

УДК 513.82

Александр Андреевич Юдов¹, Елена Вячеславовна Кисилук²¹канд. физ.-мат. наук, доц.,доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Aleksandr Yudov¹, Yelena Kisilyuk²**¹PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,
Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
at the Brest State A. S. Pushkin University²Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Informatics
at the Brest State A. S. Pushkin Universitye-mail: modelmath@brsu.brest.by**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ
СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ
ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО**

В ходе исследования классифицированы однородные редуктивные пространства с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства Минковского и все их редуктивные дополнения.

Ключевые слова: группа, подгруппа, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, коммутатор, редуктивное однородное пространство, редуктивное дополнение.

**Differential Geometry of Homogeneous Spaces with a Structure Group – Lie Group
of Motions of Minkowski Space**

The study classified homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the Minkowski space and all their reductive complements.

Key words: group, subgroup, homogeneous space, Lie group, Lie algebra, commutator, reductive homogeneous space, reductive complement.

Введение

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства Минковского.

Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства Минковского

Определение 1. Однородное пространство H / G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Рассмотрим однородное пространство H/G_5 , где G_5 – подгруппа Ли группы Ли H вращений шестимерного Лоренцового пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{G_5} = \{i_6, i_9\}$, где:

$$i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению пятнадцати случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p & q \end{pmatrix}.$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов $X_1 \dots X_4$, определяющих инвариантные подпространства m , причем базис в алгебре $\overline{H}$ выберем следующим образом: $i_5, i_7, i_8, i_{10}, i_6, i_9$.

Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, \dots, X_4\}$ задаются векторами:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9, X_2 = i_7 + \nu i_6 + \sigma i_9, X_3 = i_8 + s i_6 + t i_9, X_4 = i_{10} + p i_6 + q i_9. \quad (2)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_6] + \mu[a, i_9] = -i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_6] + \sigma[a, i_9] = i_{10}, \\ [a, X_3] &= [a, i_8] + s[a, i_6] + t[a, i_9] = -i_5, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + p[a, i_6] + q[a, i_9] = i_7. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9) + \beta_1(i_7 + \nu i_6 + \sigma i_9) + \gamma_1(i_8 + s i_6 + t i_9) + \delta_1(i_{10} + p i_6 + q i_9) = \alpha_1 i_5 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1 + p \delta_1) i_6 + \beta_1 i_7 + \gamma_1 i_8 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1) i_9 + \delta_1 i_{10}. \quad (4)$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\gamma_1 = -1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \delta_1 = 0, \lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1 + p \delta_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0, t = 0$.

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3), получим:

$$\delta_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 + s \gamma_2 + p \delta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 + q \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $p = 0, q = 0$.

Аналогично, сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\alpha_3 = -1, \lambda = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с четвертой формулой (3), получим:

$$\beta_4 = 1, \nu = 0, \sigma = 0.$$

Таким образом, в случае 1^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы) $\{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$. Аналогично рассматриваются случаи $2^0 - 15^0$.

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \nu & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9, X_2 = i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_9, X_3 = i_8 + s i_{10} + t i_9, X_4 = i_6 + q i_9. \quad (5)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_{10}] + \mu[a, i_9] = -i_8 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_{10}] + \sigma[a, i_9] = i_{10} + \nu i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_8] + s[a, i_{10}] + t[a, i_9] = -i_5 + s i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_6] + q[a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9) + \beta_1(i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_9) + \gamma_1(i_8 + s i_{10} + t i_9) + \delta_1(i_6 + q i_9) = \\ = \alpha_1 i_5 + \delta_1 i_6 + \beta_1 i_7 + \gamma_1 i_8 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1) i_9 + i_{10}(\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\gamma_1 = -1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \lambda, \delta_1 = 0, \lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma \lambda - t = 0, \nu \lambda - s = 0$.

