УДК 517.954 DOI 10.63874/2218-0303-2025-1-90-97

Александр Иванович Басик[1], Денис Александрович Басик[2],
Руслан Николаевич Козинец[3]
[1]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. фундаментальной математики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2, 3]студент 3-го курса физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Aliaxandr Basik[1], Denis Basik[2], Ruslan Kozinets[3]
[1]Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
[2, 3]3-d Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: [1]alex-basik@yandex.ru; [2]2018asada@gmail.com; [3]ruslankozinets.rk@gmail.com

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ БИГАРМОНИЧЕСКОГО ТИПА В $\mathbf{R}^3$*

Приводится пример эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$. *Для этой системы изучается вопрос регуляризуемости канонической краевой задачи Римана – Гильберта в произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей. Доказывается, что в той точке границы области, в которой внутренняя нормаль параллельна оси* Ox_1, *нарушается условие регуляризуемости рассматриваемой краевой задачи. Также показывается, что нарушение условия Я. Б. Лопатинского вызвано тем, что соответствующая предельная задача не является однозначно разрешимой в пространстве устойчивых решений.*

Ключевые слова: *эллиптическая система, краевая задача Римана – Гильберта, условие Лопатинского.*

About Riemann – Hilbert Boundary Value Problem for One System of four Equations of Biharmonic Type in $\mathbf{R}^3$

The paper gives an example of elliptic system of four first order biharmonic type differential equations in $\mathbf{R}^3$. *We study the regularizability of the canonical Riemann – Hilbert boundary value problem for this system in an arbitrary bounded simply connected domain with smooth boundary. It is proved that the regularizability condition of the boundary value problem under consideration is not satisfied at the point of the boundary of the domain in which the internal normal is parallel to the* Ox_1 *axis. It is also shown that the violation of the Lopatinski condition is because the corresponding limit problem is not uniquely solvable in the space of stable solutions.*

Key words: *elliptic system, Riemann – Hilbert boundary value problem, Lopatinski condition.*

Введение

Рассмотрим в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ эллиптическую систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$A_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+A_3\frac{\partial U}{\partial x_3}=0, \tag{1}$$

где $U=\left(u_1(x),u_2(x),u_3(x),u_4(x)\right)^T$ – искомая четырехкомпонентная вектор-функция; $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\mathbf{R}^3$; T означает транспонирование; A_1, A_2, A_3 – постоянные квадратные действительные матрицы четвертого порядка.

Работа подготовлена в рамках выполнения НИР «Краевая задача Римана – Гильберта для одной эллиптической системы четырех дифферинциальных уравнений первого порядка в трехмерном пространстве» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (номер государственной регистрации 20240574 от 17.04.2024).

Известным представителем систем вида (1) является система Моисила – Теодореску, которая является а -налогом системы Коши – Римана в трехмерном пространстве и связана со статическими пространственными уравнениями Ламе [1; 2].

А. Т. Уссом [3] был введен класс многомерных аналогов системы Коши – Римана. Применительно к рассматриваемому случаю система (1) называется трехмерным аналогом системы Коши – Римана (ТКР-системой), если каждая компонента произвольного непрерывно дифференцируемого ее решения удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbf{R}^3$. Необходимым и достаточным условием принадлежности системы (1) ТКР-типу является невырожденность матриц A_j (j = 1, 2, 3) и выполнение матричных равенств

$$A_k^{-1}A_j + A_j^{-1}A_k = 0, \ (k, j = 1, 2, 3, k \neq j). \tag{2}$$

Отметим также, что при исследовании характера разрешимости краевой задачи Гильберта в работах [4, 5] изучались свойства решений нормальных эллиптических систем в $\mathbf{R}^n$. Гомотопическая классификация эллиптических псевдосимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ проведена в [6]. Ранее также рассматривались эллиптические системы кососимметрического [7] и ортогонального [8] типов в $\mathbf{R}^3$.

Определение 1. *Если каждая компонента* $u_k(x)$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$ *произвольного непрерывно дифференцируемого решения* U *системы* (1) *удовлетворяет бигармоническому уравнению* $\Delta^2 u = 0$, *то система* (1) *называется системой бигармонического типа в* $\mathbf{R}^3$ ($\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – *оператор Лапласа в* $\mathbf{R}^3$).

