

УДК 517.955.8

П.Ф. Самусенко

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В работе построено асимптотическое решение первой краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с вырождением.

Введение

Исследованию возможности применения метода Фурье для решения краевых задач математической физики посвящены многочисленные работы как отечественных, так и зарубежных математиков. При этом до середины XX ст. в основном рассматривались указанные задачи с постоянными коэффициентами, что существенным образом упрощало их решение. Первые наиболее общие результаты для систем с переменными коэффициентами были получены О.А. Ладыженской, а именно: были установлены достаточные условия существования и единственности классического и обобщенного решения основных краевых задач в линейном случае. При этом обосновано применение метода Фурье для их решения [1]. Аналогичные результаты о существовании и единственности решений соответствующих задач для сингулярно возмущенных уравнений получены О.А. Олейник.

В данной работе рассматривается первая краевая задача для линейной сингулярно возмущенной гиперболической системы

$$\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon C(x, t) u, \quad t \in [0; T], \quad x \in [0; L], \quad (1)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = u(L, t, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(x, t)$ – квадратные матрицы 2-го порядка, $u(x, t, \varepsilon)$ – искомая 2-мерная вектор-функция, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 < 1$, причем матрица $B(t)$ вырождена на отрезке $[0; T]$. Такие системы уравнений ранее не рассматривались.

По постановке задача близка к исследованиям Ю.А. Митропольского и Г.П. Хомы регулярно возмущенных квазилинейных и нелинейных уравнений гиперболического типа [2]. С.Ф. Фещенко и Н.И. Шкиль при решении первой краевой задачи для гиперболических уравнений с медленно меняющимися коэффициентами использовали метод Фурье [3]. При этом вопрос о сходимости соответствующих рядов и возможности их почленного дифференцирования оставался открытым.

Классическое решение первой краевой задачи

Допустим, что выполняются условия:

1. $A(t)$, $B(t) \in C^\infty[0; T]$, $C(x, t) \in C^\infty(\bar{D})$, $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$.
2. $\varphi(x) \in C^4[0; L]$, $\psi(x) \in C^4[0; L]$.

3. $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(L) = 0$, $\psi^{(2k)}(0) = \psi^{(2k)}(L) = 0$, $k = 0, 1$.
4. Пучок матриц $A(t) - \lambda B(t)$, регулярный для всех $t \in [0; T]$, имеет один конечный и один бесконечный элементарный делитель.
5. $\lambda_0(t) > 0$, где $\lambda_0(t)$ – собственное значение матрицы $A(t)$ относительно $B(t)$.

Покажем, что существует единственное решение задачи (1) – (3). Для этого, следуя [3], будем искать решение системы (1) в виде ряда

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} z_s(t, \varepsilon) v_s(x) \quad (4)$$

(ниже будет доказана сходимость ряда (4) и возможность его двукратного дифференцирования (в работе [3] этот вопрос не рассматривается)), где $z_s(t, \varepsilon)$ – искомая 2-мерная вектор-функция, а $v_s(x)$ – скалярная функция, удовлетворяющая уравнению

$$v_s''(x) + \omega_s^2 v_s(x) = 0, \quad (5)$$

$\omega_s = \frac{s\pi}{L}$, с краевыми условиями $v_s(0) = v_s(L) = 0$. Тогда $v_s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \omega_s x$, $s \in N$.

Заметим, что при таком выборе постоянной, $\int_0^L v_k(x) v_s(x) dx = \delta_{ks}$,

где δ_{ks} – символ Кронекера.

Подставляя (4) в (1) с учетом (5), умножая полученное равенство на $v_s(x)$ и интегрируя обе части его по x в пределах от 0 до L , приходим к системе:

$$\varepsilon^2 B(t) z_s''(t) + \omega_s^2 A(t) z_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_{sk}(t) z_k, \quad s \in N, \quad (6)$$

где $C_{sk}(t) = \int_0^L C(x, t) v_k(x) v_s(x) dx$.

Из условий 1, 4 следует существование неособенных матриц $P(t)$, $Q(t)$, $t \in [0; T]$, та-

ких, что $P(t)B(t)Q(t) = H \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P(t)A(t)Q(t) = \Omega(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0(t) \end{pmatrix}$ [4].

При этом $P(t)$, $Q(t) \in C^\infty[0; T]$.

Полагая $z(t, \varepsilon) = Q(t)r_s(t, \varepsilon)$ и умножая обе части системы (6) слева на $P(t)$, получим

$$\varepsilon^2 H r_s''(t) + \omega_s^2 \Omega(t) r_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t) r_k + \varepsilon^2 D_1(t) r_s + \varepsilon^2 F(t) r_s', \quad (7)$$

где $D_{0sk}(t) = P(t)C_{sk}(t)Q(t)$, $s, k \in N$, $D_1(t) = -P(t)B(t)Q''(t)$,

$$F(t) = -2P(t)B(t)Q'(t).$$

Заметим, что элементы первых строк матриц $D_1(t)$ и $F(t)$ тождественно равны нулю.

