

УДК 517.5

Ю.Зайонц, Ю.И. Харкевич, Т.А. Степанюк**АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА
БИГАРМОНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА
НА КЛАССАХ H_ω**

В работе проведено исследование вопросов о приближении функций классов $H_\omega := \{ \varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \forall t, t' \in \mathbb{R} \}$, с помощью бигармонических интегралов Пуассона $B_\delta(f; x)$. Решена задача Колмогорова–Никольского для бигармонических интегралов Пуассона на классах H_ω в равномерной метрике.

1. Решение бигармонического уравнения для единичного круга

Пусть $U(\rho; f; x)$ – бигармоническая функция в круге радиуса r_0 с центром в начале координат, т.е. она является решением уравнения

$$\Delta(\Delta U(\rho; f; x)) = 0, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах.

Рассмотрим уравнение (1) с заданными граничными условиями

$$U(\rho; f; x)|_{\rho=r_0} = f(x), \quad \frac{\partial U(\rho; f; x)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_0} = g(x), \quad (2)$$

и будем искать бигармоническую функцию, удовлетворяющую при $\rho = r_0$ граничным условиям (2). Можно показать [1, с. 400], что искомую функцию можно представить в виде суммы

$$U(\rho; f; x) = (\rho^2 - r_0^2)u_1(\rho; x) + u_2(\rho; x), \quad (3)$$

где $u_1(\rho; x)$ и $u_2(\rho; x)$ – гармонические функции. Из граничных условий находим:

$$u_2(\rho; x)|_{\rho=r_0} = f(x).$$

Отсюда видно, что функция $u_2(\rho; x)$ есть решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа и может быть представлена с помощью интеграла Пуассона:

$$u_2(\rho; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - \rho^2)f(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt. \quad (4)$$

Из второго граничного условия получаем:

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_0} = h(x).$$

Нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, что функция

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\rho}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial \rho}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому может быть выражена интегралом Пуассона:

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\rho}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - \rho^2)g(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt. \quad (5)$$

Продифференцировав (4) по ρ и подставляя значение $\frac{\partial u_2}{\partial \rho}$ в формулу (5), найдем $u_1(\rho; x)$. Заменяя в формуле (3) $u_1(\rho; x)$ и $u_2(\rho; x)$ их выражениями, получим:

$$U(\rho; f; x) = \frac{1}{2\pi r_0} (\rho^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-g(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt + \int_0^{2\pi} \frac{f(t)(r_0 - \rho \cos(t-x))}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x))^2} dt \right]. \quad (6)$$

Если же рассмотреть случай единичного круга ($r_0 = 1$) и следующие краевые условия

$$U(\rho; f; x)|_{\rho=1} = f(x), \quad \frac{\partial U(\rho; f; x)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (7)$$

то, как следует из равенства (6), решением краевой задачи (1) и (7) будет величина

$$B_\rho(f; x) := \frac{(1 - \rho^2)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{1 - \rho \cos t}{(\rho^2 - 2\rho \cos t + 1)^2} dt, \quad 0 < \rho < 1,$$

которую принято называть бигармоническим интегралом Пуассона.

Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, бигармонический интеграл Пуассона запишем в виде

$$B_\delta(f; x) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(e^{-\frac{2}{\delta}} - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + 1\right)^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) K_\delta(t) dt, \quad \delta > 0, \quad (8)$$

$$\text{где } K_\delta(t) := \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(e^{-\frac{2}{\delta}} - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + 1\right)^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt - \text{ядро би-}$$

гармонического интеграла Пуассона.

2. Постановка задачи и некоторые исторические сведения, касающиеся данного вопроса исследования

Пусть C – пространство 2π -периодических непрерывных функций, в котором норма задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Модулем непрерывности функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a; b]$ [2, с. 12] называют функцию $\omega(t) = \omega(f, t)$, определенную для $t \in [0; b-a]$ при помощи равенства:

$$\omega(t) = \omega(f, t) = \sup_{0 \leq h \leq t} \max_{a \leq x \leq b-h} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x'-x''| \leq t, \\ x', x'' \in [a, b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Пусть $\omega = \omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности. Говорят, что функция $f(x) \in C$ принадлежит к классу H_ω , если ее модуль непрерывности $\omega(f, t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f, t) \leq \omega(t),$$

или каковы бы ни были точки $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедливо

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \omega(|t_1 - t_2|).$$

Через W^r обозначают множество 2π -периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и $|f^{(r)}(t)| \leq 1$.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; B_\delta)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - B_\delta(f; x)\|_C,$$

где $\mathfrak{N} \subseteq C$ – заданный класс функций, будем называть, следуя А.И. Степанцу [2, с. 8], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $g(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; B_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для бигармонического интеграла Пуассона B_δ на классе $\mathfrak{N}$ в метрике пространства C .