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\beta_2 = \nu, \alpha_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 + q \delta_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 + s \gamma_2 = 1.$$

Отсюда следует: $\nu^2 = 1, \nu \sigma = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$\alpha_3 = -1, \beta_3 = s, \sigma s - \mu = 0, \nu s - \lambda = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 2^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma \lambda - t = 0, \\ \nu \lambda - s = 0, \\ \nu^2 = 1, \\ \nu \sigma = 0, \\ \sigma s - \mu = 0, \\ \nu s - \lambda = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $v = 1$. Тогда $s = \lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $v = -1$. Тогда $s = -\lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}.$$

$$3^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 3^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_6, X_2 = i_7 + v i_{10} + \sigma i_6, X_3 = i_8 + s i_{10} + t i_6, X_4 = i_9. \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_{10}] + \mu[a, i_6] = -i_8 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + v[a, i_{10}] + \sigma[a, i_6] = i_{10} + v i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_8] + s[a, i_{10}] + t[a, i_6] = -i_5 + s i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_6) + \beta_1(i_7 + v i_{10} + \sigma i_6) + \gamma_1(i_8 + s i_{10} + t i_6) + \delta_1 i_9 = \\ &= \alpha_1 i_5 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1) i_6 + \beta_1 i_7 + \gamma_1 i_8 + \delta_1 i_9 + (\lambda \alpha_1 + v \beta_1 + s \gamma_1) i_{10}. \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9), получим:

$$\gamma_1 = -1, \beta_1 = \lambda, \alpha_1 = 0, \delta_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 = 0, \lambda \alpha_1 + v \beta_1 + s \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma \lambda - t = 0, v \lambda - s = 0$.

Сравнивая формулу (10) со второй формулой (9), получим:

$$\beta_2 = v, \lambda \alpha_2 + v \beta_2 + s \gamma_2 = 1, \alpha_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $v^2 = 1, v \sigma = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (10) с третьей формулой (9), получим:

$$\alpha_3 = -1, \beta_3 = s, \sigma s - \mu = 0, v s - \lambda = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 3^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma \lambda - t = 0, \\ v \lambda - s = 0, \\ v^2 = 1, \\ v \sigma = 0, \\ \sigma s - \mu = 0, \\ v s - \lambda = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $v = 1$. Тогда $s = \lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\nu = -1$. Тогда $s = -\lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_9\}.$$

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \nu & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 4^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_8 + \mu i_9, X_2 = i_7 + \nu i_8 + \sigma i_9, X_3 = i_{10} + t i_9, X_4 = i_6 + q i_9. \quad (11)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_8] + \mu[a, i_9] = -i_8 + \lambda i_5, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_8] + \sigma[a, i_9] = i_{10} + \nu i_5, \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + t[a, i_9] = i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_6] + q[a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_8 + \mu i_9) + \beta_1(i_7 + \nu i_8 + \sigma i_9) + \gamma_1(i_{10} + t i_9) + \delta_1(i_6 + q i_9) = \alpha_1 i_5 + \delta_1 i_6 + \beta_1 i_7 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1) i_8 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1) i_9 + \gamma_1 i_{10}. \quad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с первой формулой (12), получим:

$$\alpha_1 = -\lambda, \lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 = -1, \delta_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\lambda^2 = 1, -\lambda \mu = 0$.

Сравнивая формулу (13) со второй формулой (12), получим:

$$\gamma_2 = 1, \alpha_2 = -\nu, \beta_2 = 0, \delta_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 + q \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $-\nu \lambda = 0, t - \mu \nu = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (13) с третьей формулой (12), получим:

$$\beta_3 = 1, \nu = 0, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 4^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ -\lambda \mu = 0, \\ -\nu \lambda = 0, \\ t - \mu \nu = 0, \\ \nu = 0, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, \nu = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_6 + qi_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = -1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, v = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_6 + qi_9\}.$$

$$5^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & \nu & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 5^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_8 + \mu i_6, X_2 = i_7 + \nu i_8 + \sigma i_6, X_3 = i_{10} + ti_6, X_4 = i_9. \quad (14)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_8] + \mu[a, i_6] = -i_8 - \lambda i_5, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_8] + \sigma[a, i_6] = i_{10} - \nu i_5, \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + t[a, i_6] = i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_8 + \mu i_6) + \beta_1(i_7 + \nu i_8 + \sigma i_6) + \gamma_1(i_{10} + ti_6) + \delta_1 i_9 = \alpha_1 i_5 + (\mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 + t\gamma_1)i_6 + \beta_1 i_7 + (\lambda\alpha_1 + \nu\beta_1)i_8 + \delta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10}. \quad (16)$$