6. Пусть $\frac{\partial C(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial C(L, t)}{\partial x} = 0$, $t \in [0; T]$.

Для оценки элементов $D_{0sk}(t)$ рассмотрим подробнее структуру матрицы $C_{sk}(t)$. Пусть $\{C(x, t)\}_{ij}$ – соответствующий элемент матрицы $C(x, t)$. Тогда

$$\{C_{sk}(t)\}_{ij} = \int_0^L \{C(x, t)\}_{ij} v_k(x) v_s(x) dx =$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L \{C(x, t)\}_{ij} \cos(\omega_k - \omega_s) x dx - \frac{1}{L} \int_0^L \{C(x, t)\}_{ij} \cos(\omega_k + \omega_s) x dx.$$

Зафиксируем t , $t \in [0; T]$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$|\{C_{sk}(t)\}_{ij}| \leq \frac{M}{(\omega_k - \omega_s)^4}, \quad i, j = 1, 2, \quad k \neq s, \quad k, s \in N,$$

причем постоянная M не зависит от k, s . В дальнейшем, если существенен только факт ограниченности, а не величина соответствующей постоянной, будем писать одну и ту же букву M .

Запишем систему (7) следующим образом:

$$\varepsilon^2 \tilde{H} r'' + \tilde{\Omega}(t) r = \varepsilon(\tilde{D}_0(t) + \varepsilon \tilde{D}_1(t)) r + \varepsilon^2 \tilde{F}(t) r', \quad (8)$$

где $r(t, \varepsilon)$ – бесконечномерный вектор с компонентами $r_s(t, \varepsilon)$, $\tilde{H} = \text{diag}\{H, H, \dots\}$, $\tilde{\Omega}(t) = \text{diag}\{\omega_1^2 \Omega(t), \omega_2^2 \Omega(t), \dots\}$, $\tilde{D}_0(t)$ – бесконечная матрица, состоящая из блоков $D_{0sk}(t)$, $s, k \in N$, $\tilde{D}_1(t) = \text{diag}\{D_1(t), D_1(t), \dots\}$, $\tilde{F}(t) = \text{diag}\{F(t), F(t), \dots\}$.

Решение системы (8) будем искать в виде

$$r(t, \varepsilon) = \Pi_+(t, \varepsilon) \xi_+(t, \varepsilon), \quad (9)$$

где $\Pi_+(t, \varepsilon)$ – бесконечная матрица, а $\xi_+(t, \varepsilon)$ – бесконечномерная вектор-функция, являющаяся решением системы

$$\varepsilon \frac{d\xi_+}{dt} = \Lambda_+(t, \varepsilon) \xi_+, \quad \xi_+(0, \varepsilon) = a, \quad (10)$$

a – бесконечномерный вектор, компоненты которого равны 1, $\Lambda_+(t, \varepsilon)$ – бесконечная диагональная матрица, при этом

$$\Pi_+(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \Pi_+^{(i)}(t), \quad \Lambda_+(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \Lambda_+^{(i)}(t). \quad (11)$$

Для определения матриц $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t)$, $i = \overline{0, m}$, подставим (9), учитывая (10), в систему (8). Тогда матрица при $\xi_+(t, \varepsilon)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \tilde{H} \Pi_+(t, \varepsilon) \Lambda_+^2(t, \varepsilon) + \tilde{\Omega}(t) \Pi_+(t, \varepsilon) - \varepsilon(\tilde{D}_0(t) + \varepsilon \tilde{D}_1(t)) \Pi_+(t, \varepsilon) - \varepsilon^2 \tilde{F}(t) \Pi_+'(t, \varepsilon) - \\ & - \varepsilon \tilde{F}(t) \Pi_+(t, \varepsilon) \Lambda_+(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{H} \Pi_+'(t, \varepsilon) + 2\varepsilon \tilde{H} \Pi_+'(t, \varepsilon) \Lambda_+(t, \varepsilon) + \varepsilon \tilde{H} \Pi_+(t, \varepsilon) \Lambda_+'(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Приравнявая в этой матрице коэффициенты при ε^i , $i = \overline{0, m}$, к нулевой матрице, получаем уравнения:

$$\tilde{H} \Pi_+^{(0)}(t) (\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \tilde{\Omega}(t) \Pi_+^{(0)}(t) = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{H} \Pi_+^{(i)}(t) (\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \tilde{\Omega}(t) \Pi_+^{(i)}(t) = \tilde{D}_0(t) \Pi_+^{(i-1)}(t) + \tilde{D}_1(t) \Pi_+^{(i-2)}(t) + \tilde{F}(t) (\Pi_+^{(i-2)}(t))' + \\ & + \tilde{F}(t) \sum_{j=0}^{i-1} \Pi_+^{(j)}(t) \Lambda_+^{(i-j-1)}(t) - \tilde{H} (\Pi_+^{(i-2)}(t))'' - 2\tilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} (\Pi_+^{(j)}(t))' \Lambda_+^{(i-j-1)}(t) - \tilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} \Pi_+^{(j)}(t) (\Lambda_+^{(i-j-1)}(t))' - \\ & - \tilde{H} \Pi_+^{(0)}(t) (\Lambda_+^{(0)}(t) \Lambda_+^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1} \Lambda_+^{(j)}(t) \Lambda_+^{(i-j)}(t)) - \tilde{H} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} \Pi_+^{(k)}(t) \Lambda_+^{(j)}(t) \Lambda_+^{(i-k-j)}(t), \end{aligned} \quad (13)$$

$i = \overline{1, m}$, $\Pi_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $\Lambda_+^{(k)}(t) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $k < 0$.

Докажем разрешимость матричных уравнений (12), (13). Пусть $p_{l+}^{(0)}(t)$, $l \in N$, – столбцы матрицы $\Pi_+^{(0)}(t)$, $\Lambda_+^{(0)}(t) = \text{diag}\{0, \lambda_{1+}^{(0)}(t), 0, \lambda_{2+}^{(0)}(t), \dots\}$. Тогда систему (12) можно записать следующим образом: $(\tilde{\Omega}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 \tilde{H}) p_{2l+}^{(0)}(t) = 0$,

$$\tilde{\Omega}(t) p_{2l-1,+}^{(0)}(t) = 0, \quad l \in N.$$

Положим

$$\lambda_{l+}^{(0)}(t) = i\omega_l \sqrt{\lambda_0(t)}, \quad l \in N, \quad i^2 = -1,$$

$$p_{2l-1,+}^{(0)}(t) \equiv 0, \quad \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j-1} \equiv 0, \quad t \in [0; T], \quad j, l \in N,$$

$$\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j} \equiv 0, \quad t \in [0; T], \quad j \neq l, \quad j, l \in N,$$

$\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}, \quad l \in N$, определим ниже.

По построению матрицы $\Pi_+^{(0)}(t)$ и $\Lambda_+^{(0)}(t)$ диагональные. А потому соответствующие произведения бесконечных матриц в (12) существуют и являются диагональными матрицами.

Из системы (13) получаем:

$$(\tilde{\Omega}(t) + (\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2 \tilde{H}) p_{2l+}^{(i)}(t) = b_{2l+}^{(i)}(t),$$

$$\tilde{\Omega}(t) p_{2l-1,+}^{(i)}(t) = b_{2l-1,+}^{(i)}(t),$$

$l \in N$, где

$$\begin{aligned} b_{2l+}^{(i)}(t) = & \tilde{D}_0(t) p_{2l+}^{(i-1)}(t) + \tilde{D}_1(t) p_{2l+}^{(i-2)}(t) + \tilde{F}(t) (p_{2l+}^{(i-2)}(t))' + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) \tilde{F}(t) p_{2l+}^{(j)}(t) - \\ & - \tilde{H} (p_{l+}^{(i-2)}(t))'' - 2\tilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} (p_{2l+}^{(j)}(t))' \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) - \tilde{H} \sum_{j=0}^{i-1} p_{2l+}^{(j)}(t) (\lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t))' - \\ & - \tilde{H} p_{2l+}^{(0)}(t) (2\lambda_{l+}^{(0)}(t) \lambda_{l+}^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-j)}(t)) - \tilde{H} \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} p_{2l+}^{(k)}(t) \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t), \end{aligned}$$

$$b_{2l-1,+}^{(i)}(t) = \tilde{D}_0(t) p_{2l-1,+}^{(i-1)}(t) + \tilde{D}_1(t) p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t) + \tilde{F}(t) (p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t))' - \tilde{H} (p_{2l-1,+}^{(i-2)}(t))'',$$

$l \in N, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{где} \quad p_{l+}^{(i)}(t), \quad l \in N, \quad i = \overline{1, m}, \quad - \text{ столбцы матрицы } \Pi_+^{(i)}(t),$
 $\Lambda_+^{(i)}(t) = \text{diag}\{0, \lambda_{1+}^{(i)}(t), 0, \lambda_{2+}^{(i)}(t), \dots\}.$