Очевидно, что каждая гармоническая функция является бигармонической. Поэтому закономерен вопрос существования систем (1) бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$, не принадлежащих классу ТКР. В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос.

Пример системы (1) бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$

Рассмотрим систему (1) со следующими матричными коэффициентами: $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Характеристическая матрица системы (1) с коэффициентами (3) имеет вид

$$A(\xi) = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & 2\xi_2 - \xi_3 & 0 \\ \xi_2 - \xi_3 & \xi_1 & 0 & -\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_3 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2 - 2\xi_3 & \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\det A(\xi) = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)^2,$$

и, следовательно, при каждом ненулевом векторе $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3$ характеристическая матрица $A(\xi)$ системы (1) с коэффициентами (3) является невырожденной. Последнее означает, что рассматриваемая система является эллиптической.

Поскольку

$$A_3^{-1}A_1 + A_1^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то рассматриваемая система не является ТКР-системой.

Теорема 2. *Система* (1) *с коэффициентами* (3) *является системой бигармонического типа в* $\mathbf{R}^3$.

Доказательство.

Поскольку система (1) с постоянными коэффициентами является эллиптической, то каждое непрерывно дифференцируемое решение этой системы является бесконечно дифференцируемым [9, с. 141]. Пусть вектор-функция $U \in C^1(\Omega)$ является в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ решением системы (1). Применяя к обеим частям тождества

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} \equiv 0$$

дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

получим

$$\begin{cases} \Delta u_1 + 3(u_3)_{x_1x_2} \equiv 0, \\ \Delta u_2 - 3(u_1)_{x_1x_3} - 3(u_4)_{x_1x_2} \equiv 0, \\ \Delta u_3 \equiv 0, \\ \Delta u_4 - 3(u_3)_{x_1x_3} \equiv 0 \end{cases} \quad (x \in \Omega). \tag{4}$$

Тогда:

a) из третьего равенства формулы (4) получим, что

$$\Delta^2 u_3 = \Delta(\Delta u_3) = 0;$$

b) из первого равенства (4) с учетом третьего получим, что

$$\Delta^2 u_1 = -3(\Delta u_3)_{x_1x_2} = 0;$$

c) из четвертого равенства (4) с учетом третьего получим, что

$$\Delta^2 u_4 = 3(\Delta u_3)_{x_1x_3} = 0;$$

d) из второго равенства (4) с учетом первого и четвертого равенств, а также теоремы о независимости смешанной производной гладкой функции от порядка дифференцирования получим, что

$$\Delta^2 u_2 = 3(\Delta u_1)_{x_1x_3} + 3(\Delta u_4)_{x_1x_2} = -9(u_3)_{x_1x_3x_1x_2} + 9(u_3)_{x_1x_3x_1x_2} = 0.$$

Таким образом, каждая компонента вектор-функции U является бигармонической функцией в области Ω. Согласно определению 1, рассматриваемая система является системой бигармонического типа в $\mathbf{R}^3$. Теорема доказана.

Пример системы бигармонического типа в $\mathbf{R}^4$ приведен в [10].

Задача Римана – Гильберта

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченная, гомеоморфная шару область, границей $\partial\Omega$ которой является гладкая поверхность Ляпунова. Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в нахождении ее решения класса $C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($\alpha \in (0;1]$), удовлетворяющего граничным условиям:

$$\begin{matrix} (u_1m_1 + u_2m_2 + u_3m_3 + u_4m_4)|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3 + u_4n_4)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{matrix} \quad (y \in \partial\Omega).$$

Здесь f_1, f_2, m_k, $n_k : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру с показателем α функции ($k = \overline{1,4}$).

В теории аналитических функций задача Римана – Гильберта состоит в нахождении в ограниченной односвязной области голоморфной функции по известной на границе этой области линейной комбинации ее действительной и мнимой части.

Эта задача известна также как задача Гильберта и достаточно подробно изучена (см. [11, с. 217] и имеющуюся там библиографию).