Аппроксимативные свойства метода приближения бигармоническими интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными. В 1963 году С. Каниев в работе [3] установил для величины $\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C$ асимптотическое равенство при $\rho \rightarrow 1-$

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{\varepsilon_\rho}{\pi}, \quad \varepsilon_\rho = o(1-\rho). \quad (9)$$

В 1968 году Р. Рух [4] уточнила результаты С. Каниева, получив следующее асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho}\right), \quad \rho \rightarrow 1-. \quad (10)$$

В 1976 году в работе Л.П. Фалалеева [5] было получено полное асимптотическое разложение для величины $\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C$ по степеням $(1-\rho)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi} & \left\{ (1-\rho) + (1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} + \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) (1-\rho)^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\alpha_k (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k (1-\rho)^k \right) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \beta_k = \frac{1}{k} \left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i2^i} - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)2^{k-1}} \right).$$

В 1976 году в работе Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова [6] были получены полные асимптотические разложения для величин $\mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C$ и $\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C$, которые формулируются одновременно как в терминах $\frac{1}{\delta}$ так и в терминах $1-\rho$, а именно при $\delta \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow 1-$)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C = \frac{1-\rho^2}{\pi} & \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(2k \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi} dt}{t^{2k+2}} - \frac{1}{\pi^{2k}} \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\} + \\ & + \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi} \right) \left\{ \ln \delta + \ln \pi + \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi} dt}{t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2k\pi^{2k}} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi} dt}{t^{2k+2}} \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{\delta^\alpha} - \frac{\alpha}{\delta^{\alpha-1}} \frac{1-\rho^2}{\pi} \right\} + \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2k} \left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}} \right] + \frac{1-\rho^2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2k \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2k} \left[\frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt \right], \quad (13)$$

где $(t^\alpha)_{2\pi}$ – четное 2π -периодическое продолжение функции $f(t) = t^\alpha$, $0 \leq t \leq \pi$, на всю числовую ось.

Так же следует отметить ряд работ Ю.И. Харкевича, К.Н. Жигалло, Т.В. Жигалло и И.В. Кальчук [7–12], которые изучали аппроксимативные свойства бигармонического интеграла Пуассона на разных классах дифференцируемых функций.

Как следствие, из соотношений (9)–(13) вытекает справедливость асимптотических равенств:

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi} (1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho}\right), \quad \rho \rightarrow 1-, \quad (14)$$

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi} (1-\rho) + \frac{2}{\pi} (1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} + O((1-\rho)^2), \quad \rho \rightarrow 1-. \quad (15)$$

Аналогично из полного асимптотического разложения (13) вытекает асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

В тоже время аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона на классах H_ω не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонения функций из классов H_ω от их бигармонических интегралов Пуассона в равномерной метрике.

Основной целью этой работы есть изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f \in H_\omega} \|f(x) - B_\delta(f, x)\|_C, \quad \delta \rightarrow \infty.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для произвольного фиксированного модуля непрерывности $\omega(t)$ в принятых выше обозначениях справедливо равенство

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \frac{\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}{\pi} \int_0^\pi \omega(t) \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2} dt, \quad \delta > 0. \quad (17)$$

Доказательство.

Рядом с функцией $f(t)$ рассмотрим функцию $f_1(t) := f(t+x)$. Тогда $f_1(0) - B_\delta(f_1, 0) = f(x) - B_\delta(f, x)$.

Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно принадлежат классу H_ω , то делаем выводы, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f \in H_\omega} |f(0) - B_\delta(f, 0)|.$$

Для каждой функции $f(x)$ с класса H_ω построим функцию $f_2(x) := f(x) - f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H_ω , причем $f_2(0) = 0$. Отсюда

$$B_\delta(f_2; 0) = B_\delta(f; 0) - f(0),$$

т.е.

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{\substack{f \in H_\omega \\ f(0)=0}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right|.$$

Учитывая четность ядра $K_\delta(t)$, нам достаточно ограничиться только случаем четных функций $f(x)$. Это значит, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f \in H} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) K_\delta(t) dt \right|, \quad (18)$$

где H – множество четных функций $f \in H_\omega$, таких что $f(0) = 0$. Какой бы ни была функция $f \in H$

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) K_\delta(t) dt \right| \leq \int_0^\pi \omega(t) K_\delta(t) dt. \quad (19)$$

С другой стороны, так как $K_\delta(t) \geq 0$, то для функции $f_0(t) \in H$,

$$f_0(t) = \omega(|t|), \quad |t| \leq \pi,$$

будем иметь

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_0(t) K_\delta(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega(t) K_\delta(t) dt. \quad (20)$$

Итак, согласно (18)–(20), получаем (17).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в равенстве (17) положить $\omega(t) = t$, то при $\delta \rightarrow \infty$ получим асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta^2} \ln \delta + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \quad (21)$$

Доказательство.