Тогда

$$p_{2l-1,+}^{(i)}(t) \equiv 0, \quad t \in [0; T],$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1} = \frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1}}{\omega_j^2},$$

$i = \overline{1, m}, \quad j, l \in N,$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j} = \frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j}}{\lambda_0(t)(\omega_j^2 - \omega_l^2)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j \neq l, \quad j, l \in N,$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2l} \equiv 0, \quad t \in [0; T], \quad i = \overline{1, m}, \quad l \in N,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{l+}^{(i)}(t) = & \frac{1}{2\lambda_{l+}^{(0)}(t) \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}} \left(\sum_{h=1}^{\infty} (\{\tilde{D}_0(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-1)}(t)\}_h + \right. \\ & + \{\tilde{D}_1(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}_h + \{\tilde{F}(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}'_h + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) \{\tilde{F}(t)\}_{2l,h} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}_h) - \\ & - \{p_{2l+}^{(i-2)}(t)\}_{2l}'' - 2 \sum_{j=0}^{i-1} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}'_{2l} \lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t) - \sum_{j=0}^{i-1} \{p_{2l+}^{(j)}(t)\}_{2l} (\lambda_{l+}^{(i-j-1)}(t))' - \\ & \left. - \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-j)}(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{i-k} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2l} \lambda_{l+}^{(j)}(t) \lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t) \right), \end{aligned}$$

$i = \overline{1, m}, \quad l \in N.$

Формулы для определения $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{1, m}$ получены при условии, что соответствующие бесконечные матрицы в системе (13) существуют. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Допустим, что $p_{l+}^{(0)}(t) \equiv \text{const}$, $t \in [0; T]$, $l \in N$. Будем считать, что пара натуральных чисел (j, l) принадлежит множеству A ($(j, l) \in A$), если $j = 2q - 1, 2q$; $l = 2r - 1, 2r$; $q \neq r$, $q, r \in N$.

По построению

$$|\{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(0)}\}_k| \leq \begin{cases} \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j - \omega_l)^4}, & (k, 2l) \in A, \\ M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, & (k, 2l) \notin A, k = 2j - 1, 2j; j, l \in N, \end{cases} \quad (14)$$

причем постоянная M не зависит от j, l .

Тогда $p_{l+}^{(1)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(1)}(t)$, $l \in N$, для всех $t \in [0; T]$ существуют и

$$|\{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j-1}| \leq \begin{cases} \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4}, & (2j - 1, 2l) \in A, \\ \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2}, & (2j - 1, 2l) \notin A, j, l \in N; \end{cases}$$

$$|\{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j}| \leq \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4}, \quad (2j, 2l) \in A, j, l \in N;$$

$$|\lambda_{l+}^{(1)}(t)| \leq M, \quad l \in N,$$

постоянная M не зависит от j, l .

Используя метод математической индукции, доказываем существование $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{2, m}$. При этом

$$|\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1}| \leq \begin{cases} \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4}, & (2j - 1, 2l) \in A, \\ \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_j^2 \omega_l}, & (2j - 1, 2l) \notin A, j, l \in N; \end{cases} \quad (15)$$

$$|\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j}| \leq \frac{M |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4}, \quad (2j, 2l) \in A, j, l \in N; \quad (16)$$

$$|\lambda_{l+}^{(i)}(t)| \leq M, \quad l \in N, \quad (17)$$

$i = \overline{2, m}$; постоянная M не зависит от j, l .

Действительно, допустим, что оценки (15) – (17) верны при $i = \overline{2, k}$, $k \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1} &= \sum_{h=1}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h = \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \notin A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h = \\ &= \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p-1, p \in N}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p, p \in N}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j-1} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1} + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j} = \\
& = \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p-1, p \in N \\ (2p-1,2l) \in A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p-1, p \in N \\ (2p-1,2l) \notin A}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \\
& + \sum_{\substack{h=1 \\ (2j-1,h) \in A \\ h=2p, p \in N}}^{\infty} \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,h} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j-1} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1} + \{\tilde{D}_0(t)\}_{2j-1,2j} \{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& |\{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}| \leq K_1 |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}| \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j, p \neq l}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_j - \omega_p)^4 \omega_p^2 (\omega_p - \omega_l)^4} + \right. \\
& + \frac{1}{\omega_l^2 (\omega_j - \omega_l)^4} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq j, p \neq l}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_j - \omega_p)^4 |\omega_p^2 - \omega_l^2| (\omega_p - \omega_l)^4} + \frac{1}{\omega_j^2 (\omega_j - \omega_l)^4} + \\
& \left. + \frac{1}{|\omega_j^2 - \omega_l^2| (\omega_j - \omega_l)^4} \right) \leq \frac{K_2 |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{(\omega_j - \omega_l)^4}
\end{aligned}$$

для всех $(2j-1, 2l) \in A$, $j, l \in N$ (постоянные K_1 , K_2 не зависят от $j, l \in N$). Если же $(2j-1, 2l) \notin A$, $j, l \in N$, то аналогично получаем

$$|\{\tilde{D}_0(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\}_{2j-1}| \leq \frac{M_2 |\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|}{\omega_l}.$$

Откуда и следует (15) при $i = k + 1$. Аналогично показываем правильность оценок (16), (17).