В многомерном случае первые результаты в исследовании задачи Римана – Гильберта были получены В. И. Шевченко для системы Моисила – Теодореску [12]. Им было выведено условие, обеспечивающее регуляризуемость (краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского [13]) краевой задачи в произвольной односвязной области, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач и вычислен индекс регуляризуемой задачи. В частности, задача Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску с граничным условием

$$u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \ \ (u_2\nu_1 + u_3\nu_2 + u_4\nu_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y). \qquad (5)$$

является регуляризуемой, где $\nu : \partial\Omega \to \mathbf{R}^3$ – единичное поле внутренних нормалей на поверхности $\partial\Omega$.

Для эллиптических систем ортогонального типа, рассмотренных в [8], задача с граничными условиями вида (5) также является регуляризуемой. Действительно, векторные поля L и P ([8, формула (4)]) в этом случае задаются равенствами

$$L(y) = \nu(y), \ P(y) = \nu(y) + [\nu(y); a] + a \cdot \langle \nu(y); a \rangle,$$

и, следовательно, в каждой точке $y \in \partial\Omega$ имеем

$$\langle \nu(y); P(y) \rangle = 1 + \langle \nu(y); a \rangle^2 > 0.$$

Согласно теореме 1 [8], задача Римана – Гильберта для систем, рассмотренных в статье [8], и граничным условием (5), является регуляризуемой. В связи с вышесказанным будем называть граничные условия вида (5) каноническими.

Теорема 3. *Задача Римана – Гильберта для системы* (1) *с коэффициентами* (3) *и граничными условиями* (5) *не является регуляризуемой.*

Доказательство.

Напомним, что регуляризуемость краевой задачи для эллиптической системы (1) и граничных условий (5) означает, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом векторе τ касательном к границе $\partial\Omega$ в точке y ранг матрицы Я. Б. Лопатинского краевой задачи (1), (5)

$$L(y,\tau):=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \nu_1(y) & \nu_2(y) & \nu_3(y)\end{pmatrix}\cdot\int_\gamma A^{-1}(\lambda\nu(y)+\tau(y))d\lambda \qquad (6)$$

является максимальным [13]. В формуле (6) через $\nu=\nu(y)=(\nu_1(y),\nu_2(y),\nu_3(y))$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y, $A(\xi)$ – характеристическая матрица системы (1), и интегрирование ведется по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости и охватывающему находящийся там λ-корень уравнения

$$\det A(\lambda\nu(y)+\tau(y))=0.$$

Вычислим матрицу Лопатинского задачи (1), (2) в той точке $\tilde{y}$ границы $\partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль есть вектор $\nu(\tilde{y})=(1{,}0{,}0)$. Пусть τ – любой ненулевой касательный к $\partial\Omega$ в точке $\tilde{y}$ вектор (т. е. $\tau\in T_{\tilde{y}}\partial\Omega\setminus\{0\}$) и контур γ охватывает точку $i|\tau|$. Применяя основную теорему о вычетах, получим

$$L(\tilde{y},\tau)=\frac{\pi i}{2|\tau|^3}\left(\begin{array}{c:c:c:c} 2|\tau|^3-i\tau_1(2|\tau|^2+3\tau_2\tau_3) & -2i|\tau|^2\tau_2 & i((2\tau_2-\tau_3)(|\tau|^2+\tau_1^2)-(\tau_2+\tau_3)(\tau_2^2+\tau_3^2)) & -3i\tau_1\tau_2^2 \\ i((\tau_2-\tau_3)(|\tau|^2+\tau_1^2)+(\tau_2+2\tau_3)(\tau_2^2+\tau_3^2)) & 2|\tau|^3-2i|\tau|^2\tau_1 & -3i\tau_1(\tau_2^2+\tau_3^2) & -i((\tau_2+\tau_3)(|\tau|^2+\tau_1^2)-(2\tau_2-\tau_3)(\tau_2^2+\tau_3^2)) \end{array}\right),$$

где $|\tau|^2=\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2$.

