УДК 519.6+519.81

Владимир Васильевич Морозов
ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Vladimir Morozov
Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: morozoffw@mail.ru

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА НЬЮТОНА В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ БАНАХОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Исходя из аксиоматики функционального анализа А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина, Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова, аппроксимацию корней функциональных уравнений надлежит осуществлять с помощью элементов всюду плотного в сепарабельном пространстве решений множества многочленов. Однако по-прежнему наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений считается метод конечных разностей. Основное содержание метода заключается в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией). Решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки. Обоснованность замены дифференциального уравнения разностным, точность получаемых решений, устойчивость метода – важнейшие вопросы, которые требуют тщательного изучения. Данная проблема возникает из-за невозможности сравнения корня уравнения и его дискретного приближения по норме пространства решений, являющейся главным противоречием основной идеи разностных методов постулатам функционального анализа.

Ключевые слова: *сходимость последовательности, аппроксимация, оценка нормы оператора.*

Modifications of Newton's Method in the Polynomial Analysis of Banach Equations

Based on the axiomatics of functional analysis by A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, the approximation of the roots of functional equations should be carried out using elements everywhere dense in a separable space of solutions of multiple polynomials. However, the method of finite differences is still considered to be the most common and universal numerical method for solving differential equations. The main content of the method is as follows. The area of continuous change of the argument (for example, a segment) is replaced by a discrete set of points called nodes. These nodes make up a different grid. The desired function of a continuous argument is approximately replaced by a function of a specific argument on a given grid. This function is called a grid function. The original differential equation is replaced by a difference equation with respect to the grid function. At the same time, the corresponding finite-difference relations are used for the derivatives included in the equation. Such a replacement of a differential equation with a difference equation is called its approximation on a grid (or difference approximation). The solution of the differential equation is reduced to finding the values of the grid function in the grid nodes. The validity of replacing a differential equation with a difference equation, the accuracy of the solutions obtained, and the stability of the method are the most important issues that require careful study. This problem arises due to the impossibility of comparing the root of the equation and its discrete approximation by the norm of the solution space, which is the main contradiction of the basic idea of difference methods to the postulates of functional analysis.

Key words: *sequence convergence, approximation, operator norm estimation.*

Введение

Отсутствие в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса вынуждает исследователей, изучающих нелинейные функциональные уравнения

с дифференциальными и/или интегральными операторами, разрабатывать все новые и новые грандиозные сеточные схемы. Во избежание теоретических изъянов дискретного представления элементов непрерывных функциональных пространств (например, при доказательстве сходимости дискретного приближения к непрерывной функции по норме) для аппроксимации элементов непрерывных банаховых пространств необходим полиномиальный базис. В качестве такового в работе используется базис, являющийся одновременно базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, позволяющий при доказательстве сходимости полиномиального приближения к корню сколь угодно увеличивать параметр дискретизации пространства решений и этим сколь угодно уменьшать погрешность приближения корня.

Для полиномиальной аппроксимации функциональных операторов в качестве проектора $\prod^n : U \to P^n$ элементов пространства абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций на множество многочленов используем интерполяционный процесс Лагранжа с чебышевской сеткой.

Благодаря уникальному свойству лагранжева базиса множества P^n, где коэффициенты разложения полинома являются его значениями в точках сетки, полиномиальные методы решения интегро-дифференциальных уравнений и других задач прикладного анализа становятся итерационными.

Метод Ньютона и его модификации при решении банаховых уравнений

Пусть $A : U \to V$ – ограниченный линейный банаховый оператор. Выражения $\lfloor A \rfloor = \inf\limits_{||u||=1} ||Au||$ и $\lceil A \rceil = \sup\limits_{||u||=1} ||Au||$ будем называть *i-гранью* и *s-гранью* оператора A.

Идея метода Ньютона решения банахова уравнения

$$F(u) = 0,\ F : U \to V,\ U \text{ и } V - B\text{-пространства} \tag{1}$$

заключается в аппроксимации приращения $F(u) - F(u_0)$ его главной линейной частью $F'(u_0)(u - u_0)$ и решении уравнения для нуль-приближения корня $F'(u_0)(u - u_0) = -F(u_0)$.

Теорема 1. Пусть в шаре $Q[u_0, r]$ банахово отображение $F : U \to V$ дважды непрерывно дифференцируемо и $\sup\limits_{u \in Q} \lceil F''(u) \rceil \le K$, а для u_0 выполнены условия

1. $[F'(u_0)]^{-1}$ существует и $\lfloor F'(u_0) \rfloor^{-1} \le C$ $(\lfloor F'(u_0) \rfloor \ge C^{-1})$;
2. $\eta \ge ||[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)||$;
3. $k = CK\eta \le 1/2$;
4. $r \ge \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2k}}{k} \eta$.

