная группа: $\Phi(G) = 1$, $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G порядка q^n для некоторого $q \in \pi(G)$ и натурального n , $F = C_G(F)$, а G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F (лемма 11). Из леммы 12 следует, что порядок F равен q , q^2 , 8, 16, 32, 27, 125, 1331 и 4913. При $p = q$ из п. 3 теоремы 1 получаем, что G_p нормальна в G . Поэтому считаем, что $p > q$.

Пусть $|F| = q$, тогда G/F – циклическая группа порядка, делящего $q-1$. Ввиду того, что p – наибольший простой делитель порядка группы G , этот случай исключается.

Пусть теперь $|F| = q^2$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2, q)$, порядок которой равен $(q^2 - q)(q^2 - 1)$. Поэтому, учитывая, что $p > q$, получим, что p делит $q+1$, что возможно только при $p = 3$, а $q = 2$. Противоречие.

Если $|F| = 8$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3, 2)$, порядок которой равен $2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Теперь $p \in \{2, 3, 7\}$, что исключается условием.

Если $|F| = 16$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(4, 2)$, порядок которой равен $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Теперь $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, что исключается условием.

Если $|F| = 32$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(5, 2)$, порядок которой равен $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$. Теперь $p \in \{2, 3, 5, 7, 31\}$, что исключается условием.

Если $|F| = 27$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3, 3)$, порядок которой равен $2^5 \cdot 3^3 \cdot 13$. Теперь $p \in \{2, 3, 13\}$, что исключается условием.

Если $|F|=125$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,5)$, порядок которой равен $2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$. Теперь $p \in \{2,3,5,31\}$, что исключается условием.

Если $|F|=1331$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,11)$, порядок которой равен $2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 19$. Теперь $p \in \{2,3,5,7,11,19\}$, что исключается условием.

Если $|F|=4913$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,17)$, порядок которой равен $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 17^3 \cdot 307$. Теперь $p \in \{2,3,17,307\}$, что исключается условием.

Итак, силовская подгруппа G_p нормальна в группе G для наибольшего простого $p \in \pi(G)$ при условии, что $p > 19$ и $p \notin \{31,307\}$.

Теперь положим $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$ и покажем, что π -холлова подгруппа G_π нормальна в группе G . Так как по индукции $O_\pi(G)=1$ и класс всех π -замкнутых групп является насыщенной формацией, то G – примитивная группа по лемме 10. По лемме 11 можно считать, что $\Phi(G)=1$ и в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F=F(G)$, которая будет элементарной абелевой p -подгруппой порядка, делящего 2^3 , 3^3 , 5^3 , 7^2 , 13^2 или 31^2 . Фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(n,p)$ для $p=2$ и $n \leq 5$, или $p \in \{3,5,11,17\}$ и $n \leq 3$, или $p \in \{7,13,19,31,307\}$ и $n \leq 2$. Так как $\pi(GL(n,p)) \subseteq \{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$ для этих значений n и p , то G/F – π' -группа.

Итак, G_π нормальна для $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$. Если p – наибольшее из π , то G_p нормальна в G по доказанному. По индукции G_π/G_p дисперсивна по Оре, откуда следует, что подгруппа G_π дисперсивна по Оре. Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p -подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2,3,5\}$. Если G A_4 -свободна, то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Доказательство. Используя лемму 9 в доказательстве утв. 1 теоремы 2, получим, что $G/F \in A^3$. По лемме 7, производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
2. Monakhov, V.S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.
3. Монахов, В.С. Конечные разрешимые группы, силовские p -подгруппы которых либо бициклические, либо имеют p^3 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.
4. The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: <http://www.gap-system.org>.

5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
6. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск : Высшая школа, 2006.
7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М : Наука, 1978. – 272 с.
8. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
9. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes on pure mathematics. Canberra, Australian National University. – 1979. – № 11. – 100 p.
10. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.

A.A. Trofimuk. About Finite Groups with Small Orders of Nonbicyclic Sylow Subgroups of Factors

The structure of solvable group with bicyclic Sylow subgroups or Sylow subgroups of order p^3 for all $p \in \pi(G)$ in factors of a normal series is studied. The following statements hold: the nilpotent length of G is at most 4, the derived length $G/\Phi(G)$ is at most 6, $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ and $l_p(G) \leq 1$ for all prime $p > 3$. As it appeared that if orders of nonbicyclic Sylow subgroups in factors to limit to cubes of small prime numbers $p \in \{2, 3, 5, 11, 17\}$, either 16, or 32, it is possible to keep the top estimation of derivate length $G/\Phi(G)$ is equal to 5. Here $l_p(G)$ is the p -length of G .

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 28.03.2012