Таким образом, по принципу математической индукции, для всех $i = \overline{2, m}$, $j, l \in N$ имеют место оценки (15)–(17).

Пусть $w_+(t, \varepsilon) = \Pi_+(t, \varepsilon)\xi_+(t, \varepsilon)$. Положив $\lambda_{l-}^{(0)}(t) = -i\omega_l\sqrt{\lambda_0(t)}$, $l \in N$, $i^2 = -1$, аналогично определяем $\Pi_-(t, \varepsilon)$, $\Lambda_-(t, \varepsilon)$, $\xi_-(t, \varepsilon)$ и $w_-(t, \varepsilon)$.

Построим вектор-функцию

$$u^{(m)}(x, t, \varepsilon) = Q(t) \sum_{s=1}^{\infty} (w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon)) v_s(x), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
w_{s+}(t, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} \{w_+(t, \varepsilon)\}_{2s-1} \\ \{w_+(t, \varepsilon)\}_{2s} \end{pmatrix}, s \in N, \\
\{w_+(t, \varepsilon)\}_j &= \sum_{l=1}^{\infty} \{\Pi_+(t, \varepsilon)\}_{jl} \{\xi_+(t, \varepsilon)\}_l, j = 2s-1, 2s, s \in N.
\end{aligned}$$

Такую же структуру имеет $w_{s-}(t, \varepsilon)$.

Величины $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ и $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$, $l \in N$, находим из системы

$$\begin{aligned}
\{w_+(0, \varepsilon)\}_{2l} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2l} &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{2j} \{a_l\}_j, \\
(\{w_+(t, \varepsilon)\}_{2l} + \{w_-(t, \varepsilon)\}_{2l})'_{t=0} &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{2j} \{b_l\}_j - \\
&- \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)Q'(0)\}_{2j} (\{w_+(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j}),
\end{aligned} \quad (19)$$

$l \in N$, где $\{a_l\}_j$ и $\{b_l\}_j$ – компоненты векторов $a_l = \int_0^L \varphi(x) v_l(x) dx$ и $b_l = \int_0^L \psi(x) v_l(x) dx$ соответственно, $l \in N$.

По формулам Крамера получаем

$$\begin{aligned} \{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l} &= f_1(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}), \\ \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l} &= f_2(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}), \end{aligned} \quad (20)$$

$l \in N$.

По построению

$$\begin{aligned} \|f_i(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l})\| &\leq \frac{M_1}{\omega_l^4} + \varepsilon M_2 \left(|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}| + |\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}| + \frac{1}{\omega_l^4} + \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq l}}^{\infty} \left(\frac{|\{p_{2h+}^{(0)}\}_{2h}| + |\{p_{2h-}^{(0)}\}_{2h}|}{|\omega_l^2 - \omega_h^2| (\omega_l - \omega_h)^4} + \frac{\omega_h}{\omega_l} \left(\frac{|\{p_{2h+}^{(0)}\}_{2h}| + |\{p_{2h-}^{(0)}\}_{2h}|}{|\omega_l^2 - \omega_h^2| (\omega_l - \omega_h)^4} + \frac{|\{p_{2h+}^{(0)}\}_{2h}| + |\{p_{2h-}^{(0)}\}_{2h}|}{\omega_l^2 (\omega_l - \omega_h)^4} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$, постоянные M_1, M_2 не зависят от l .

На множествах

$$S_{l4} = \left\{ (\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}) \in R^2 : \max\{|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, |\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}|\} \leq \frac{M}{\omega_l^4} \right\}, l \in N,$$

$M < M_1$, функции $f_1(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l})$ и $f_2(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l})$ удовлетворяют условиям теоремы Банаха [5]. А потому для определения $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ и $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$ воспользуемся методом последовательных приближений. При этом

$$\|p_{2l+}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^4}, \|p_{2l-}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^4}, l \in N$$

(постоянная M не зависит от l).

Допустим, что имеют место следующие условия:

7. Компоненты $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}, l \in N$, решения системы (20) отличны от нуля.