Тогда последовательность

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,\ \Delta u_n = -[F'(u_n)]^{-1} F(u_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

сходится в шаре $Q[u_0, r]$ к решению u^* уравнения со скоростью

$$||u^* - u_n|| \le t^* - t_n,$$

где t_n – последовательность приближений меньшего корня t^* уравнения

$$P(t) \equiv \frac{KC}{2} t^2 - t + \eta = 0,$$

построенная по правилу

$$t_{n+1} = t_n - [P'(t_n)]^{-1} P(t_n),\ t_0 = 0.$$

Моделирование реальных технологических процессов с помощью интегро-дифференциальных операторов основано на топологических свойствах пространства решений, которому принадлежит искомый корень, и описания отображения этого пространства в пространство образов, в которое отображается пространство решений. Сепарабельность этих пространств при описании реальных процессов функциональными уравнениями с интегральными и/или дифференциальными операторами достаточно хорошо изучена в монографиях [1; 2; 4; 5].

Важнейшим достижением этих исследований стало установление счетных всюду плотных множеств в функциональных банаховых пространствах. Это свойство сепарабельных пространств позволяет организовать вычислительный процесс, максимально соответствующий качественной теории функционального анализа. Вслед за определением достоверных оценок норм приближений элементов процесса появляется возможность генерировать слабые производные дифференцируемых отображений, а также оценивать их нормы.

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в работе используются полиномиальные методы с приближением корня многочленами всюду плотного множества пространства решений. Причем применяемый для аппроксимации элементов полиномиальный базис одновременно является базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, т. е. итерационный многочлен приближения корня степени n из $\mathcal{P}_n$, в случае необходимости может быть представлен в виде многочлена в реорганизованном базисе $\mathcal{P}_{n+1}$. Отметим, что здесь вместо традиционного базиса множества многочленов используется лагранжевый базис, который и обеспечивает итеративность вычислительного процесса при увеличении параметра дискретизации. Логическим завершением вычислительного процесса является локализация корня функционального уравнения с заданной точностью приближения.

Из «формулы конечных приращений» [6, с. 134] следует, что для достаточно гладкого в области Q_r отображения

$$||F(u) - F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0)|| \le \frac{1}{2} \sup_{u \in Q_r} \left[F''(u)\right] ||u - u_0||^2.$$

Значит, норма невязки $||F(u)||$ на найденном приближении u, для которого

$$-F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0) = 0,$$

соизмерима с квадратом нормы приращения аргумента, что позволяет при достаточно малых приращениях организовать вблизи корня уравнения сходящийся итерационный процесс

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \text{ где } \Delta u_n = -[F'(u_n)]^{-1} F(u_n),\ n = 0, 1, \ldots \qquad (2)$$

Однако в бесконечномерном случае установление обратного оператора $[F'(u_n)]^{-1}$ на каждом шаге итерационного процесса может стать задачей достаточно трудоемкой. Поэтому иногда целесообразно использовать так называемый модифицированный метод Ньютона. Модификация состоит в том, что вместо последовательности (2) рассматривается последовательность, определяемая формулой

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_0)]^{-1} F(u_n),\ n = 0, 1, \ldots. \qquad (3)$$

Идея модифицированного метода заключается в использовании на каждом шаге обратного оператора $[F'(u)]^{-1}$, вычисленного при одном и том же значении $u = u_0$.

Теорема 2. Пусть в некотором шаре Q_r банахово отображение $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ сильно дифференцируемо и производная $F'(u)$ удовлетворяет в нем условию Липшица с константой L, т. е.

$$\lceil F'(u) - F'(v) \rceil \le L \, ||u - v||.$$

При этом нулевое приближение u_0 выбрано так, что справедливы оценки
1) $[F'(u_0)]^{-1}$ существует и $\lceil [F'(u_0)]^{-1} \rceil \le C$;
2) $\eta \ge ||[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)||$;
3) $k = CL\eta \le 1/4$.
Тогда в шаре Q_r, где r – меньший корень уравнения

$$CLr^2 - r + \eta = 0,$$

уравнение (1) имеет единственное решение u^* и последовательность приближений

$$\{u_n, n = 0, 1, \dots\},$$

определяемая рекуррентным соотношением (3), сходится к этому корню.