Чтобы показать справедливость следствия 1, запишем сначала бигармонический интеграл Пуассона в виде известного сингулярного интеграла. Для этого ядро бигармонического интеграла Пуассона представим в виде

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right) \right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt = \frac{1}{2} \varphi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_\delta(k),$$

где

$$\varphi_\delta(k) := \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right) \right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона [13, с.72], получим, что

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_\delta(2\pi k) \right\}, \quad (22)$$

где $\Phi_\delta(u)$ – косинус преобразование Фурье функций $\varphi_\delta(u)$, т.е.

$$\begin{aligned}
\Phi_\delta(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_\delta(z) \cos zu dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos zu \cos zu dz = \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u-t) dz = V_1 + V_2. \\
V_1 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{2} \left(1 - e^{-\frac{z}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \int_0^\infty z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz \right).
\end{aligned}$$

Дважды интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \frac{1}{\delta} \frac{1}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}}.$$

Аналогично, дважды проинтегрировав по частям, можно убедиться в справедливости равенства:

$$\int_0^\infty z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \frac{1}{u+t} \left(-\frac{1}{u+t} + \frac{2}{\delta} \frac{1}{u+t} \frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \frac{1}{u+t} \int_0^\infty z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz \right).$$

Отсюда имеем, что

$$\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \int_0^\infty z e^{-\frac{z}{\delta}} \cos z(u+t) dz = \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u+t)^2\right)^2}.$$

Итак, получаем, что

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u+t)^2\right)^2} \right).$$

Аналогично,

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u-t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u-t)^2\right)^2} \right).$$

Тогда

$$\Phi_\delta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{\frac{1}{\delta}}{(u-t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{1}{\delta^2} - (u-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u-t)^2\right)^2} + \frac{\frac{1}{\delta^2} - (u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (u+t)^2\right)^2} \right) \right). \quad (23)$$

Подставив соотношение (23) в (22), имеем, что

$$K_{\delta}(t) = \frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + t^2\right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k + t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k - t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{1}{\delta^2} - (2\pi k + t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (2\pi k + t)^2\right)^2} + \frac{\frac{1}{\delta^2} - (2\pi k - t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (2\pi k - t)^2\right)^2} \right) \right).$$

Итак,

$$B_{\delta}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k + t)^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - (2\pi k + t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + (2\pi k + t)^2\right)^2} \right) dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+t))_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2} + t^2\right)^2} \right) dt.$$

Учитывая последнее равенство, убеждаемся в справедливости следствия 1. Действительно,

$$\mathcal{E}(W^1; B_{\delta})_C = \frac{\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}{\pi} \int_0^{\pi} t \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t K_{\delta}(t) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (t)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} \right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} \right) dt + \\ + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\infty} (t)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} \right) dt = I_1 + I_2.$$

Найдем значения интеграла I_1 : $I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} - \frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \right) dt.$

Так как $\int_0^{2\pi} \frac{t}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} dt = \frac{1}{2} \ln(4\pi^2 \delta^2 + 1), \quad \frac{2}{\delta^2} \int_0^{2\pi} \frac{t}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} dt = -\frac{1}{4\pi^2 \delta^2 + 1} + 1,$

и учитывая, то что $1 - e^{-\frac{2}{\delta}} = \frac{2}{\delta} - \frac{2}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right)$, находим

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \right) \ln(4\pi^2 \delta^2 + 1) + \frac{2}{\pi} \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(-\frac{1}{4\pi^2 \delta^2 + 1} + 1 \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\delta^2} \ln \delta^2 \left(4\pi^2 + \frac{1}{\delta^2} \right) + \\ + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta^2} \ln \delta + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Так как $1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \geq \frac{2}{\delta} - \frac{2}{\delta^2}$ и $(t)_{2\pi} \leq 2\pi$, то

$$I_2 \leq \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\infty} (t)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta^2}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt \leq \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^{\infty} 2\pi \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{1}{t^2} + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{2}{\delta^2} \frac{1}{t^4} \right) dt = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Отсюда получаем утверждение следствия 1.