8.

$$\begin{aligned} \{w_+(0, \varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2l-1} &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{a_l\}_j, \\ (\{w_+(t, \varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(t, \varepsilon)\}_{2l-1})'_{|t=0} &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{b_l\}_j - \\ - \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)Q'(0)\}_{1j} (\{w_+(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j} + \{w_-(0, \varepsilon)\}_{2(l-1)+j}), \end{aligned}$$

$l \in N$.

Замечание. Условие 8 выполняется если, например,

$$\begin{aligned} \frac{d^k \{\tilde{D}_0^{(0)}(0)\}_{2l-1, 2j}}{dt^k} &= 0, k = 0, 1; j, l \in N, \\ \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{a_l\}_j &= \sum_{j=1}^2 \{Q^{-1}(0)\}_{1j} \{b_l\}_j = 0, l \in N, \{Q^{-1}(0)Q'(0)\}_{12} = 0. \end{aligned}$$

При таком выборе $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ и $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$ ряд (18) сходится абсолютно и равномерно в прямоугольнике $\bar{D}$. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (18)

до двух раз включительно; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно для всех $(x, t) \in \bar{D}$.

По построению $u^{(m)}(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u^{(m)}(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = \psi(x)$.

Вектор-функция $w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе (7) с точностью $O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$,

$s \in N$. Заметим, что постоянная k_0 в $O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right)$ не зависит от ε , s .

Пусть

$$r_s(t, \varepsilon) = w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon) + y_s(t, \varepsilon). \quad (21)$$

Тогда

$$\varepsilon^2 H y_s'' + \omega_s^2 \Omega(t) y_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t) y_k + \varepsilon^2 D_1(t) y_s + \varepsilon^2 F(t) y_s' + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right), s \in N. \quad (22)$$

Положим

$$y_s(0, \varepsilon) = 0, y_s'(0, \varepsilon) = 0, s \in N. \quad (23)$$

Запишем систему (22) в координатной форме:

$$y_{s1}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{D_{0sk}(t)\}_{1j} y_{kj} + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right) \right), \quad (24)$$

$$\varepsilon^2 y_{s2}'' + \omega_s^2 \lambda_0(t) y_{s2} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{D_{0sk}(t)\}_{2j} y_{kj} + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^2 (\{D_1(t)\}_{2j} y_{sj} + \{F(t)\}_{2j} y_{sj}') + O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s^3}\right). \quad (25)$$

$s \in N$. Учитывая (23), получаем

$$y_{s2}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega_s} \int_0^t Y_s(t, \tau, \varepsilon) \left(\eta(\tau) y_{s2} + \left(\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \{D_{0sk}(\tau)\}_{2j} y_{kj} + \sum_{j=1}^2 (\{D_1(\tau)\}_{2j} - \{F'(\tau)\}_{2j}) y_{sj} + O\left(\frac{\varepsilon^{m-1}}{\omega_s^3}\right) \right) \right) - (Y_s(t, \tau, \varepsilon))'_{\tau} \sum_{j=1}^2 \{F(\tau)\}_{2j} y_{sj} d\tau, \quad (26)$$

$s \in N$, где

$$Y_s(t, \tau, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}} \sin \frac{\omega_s \psi(t, \tau)}{\varepsilon}, \psi(t, \tau) = \int_{\tau}^t \sqrt{\lambda_0(\tau)} d\tau,$$

$$\eta(t) = \frac{\lambda_0''(t)}{4\lambda_0(t)} - \frac{5}{16} \left(\frac{\lambda_0'(t)}{\lambda_0(t)} \right)^2 - \text{дифференциальный инвариант [6].}$$

Допустим выполнение таких условий:

$$9. \frac{d^k \{\tilde{D}_0(0)\}_{2l-1,j}}{dt^k} = 0, k = 0, 1; j, l \in N.$$

$$10. \frac{Lk_1 T}{\pi^4 \sqrt{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}} \left(1 + 16 \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \right) \leq \frac{d}{4}, d < 1, 0 \leq \tau \leq t \leq T, \text{ где}$$

$$\|D_{0ss}(t, \varepsilon)\| \leq k_1, \|D_{0sk}(t)\| \leq \frac{k_1}{(\omega_s - \omega_k)^4}, s \neq k, s, k \in N.$$

$$11. T \sqrt[4]{\frac{\lambda_0(\tau)}{\lambda_0(t)}} |\{F(\tau)\}_{2j}| \leq \frac{d}{4}, j=1,2, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T.$$

Тогда для достаточно больших k_2 ,

$$k_2 > \frac{k_0 L T}{\pi(1-d) \min_{0 \leq \tau \leq t \leq T} \sqrt[4]{\lambda_0(\tau) \lambda_0(t)}},$$

оператор, определяемый с помощью (24), (26), отображает выпуклое компактное множество D_{s4} ,

$$D_{s4} = \left\{ y_s(t, \varepsilon) \in C[0; T] : \|y_s(t, \varepsilon)\| \leq \frac{k_2 \varepsilon^m}{\omega_s^4} \right\}, s \in N, \varepsilon \in [0; \varepsilon_1],$$

в себя и есть непрерывным на нем. А потому он имеет неподвижные точки на множестве D_{s4} [5]. Таким образом, система (24), (26) совместна. При этом имеют место равенства (23).