Сравнивая формулу (16) с первой формулой (15), получим:

$$\lambda\alpha_1 + \nu\beta_1 = -1, \alpha_1 = -\lambda, \mu\alpha_1 + \sigma\beta_1 + t\gamma_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\lambda^2 = 1, -\lambda\mu = 0$.

Сравнивая формулу (16) со второй формулой (15), получим:

$$\gamma_2 = 1, \alpha_2 = -\nu, \mu\alpha_2 + \sigma\beta_2 + t\gamma_2 = 0, \beta_2 = 0, \lambda\alpha_2 + \nu\beta_2 = 0, \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $t - \mu\nu = 0, -\nu\lambda = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (16) с третьей формулой (15), получим:

$$\beta_3 = 1, \sigma = 0, \nu = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 5^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ -\lambda\mu = 0, \\ -\nu\lambda = 0, \\ t - \mu\nu = 0, \\ \nu = 0, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, \nu = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = -1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, v = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_9\}.$$

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \nu & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 6^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10}, X_2 = i_7 + \nu i_8 + \sigma i_{10}, X_3 = i_6, X_4 = i_9. \quad (17)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_8] + \mu[a, i_{10}] = -i_8 - \lambda i_5 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_8] + \sigma[a, i_{10}] = i_{10} - \nu i_5 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_6] = 0, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \nu i_8 + \sigma i_{10}) + \gamma_1 i_6 + \delta_1 i_9 = \alpha_1 i_5 + \gamma_1 i_6 + \beta_1 i_7 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1) i_8 + \delta_1 i_9 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1) i_{10}. \quad (19)$$

Сравнивая формулу (19) с первой формулой (18), получим:

$$\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 = -1, \alpha_1 = -\lambda, \beta_1 = \mu, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $-\lambda^2 + \mu \nu = -1, -\mu \lambda + \sigma \mu = 0$.

Сравнивая формулу (19) со второй формулой (18), получим:

$$\alpha_2 = -\nu, \beta_2 = \sigma, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 = 1, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $-\lambda \nu + \nu \sigma = 0, -\mu \nu + \sigma^2 = 1$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 6^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda^2 + \mu \nu = -1, \\ -\mu \lambda + \sigma \mu = 0, \\ -\lambda \nu + \nu \sigma = 0, \\ -\mu \nu + \sigma^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(\sigma - \lambda) = 0, \\ \nu(\sigma - \lambda) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &a) \lambda = \sigma, \\ &b) \mu = 0, \nu = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай а: $-\lambda^2 + \mu \nu = -1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 + \mu \nu, \lambda = \pm \sqrt{1 + \mu \nu}, \sigma = \pm \sqrt{1 + \mu \nu}$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 \pm \sqrt{1 + \mu \nu} i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_8 \pm \sqrt{1 + \mu \nu} i_{10}, i_6, i_9\}.$$

Рассмотрим случай, b: $\lambda^2 = 1, \sigma^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1, \sigma = 1; \lambda = -1, \sigma = 1; \lambda = 1, \sigma = -1; \lambda = -1, \sigma = -1$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\begin{aligned} &\{i_5 + i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}. \end{aligned}$$

В случаях $7^0, 8^0$ системы инвариантности противоречивы.