Так как $\frac{1}{\delta} \sim (1 - \rho)$, когда $\delta \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 1-$, то можно сделать вывод, что следствия из результатов С. Каниева, Р. Рух, Л.П. Фалалеева (15) и (16) эквивалентные (21).

Следствие 2. Если в равенстве (17) положить $\omega(t) = t^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, то при $\delta \rightarrow \infty$ получим асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \quad (22)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\mathcal{E}(H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\pi} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right)^2 \int_0^\pi t^\alpha \frac{1 - e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t}{\left(1 - 2e^{-\frac{1}{\delta}} \cos t + e^{-\frac{2}{\delta}} \right)^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^\alpha K_\delta(t) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (t^\alpha)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t^\alpha \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt + \\ + \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^\infty (t^\alpha)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{\frac{1}{\delta^2} - t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2} \right)^2} \right) dt = I_3 + I_4.$$

Найдем значения интегралов I_3 и I_4 .

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t^\alpha \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} - \frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \right) dt.$$

Учитывая формулы (3.241.2) и (3.241.5) из [14], имеем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{t^\alpha}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} dt &= \delta^{1-\alpha} \left(\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 + 1} dt - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 + 1} dt \right) = \delta^{1-\alpha} \left(\frac{\pi}{2 \sin \frac{(1+\alpha)\pi}{2}} - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 + 1} dt \right) = \frac{\pi}{2} \frac{\delta^{1-\alpha}}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1), \\ \int_0^{2\pi} \frac{t^\alpha}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} dt &= \delta^{3-\alpha} \int_0^{2\pi\delta} \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt = \delta^{3-\alpha} \left(\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt \right) = \\ &= \delta^{3-\alpha} \left(\frac{(1-\alpha)\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} - \int_{2\pi\delta}^\infty \frac{t^\alpha}{(t^2 + 1)^2} dt \right) = \delta^{3-\alpha} \frac{(1-\alpha)\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1), \end{aligned}$$

и учитывая то, что $1 - e^{-\frac{2}{\delta}} = \frac{2}{\delta} - \frac{2}{\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^3}\right)$, находим

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \right) \left(\delta^{1-\alpha} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1) \right) + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \frac{2}{\delta^2} \left(\delta^{3-\alpha} \frac{(1-\alpha)\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} + O(1) \right) \right) = \\ &= \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{1}{\delta^{1+\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2}} - \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) = \frac{1-\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^\alpha} + \frac{\alpha}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{1}{\delta^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right), \\ I_4 &= \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^\infty (t^\alpha)_{2\pi} \left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{2} \left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2 + \frac{1}{\delta^2}\right)^2} - \frac{1}{t^2 + \frac{1}{\delta^2}} \right) \right) dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_{2\pi}^\infty 2\pi \left(\frac{1}{\delta} \frac{1}{t^2} + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} \right) \left(\frac{2}{\delta^2} \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) \right) dt = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

Следует отметить, что равенство (22) совпадает со следствием из результата Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова (16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.
2. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Київ : Наукова думка, 1981. – 340 с.

3. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 995–998.
4. Pych, P. On biharmonic function in unit disk / P. Pych. // Ann. pol. math. – 1968. – Vol. 20, №3. – P. 203–213.
5. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip_1 от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (материалы всесоюзного симпозиума). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.
6. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля–Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // Труды 5-го советско-чехословацкого совещания по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976). – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
7. Zhigallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhigallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2000. – Vol 52, № 7. – P. 1113–1117.
8. Zhyhallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – Vol 54, № 9. – P. 1462–1470.
9. Kharkevich, Yu.I. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – Vol. 59, № 8. – P. 1224–1237.
10. Kharkevich, Yu.I. Approximation of functions from the class by Poisson biharmonic operators in the uniform metric / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2008. – Vol. 60, № 5. – P. 769–798.
11. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – Vol. 61, № 7. – P. 399–413.
12. Zhyhallo, K.M. Approximation of functions from the classes $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2011. – Vol. 63, № 7. – P. 1083–1107.
13. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.–Л., 1948.
14. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

J. Zajac, Yu.I. Kharkevych, T.A. Stepaniuk. Approximating Properties of Biharmonic Poisson's Integrals on the Classes H_{ω}

In work we conducted research of questions of approximation functions from the classes $H_{\omega} := \left\{ \varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \omega(|t - t'|) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R} \right\}$, with a help of biharmonic Poisson's integrals $B_{\delta}(f; x)$. We solved the problem of Kolmogoroff-Nikolsky for biharmonic Poisson's integrals on the classes H_{ω} in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 09.04.2012