Заметим, что вектор $\tilde{\tau}=\left(0,\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\in T_{\tilde{y}}\partial\Omega\setminus\{0\}$,

$$L(\tilde{y},\tilde{\tau})=2\pi i\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{i\sqrt{5}}{5} & 0 & 0\\ \frac{i\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

и, следовательно, все миноры второго порядка матрицы $L(\tilde{y},\tilde{\tau})$ равны нулю.

Таким образом, ранг матрицы Я. Б. Лопатинского (6) рассматриваемой краевой задачи (1), (3), (5) не является максимальным в точке $\tilde{y}$ на векторе $\tilde{\tau}$, что и доказывает ее нерегуляризуемость.

Предельная задача задачи (1), (3), (5) в точке $\tilde{y}$

Не ограничивая общности, будем считать, что точка $\tilde{y}$, в которой нарушается условие регуляризуемости задачи (1), (2), совпадает с началом координат.

На луче $\mathbf{R}_+=\{t\in\mathbf{R}\,|\,t>0\}$ рассмотрим задачу нахождения четырехкомпонентной вектор-функции $V=(v_1(t),v_2(t),v_3(t),v_4(t))$, удовлетворяющей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dt} = -i\left(\xi_2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \xi_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right)V \qquad (t>0), \tag{7}$$

и условиям

$$v_1|_{t=0} = h_1, \quad v_2|_{t=0} = h_2. \tag{8}$$

Условие Шапиро – Лопатинского для задачи (1), (3), (5) в точке $\tilde{y}$ состоит в том, что при любых h_1, h_2 и $(\xi_2,\xi_3)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ задача (7), (8) однозначно разрешима в пространстве устойчивых решений системы (7) (т. е. при $t\to+\infty$ стремящихся к нулю). Эквивалентная формулировка условия однозначной разрешимости заключается в том, что при $h_1 = h_2 = 0$ единственным решением (7), (8) является тождественный нуль [13].

Отметим, что задача (7), (8) получается из задачи (1), (3), (5) замораживанием коэффициентов в точке $\tilde{y}$ и формальным преобразованием Фурье по касательным переменным x_2 и x_3 [13; 14].

Построим общее устойчивое решение (7) при $\xi_2 = 2/\sqrt{5}$, $\xi_3 = 1/\sqrt{5}$. Отметим, что в рассматриваемом случае (7) является линейной однородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицей

$$B = \frac{-i}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что матрица B имеет два двукратных собственных значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$.

Устойчивые решения (7) строим по собственному значению $\lambda_1 = -1$. Из линейной однородной алгебраической системы уравнений $(B+E)h = 0$ находим собственный вектор, соответствующий λ_1:

$$h_1 = (-2, -i\sqrt{5}, 0, 1)^T.$$

Из системы $(B+E)h = h_1$ находим присоединенный вектор h_2 к вектору h_1:

$$h_2 = \left(0, 0, -\frac{2i\sqrt{5}}{3}, -\frac{5}{3}\right)^T.$$

Следовательно, искомое общее устойчивое решение системы (7) имеет вид

$$V(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ -i\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\left(t\begin{pmatrix} -2 \\ -i\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2i\sqrt{5}/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}\right), \tag{9}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Из формулы (9) следует, что при $C_1 = 0$ и произвольной постоянной C_2 вектор-функция $V(t)$ является устойчивым решением однородной задачи (7), (8).

Следовательно, задача (7), (8) не является однозначно разрешимой при всех $(\xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, что еще раз доказывает нерегуляризуемость задачи (1), (3), (5).

Заключение

Из теоремы 3 следует, что оператор, отвечающий краевой задаче Римана – Гильберта для системы (1) с коэффициентами (3) и граничными условиями (5) и действующий в определенных банаховых пространствах [13], не является нётеровым. Это означает, что указанный оператор имеет бесконечномерное ядро или коядро.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'tspase / G. G. Moisil, N. Theodorescu // Mathematica. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.

2. Бицадзе, А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1966. – 202 с.

3. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.

4. Шевченко, В. И. О задаче Гильберта для голоморфного вектора в многомерном пространстве / В. И. Шевченко // Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. – Тбилиси, 1979. – С. 279–291.

5. Балабаев, В. Е. Нормальные эллиптические системы первого порядка / В. Е. Балабаев // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 1. – С. 71–83.