$$9^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 9^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_7 + \mu i_{10}, X_2 = i_8 + \sigma i_{10}, X_3 = i_6, X_4 = i_9. \quad (23)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_7] + \mu[a, i_{10}] = -i_8 + \lambda i_{10} + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + \sigma[a, i_{10}] = -i_5 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_6] = 0, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_7 + \mu i_{10}) + \beta_1(i_8 + \sigma i_{10}) + \gamma_1 i_6 + \delta_1 i_9 = \alpha_1 i_5 + \gamma_1 i_6 + i_7 \alpha_1 \lambda + i_8 \beta_1 + i_9 \delta_1 + i_{10}(\alpha_1 \mu + \beta_1 \sigma). \quad (25)$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:

$$\beta_1 = -1, \alpha_1 \mu + \beta_1 \sigma = \lambda, \alpha_1 \lambda = \mu, \alpha_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = -\lambda, \mu = 0$.

Сравнивая формулу (25) со второй формулой (24), получим:

$$\alpha_2 = -1, \alpha_2 \lambda = \sigma, \gamma_2 = 0, \beta_2 = 0, \delta_2 = 0, \alpha_2 \mu + \beta_2 \sigma = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = -\lambda, \mu = 0$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_7, i_8 - \lambda i_{10}, i_6, i_9\}.$$

В случаях $10^0 - 13^0$ системы инвариантности противоречивы.

$$14^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай 14^0 .

В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \mu i_8, X_2 = i_{10}, X_3 = i_6, X_4 = i_9. \quad (26)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \mu[a, i_8] = i_{10} - \mu i_5, \\ [a, X_2] &= [a, i_{10}] = i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_6] = 0, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \mu i_8) + \beta_1 i_{10} + \gamma_1 i_6 + \delta_1 i_9 = \gamma_1 i_6 + \alpha_1 i_7 + \alpha_1 \mu i_8 + \delta_1 i_9 + \beta_1 i_{10}. \quad (28)$$

Сравнивая формулу (28) с первой формулой (27), получим:

$$\mu = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_7, i_{10}, i_6, i_9\}.$$

В случае 15^0 система инвариантности противоречива.

Теорема 1. Относительно оператора i_6 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\bar{H}$:

$$\begin{aligned} &\{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 \pm \sqrt{1 + \mu\nu} i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_8 \pm \sqrt{1 + \mu\nu} i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_7, i_8 - \lambda i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_7, i_{10}, i_6, i_9\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Относительно операторов i_6, i_9 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\bar{H}$:

$$\begin{aligned} m_1 &= \{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}, \\ m_2 &= \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ m_3 &= \{i_5 + i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}. \end{aligned}$$

Проверяя для этих четырехмерных подпространств условие прямой суммы, убеждаемся, что условие прямой суммы выполняются только для подпространства $m_1 = \{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$, т. е. $\bar{H} = \bar{G}_5 + m_1$.

Таким образом, получена:

Теорема 3. Однородное пространство H/G_5 редуکتивно. Редуکتивным дополнением является только следующее подпространство: $\{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$.

Заклучение

В работе получено редуکتивное однородное пространство.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

REFERENCES

1. Kobajasi, Sh. Osnovy diffierencial'noj gieometrii : v 2 t. / Sh. Kobajasi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981. – T. 2. – 413 s.
2. Kopp, V. G. O podgruppakh vrashchienij piatimiernykh i shestimiernykh jevklidovykh i lorencevykh prostranstv / V. G. Kopp // Uchion. zap. Kazan. un-ta. – 1966. – № 1 (126). – S. 13–22.
3. Rashevskij, P. K. Rimanova gieometrija i tenzornyj analiz / P. K. Rashevskij. – M. : Nauka, 1967. – 664 s.
4. Khelgason, S. Diffierencial'naja gieometrija i simmetrichieskije prostranstva / S. Khelgason. – M. : Mir, 1964. – 538 s.
5. Yudov, A. A. Klassifikacija odnomiernykh podmnogoobrazij prostranstva Minkovskogo, imiejushchikh kasatiel'nuju mnimojevklidova i jevklidova tipa / A. A. Yudov, N. S. Kovalik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 106–115.

Рукапіс надіслано у редакцію 25.03.2022