Для доказательства утверждения рассмотрим в пространстве $\mathcal{U}$ отображение

$$A(u) = u - [F'(u_0)]^{-1} F(u).$$

Его сильная производная в точке u_0 равна 0. Докажем, что отображение A переводит шар Q_r в себя. Действительно,

$$\begin{gathered} ||A(u) - u_0|| \le ||u - u_0 - [F'(u_0)]^{-1} F(u)|| \le \\ \le \lceil [F'(u_0)]^{-1} \rceil \, ||F'(u_0)(u - u_0) - F(u) + F(u_0)|| + ||[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)|| \le \\ \le C \, ||F'(u_0)(u - u_0) - F(u) + F(u_0)|| + \eta \le CLr^2 + \eta = r, \end{gathered}$$

а это значит, что отображение A переводит шар Q_r в себя.

A – сжимающее отображение. Следовательно, оператор A имеет в шаре Q_r одну и только одну неподвижную точку u^*, для которой

$$u^* = u^* - [F'(u_0)]^{-1} F(u^*).$$

Из оценки s-грани оператора A сразу следует оценка скорости сходимости модифицированного метода Ньютона к корню уравнения (1)

$$||u_n - u^*|| \le \frac{q^n \eta}{1 - q}.$$

Таким образом, погрешность приближения данного метода убывает не медленнее, чем геометрическая прогрессия с шагом q.

Решение нелинейных операторных уравнений вида (1) с банаховым дважды непрерывно дифференцируемым в шаре $Q[u_0, r]$ нелинейным оператором F, удовлетворяющим условию $\sup\limits_{u \in Q} \left| F''(u) \right| \le K$, обычно сводится к методу Ньютона или его модификациям. Выделим три ключевых момента при генерации ньютоновского *параметрического* процесса

$$u_{k+1} = u_k + \beta_k \Delta u_k, \; \Delta u_k = -[F'(u_k)]^{-1} F(u_k), \; k = 0, 1, \dots . \tag{4}$$

1. Выбор β_0 для глобальной сходимости процесса (4) к решению уравнения (1) в области $Q[u_0, R]$ (существование корня в Q_R, $0 < R \le \infty$ предполагается).

2. Поиск приближенного решения u_p, по которому можно найти радиус $r < \infty$ области $Q[u_p, r]$ существования точного решения (1) и сам корень u^*, определяемый с этого приближения процессом (4).

3. Локализация изолированного корня u^* уравнения (1) в заданной δ-окрестности $Q[u_л, \delta]$ приближения $u_л$ (локализующего u^*), т. е. поиск такого приближенного решения $u_л$, для которого $||u^* - u_л|| \le \delta$.

Ключевые моменты ньютоновского параметрического процесса соответствуют основным этапам численного (полиномиального) метода решения (1):

1) вход в вычислительный процесс, выбор начального приближения;

2) генерация последовательности приближенных решений (1);

3) выход из процесса по заданному критерию Останова.

Каждый из перечисленных этапов является самостоятельной задачей и требует специального изучения [6]. Разберем более детально основные стадии параметрического процесса (4).

Теорема 3. Пусть в шаре Q_R существует решение операторного уравнения (1). Тогда если для всех $k = 0, 1, \ldots$ элемент u_k последовательности (4) принадлежит Q_R, а также $\lceil [F'(u_k)]^{-1} \rceil < B_k$ и

$$\beta_k = min\{1, 2(KB_k^2 ||F(u_k)||)^{-1}\}, \tag{5}$$

то процесс (4) сходится к решению уравнения (1).

По условию теоремы

$$u_{k+1} = u_k - \beta_k [F'(u_k)]^{-1} F(u_k), \; k = 0, 1, \ldots.$$

Доказательство теоремы индуктивно следует из цепочки неравенств

$$||F(u_{k+1})|| = ||F(u_{k+1}) - F(u_k) + F'(u_k)\beta_k[F'(u_k)]^{-1}F(u_k) + F(u_k) - \beta_k F(u_k)|| <$$
$$< (\frac{K}{2} B_k^2 ||F(u_k)||\beta_k^2 - \beta_k + 1)||F(u_k)|| \le ||F(u_k)||.$$

Сходимость последовательности (4) к решению уравнения (1) на первом этапе процесса следует из достаточно жестких предпосылок:

1) хотя бы один корень уравнения (1) находится в области Q_R;

2) элементы u_k, $k = 0, 1, \ldots$ последовательности (4) принадлежат Q_R;

3) для всех k существует ограниченный оператор $[F'(u_k)]^{-1}$.