6. Басик, А. И. Гомотопическая классификация краевых задач Римана – Гильберта для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 33–37.

7. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

8. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Весці Нацыянальнай ака-дэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16.

9. Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – М. : Мир, 1965. – 379 с.

10. Басик, А. И. Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Д. В. Галуц // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. – 40–44.

11. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1977. – 640 с.

12. Шевченко В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора // Математическая физика : респ. межвед. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

13. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

14. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

REFERENCES

1. Moisil, G. G. Fonctions holomorphes dans l'tspase / G. G. Moisil, N. Theodorescu // Mathematica. – 1931. – Vol. 5. – P. 141–153.

2. Bicadze, A. V. Krajevyje zadachi dlia elliptichieskikh uravnienij vtorogo poriadka / A. V. Bicadze. – M. : Nauka, 1966. – 202 s.

3. Uss, A. T. Gomotopichieskaja klassifikacija triokh- i chietyriokhmiernykh analogov sistiemy Koshi – Rimana / A. T. Uss // Diffieriencial'nyje uravnienija. – 2004. – T. 40, № 8. – S. 1118–1125.

4. Shevchienko, V. I. O zadachie Gil'berta dlia golomorfnogo viektora v mnogomier-nom prostranstvie / V. I. Shevchienko // Diffieriencial'nyje i integral'nyje uravnienija. Krajevyje zadachi. – Tbilisi, 1979. – S. 279–291.

5. Balabajev, V. Je. Normal'nyje elliptichieskije sistiemy piervogo poriadka / V. Je. Balabajev // Diffieriencial'nyje uravnienija. – 1995. – T. 31, № 1. – S. 71–83.

6. Basik A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dlia niekotorykh klassov elliptichieskikh systiem diffieriencialnykh uravnienij v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, A. T. Uss // Trudy Instituta matiematiki NAN Bielarusi. – 2004. – T. 12, № 2. – S. 33–37.

7. Basik, A. I. Gomotopichieskaja klassifikacija rieguliarizuiemykh krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dlia odnogo klassa elliptichieskikh sistiem v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Je. V. Gricuk // Matematyka. Informacijni tekhnolohiji : zb. st. – Luc'k, 2019. – № 6. – S. 12–18.

8. Basik, A. I. Zadacha Rimana – Gil'berta dlia elliptichieskikh systiem ortogonal'-nogo tipa v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Je. V. Gricuk, T. A. Gricuk // Viesci Nacyjanal'naj akademii navuk Bielarusi. Sieryja fizika-matematychnykh navuk. – 2020. – T. 56, № 1. – S. 7–16.

9. Hermander, L. Liniejnyje diffieriencial'nyje opieratory s chastnymi proizvodnymi / L. Hermander. – M. : Mir, 1965. – 379 s.

10. Basik, A. I. Nierieguliarizujemost' zadachi Dirikhlie dlia odnoj bigarmonichieskoj sistiemy v $\mathbf{R}^4$ / A. I. Basik, Je. V. Gricuk, D. V. Galuc // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekh-niki. – 2024. – № 4 (61). – S. 40–44.

11. Gakhov, F. D. Krajevyje zadachi / F. D. Gakhov. – 3-je izd., pierierab. i dop. – M. : Nauka, 1977. – 640 s.

12. Shevchienko, V. I. Gomotopichieskaja klassifikacija zadach Rimana – Gil'berta dlia golomorfnogo viektora / V. I. Shevchienko // Matiematichieskaja fizika : riesp. miezhvied. sb. – Kijev, 1975. – Vyp. 17. – S. 184–186.

13. Agranovich, M. S. Elliptichieskije singuliarnyje integro-diffieriencial'nyje operatory / M. S. Agranovich // Uspiekhi matiematichieskikh nauk. – 1965. – T. 20, vyp. 5. – S. 3–120.

14. Giel'fand, I. M. Ob elliptichieskikh uravnienijakh / I. M. Giel'fand // Uspiekhi matiematichieskikh nauk. – 1960. – T. 15, vyp. 3. – S. 121–132.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.05.2025