Используя метод доказательства от противного, показываем единственность найденного решения системы (24), (26) [7]. Из полученных оценок для функций $y_{si}(t, \varepsilon)$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} y_s(t, \varepsilon) v_s(x) \quad (27)$$

в прямоугольнике $\bar{D}$. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (27) по t и x до двух раз включительно; полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{D}$.

По построению

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 B(t) \sum_{k=1}^{\infty} z_k''(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx + A(t) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 z_k(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx \equiv \\ \equiv \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^L C(x, t) v_k(x) v_s(x) dx \right) z_k(t, \varepsilon), s \in N, \end{aligned}$$

или

$$\int_0^L (\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon)) v_s(x) dx \equiv 0, s \in N,$$

где вектор-функция $u(x, t, \varepsilon)$ определяется по формуле (4).

$$\text{Положим } q(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon).$$

Рассмотрим ряд $\sum_{s=1}^{\infty} q_s(t, \varepsilon) v_s(x)$, где $q_s(t, \varepsilon) = \int_0^L q(x, t, \varepsilon) v_s(x) dx, s \in N$.

По построению $q_s(t, \varepsilon) \equiv 0, t \in [0; T], s \in N$.

Так как вектор-функция $q(x, t, \varepsilon)$ непрерывна по переменной $x, x \in [0; L], (t, \varepsilon)$ считаем параметрами и $q(0, t, \varepsilon) = q(L, t, \varepsilon) = 0, t \in [0; T]$, то, продолжая нечетным способом компоненты $q(x, t, \varepsilon)$ на отрезок $[-L; 0]$, приходим к выводу, что $q(x, t, \varepsilon) \equiv 0, (x, t) \in \bar{D}$ [8].

Таким образом, вектор-функция (4) в прямоугольнике $\bar{D}$ – решение первой краевой задачи (1) – (3), причем

$$\|u(x, t, \varepsilon) - u^{(m)}(x, t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^m). \quad (28)$$

Теорема 1. Пусть $A(t), B(t) \in C^{m+3}[0; T]$, $C(x, t) \in C^{m+3}(\bar{D})$ и имеют место условия 2–11. Тогда существует число ε_1 , $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, такое, что для всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача (1)–(3) в прямоугольнике $\bar{D}$ имеет единственное решение (4) для которого правильна оценка (28).

Обобщенное решение первой краевой задачи

В части 2 мы построили классическое решение задачи (1)–(3). При этом условия 1–3, 6 позволяли дважды почленно дифференцировать соответствующие ряды.

Допустим теперь, что имеют место следующие условия:

12. $\varphi(x) \in C^2[0; L]$, $\psi(x) \in C^2[0; L]$;

13. $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Тогда аналогично показываем, что на множествах

$$S_{l2} = \left\{ (\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}) \in R^2 : \max\{|\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}|, |\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}|\} \leq \frac{M}{\omega_l^2} \right\}, l \in N,$$

система (20) имеет единственное решение $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$.

При этом $\|p_{2l+}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^2}$, $\|p_{2l-}^{(0)}\| \leq \frac{M}{\omega_l^2}$, $l \in N$

(постоянная M не зависит от l).

В данном случае вектор-функция $w_{s+}(t, \varepsilon) + w_{s-}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе (7)

с точностью $O\left(\frac{\varepsilon^{m+1}}{\omega_s}\right)$, $s \in N$.

14. Пусть $\frac{Lk_1 T}{\pi^4 \sqrt{\lambda_0(t)\lambda_0(\tau)}} \left(1 + 4\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\right) \leq \frac{d}{4}$, $d < 1$, $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

Тогда для решения $y_{si} = y_{si}(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, системы (24), (26) имеет место оценка

$y_{si}(t, \varepsilon) = O\left(\frac{\varepsilon^m}{\omega_s^2}\right)$, $s \in N$.