Теорема 4. Пусть в шаре Q_r, $r = 2B||F(u_0)||$ справедлива оценка $\sup\limits_{u \in Q} \left| F''(u) \right| \le K$ и условие $\lfloor F'(u_n) \rfloor^{-1} \le B_n \le B$ верно для всех членов (4) с

$$\beta_k = min\{1, (KB_k^2 ||F(u_k)||)^{-1}\}, \; k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

тогда в Q_r существует u^* – корень (1), к которому сходится процесс (4).

Индуктивное доказательство теоремы следует из минимизации β-функции $\frac{K}{2} B_k^2$ $||F(u_n)|| \beta_k^2 - \beta_k + 1$ на интервале $(0; 1]$ и соотношения

$$\beta_0 + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \prod_{i=0}^{k-1} \sqrt{1 - \beta_i} < 2, \beta_k \in (0; 1].$$

Приближенное решение u_0 из теоремы 4 назовем приближением, решающим уравнение (1) в области существования Q_r, и обозначим u_p. Лишь увеличив скорость

стремления последовательности $\{||F(u_k)||,\ k = 0, 1, \ldots\}$ к 0, удалось определить радиус шара Q_r, содержащего точное решение.

Отметим, что при $c_k \equiv KB_k^2\,||F(u_k)|| > 2$ в параметрическом процессе (4) следует применять демпфирующий множитель β_k из теоремы 3, а при $c_k \le 2$ и до локализации корня уравнения (1) – из теоремы 4.

Заключительный этап параметрического процесса (4) – критерий Останова. Знание оценок глобальных констант в шаре Q_r необходимо и при описании границ области локализации корня u^*, т. к. наличие ограниченных оценок K и B для отображений, действующих на всем бесконечномерном $\mathcal{B}$-пространстве $\mathcal{U}$, – явление крайне редкое.

Однако требовать существование ограниченного оператора $[F'(u)]^{-1}$ не только в шаре Q_r, но даже для всех элементов последовательности (4) не всегда обязательно (этот факт может вытекать из условий теоремы).

Теорема 5. Пусть в шаре $Q[u_0, r]$ банахово отображение $F: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ дважды непрерывно дифференцируемо и $\sup\limits_{u \in Q} \left| F''(u) \right| \le K$.

Тогда если для нуль-приближения выполнены условия

1) $[F'(u_0)]^{-1}$ существует с $\left\lfloor F'(u_0) \right\rfloor^{-1} \le B$;
2) $q = KB^2||F(u_0)|| \le 1/2$,

то в $Q[u_0, \delta]$, где $\delta = \dfrac{2B\,||F(u_0)||}{1+\sqrt{1-2q}} \le r$, уравнение (1) имеет единственное решение u^* и последовательность приближений (4) сходится к этому решению с $\beta_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$ (метод Ньютона).

Приближенное решение u_0 из теоремы 5 назовем приближением, *локализующим* единственный в шаре Q_δ корень (1), и обозначим $u_л$.

Заключение

Локализация методами полиномиального анализа изолированного корня функционального уравнения (1) в определенной окрестности $Q_r = ||u - u_0|| \le r$ приближения из всюду плотного множества пространства решений позволяет исследователям (при достаточно малом r) использовать его в качестве искомого корня, не нарушая методологию функционального анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

3. Крайнов, А. Ю. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / А. Ю. Крайнов, К. М. Моисеева. – Томск : STT, 2016. – 44 с.

4. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

5. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.

6. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.

REFERENCES

1. Kolmogorov,A. N. Eliemienty tieorii funkcij i funkcional’nogo analiza / A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. – M. : Nauka, 1989. – 624 s.

2. Kantorovich, L. V. Funkcional’nyj analiz / L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. – M. : Nauka, 1977. – 742 c.

3. Krajnov, A. Yu. Chisliennyje mietody rieshenija krajevykh zadach dlia obyknoviennykh diffieriencial’nykh uravnienij : uchieb. posobije / A. Yu. Krajnov, K. M. Moisiejeva. – Tomsk : STT, 2016. – 44 s.

4. Krasnosiel’skij, M. A. Priblizhennoje rieshenije opieratornykh uravnienij / M. A. Krasnosiel’skij, G. M. Vajniko, P. P. Zabriejko. – M. : Nauka, 1969. – 456 s.

5. Antonievich, A. B. Funkcional’nyj analiz i integral’nyje uravnienija / A. B. Antonievich, Ya. V. Radyno. – Minsk : BGU, 2006. – 430 s.

6. Morozov, V. V. Prikladnoj analiz i programmirovanije : posobije / V. V. Morozov. – Briest : BrGU, 2012. – 246 s.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.04.2022