По построению

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 B(t) \sum_{k=1}^m z_k''(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx + A(t) \sum_{k=1}^m \omega_k^2 z_k(t, \varepsilon) \int_0^L v_k(x) v_s(x) dx \equiv \\ \equiv \varepsilon \sum_{k=1}^\infty \left(\int_0^L C(x, t) v_k(x) v_s(x) dx \right) z_k(t, \varepsilon), s = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

т.е. $\int_0^L (\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon)) v_s(x) dx \equiv 0$, $s = \overline{1, m}$,

$$u_m(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^m z_k(t, \varepsilon) v_k(x).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^\infty q_{ms}(t, \varepsilon) v_s(x), \quad (29)$$

где

$$q_{ms}(t, \varepsilon) = \int_0^L q_m(x, t, \varepsilon) v_s(x) dx, s \in N,$$

$$q_m(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} - A(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon).$$

По построению $q_{ms}(t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $s = \overline{1, m}$. Оценим остальные коэффициенты $q_{ms}(t, \varepsilon)$, $s \geq m+1$. Для этого заметим, что

$$q_{m+1}(x, t, \varepsilon) = q_m(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^2 B(t) z''_{m+1}(t, \varepsilon) v_{m+1}(x) - A(t) z_{m+1}(t, \varepsilon) v''_{m+1}(x)$$

Так как $q_{m+1,s}(t, \varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0; T]$, $s = \overline{1, m+1}$, то

$$q_{m,m+1}(t, \varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t) z''_{m+1}(t, \varepsilon) + \omega_{m+1}^2 A(t) z_{m+1}(t, \varepsilon)).$$

Таким образом, $\|q_{m,m+1}(t, \varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega_{m+1}^2}$ с постоянной M , не зависящей от m , и, вообще,

$$\text{учитывая, что } q_{m+i}(x, t, \varepsilon) = q_m(x, t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^i (\varepsilon^2 B(t) z''_{m+j}(t, \varepsilon) v_{m+j}(x) - A(t) z_{m+j}(t, \varepsilon) v''_{m+j}(x)),$$

$$\text{откуда } q_{m,m+i}(x, t, \varepsilon) = -(\varepsilon^2 B(t) z''_{m+i}(t, \varepsilon) + \omega_{m+i}^2 A(t) z_{m+i}(t, \varepsilon)), i \in N,$$

получаем $\|q_{ms}(t, \varepsilon)\| \leq \frac{M}{\omega_s^2}$, $s \geq m+1$, где постоянная M не зависит от m, s .

Таким образом, ряд (29) в прямоугольнике $\bar{D}$ сходится абсолютно и равномерно к функции $q_m(x, t, \varepsilon)$ [9].

Поскольку $u_m(x, t, \varepsilon)$ есть решение задачи

$$\varepsilon^2 B(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial t^2} = A(t) \frac{\partial^2 u_m(x, t, \varepsilon)}{\partial x^2} + \varepsilon C(x, t) u(x, t, \varepsilon) + \sum_{s=m+1}^{\infty} q_{ms}(t, \varepsilon) v_s(x),$$

$$u_m(0, t, \varepsilon) = u_m(L, t, \varepsilon) = 0,$$

$$u_m(x, 0, \varepsilon) = \varphi_m(x), \frac{\partial u_m(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = \psi_m(x), \text{ где } \varphi_m(x) = \sum_{s=1}^m a_s v_s(x), \psi_m(x) = \sum_{s=1}^m b_s v_s(x), \text{ то вектор-}$$

функция (4) в прямоугольнике $\bar{D}$ будет обобщенным решением задачи (1)–(3) [10].

Теорема 2. Пусть $A(t), B(t) \in C^{m+2}[0; T]$, $C(x, t) \in C^{m+2}(\bar{D})$ и имеют место условия 4, 5, 7–9, 11–14. Тогда существует число ε_1 , $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, такое, что для всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ задача (1)–(3) в прямоугольнике $\bar{D}$ имеет единственное обобщенное решение (4), для которого правильна оценка (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О.А. Ладыженская. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953. – 279 с.
2. Митропольский, Ю.А. Асимптотические методы исследований квази-волновых уравнений гиперболического типа / Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома, М.И. Громьяк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 232 с.
3. Фещенко, С.Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Л.Д. Николенко. – Киев : Наук. думка, 1968. – 248 с.
4. Шкиль, Н.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – Киев : Высшая школа, 1991. – 207 с.

5. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
6. Павлюк, И.А. Асимптотические свойства решений неавтономных систем дифференциальных уравнений второго порядка / И.А. Павлюк. – Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1970. – 208 с.
7. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 468 с.
8. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 656 с.
9. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 936 с.
10. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М. : Наука, 1966. – 444 с.

P.F. Samusenko. Asymptotic Representation of the Solutions Singularly Perturbed System of Hyperbolic Partial Differential Equations with Degeneration

The asymptotic solution first boundary value problem for the linear singularly perturbed system of hyperbolic partial differential equations with degeneration is constructed in paper.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.01.2012