

УДК 519.6 + 517.983.54

**Олег Викторович Матысик***канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Oleg Matysik***PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
at the Brest State A. S. Pushkin University  
e-mail: matysikoleg@mail.ru*

### **СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

*Доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного оператора, в предположении, что погрешности имеются в правой части уравнения. Получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.*

**Ключевые слова:** некорректная задача, неявный итерационный метод, гильбертово пространство, самосопряженный оператор, правило останова по невязке.

### ***The Convergence in the Hilbert Space of an Implicit Iteration Procedure for Solving Ill-posed Equations with Aposteriori Choice of Regularization Parameter***

*We prove the convergence of the method with aposteriori choice of the number of iterations in the original norm of the Hilbert space in the case of a self-adjoint operator, under the assumption that the errors are in the right-hand side of the equation. Obtained error estimate and the estimate for the aposteriori moment stop. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.*

**Key words:** ill-posed problem, implicit iteration method, Hilbert space, self-adjoint operator, residual stop rule.

#### **Введение**

В статье предлагается итерационный метод неявного типа решения некорректно поставленных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода в гильбертовом пространстве.

Сравнение предлагаемого неявного метода с хорошо известным явным методом итераций  $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$ ,  $x_{0,\delta} = 0$  [1–8] показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод из [1–8] предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе из [1–8] на шаг  $\alpha$  накладывается ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ , что может на практике привести к необходи-

мости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на итерационный параметр  $b > 0$  нет, в связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

### 1. Постановка задачи

В работе решается уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с действующим в гильбертовом пространстве  $H$  неограниченным линейным самосопряженным оператором  $A$ , в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания предлагается новый неявный итерационный метод

$$(A^4 + B)x_{n+1} = Bx_n + A^3y, x_0 = 0, \quad (2)$$

где  $E$  – единичный оператор, а  $B$  – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве  $B$  возьмем оператор  $B = bE, b > 0$ . Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью  $\delta$ , т. е. известен  $y_\delta$ , для которого  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ . Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближение

$$(A^4 + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^3y_\delta, x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколько угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (1) при подходящем выборе  $n$  и достаточных малых  $\delta$ . Иными словами, метод итераций (3) является сходящимся, если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$ .

Для метода (3) при условии  $b > 0$  доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. что  $x = A^{2s}z$ ,  $s > 0$ , получена априорная оценка погрешности  $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \left( \frac{bs}{4n} \right)^{\frac{s}{2}} \|z\| + 4 \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{4}} \delta$ ,  $n \geq 1$  [9]. Полученная априорная оценка погрешности была оптимизирована:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + 2s) \left( \frac{s}{2} \right)^{\frac{-3s}{2(1+2s)}} 2^{\frac{-s}{2(2s+1)}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} \delta^{\frac{2s}{2s+1}} \text{ и найден априорный момент останова } n_{\text{опт}} = 2^{\frac{2s}{2s+1}} \left( \frac{s}{2} \right)^{\frac{2(s+2)}{2s+1}} b \|z\|^{\frac{4}{2s+1}} \delta^{\frac{4}{2s+1}}. \text{ Очевидно, что оптимальная}$$

оценка не зависит от итерационного параметра  $b$ , но от  $b$  зависит  $n_{\text{опт}}$ . Поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать  $b$ , удовлетворяющим условию  $b > 0$ , и так, чтобы  $n_{\text{опт}} = 1$ . Для этого достаточно выбрать

$$b_{\text{опт}} = 2^{\frac{2s}{2s+1}} \left( \frac{s}{2} \right)^{\frac{2(s+2)}{2s+1}} \|z\|^{\frac{4}{2s+1}} \delta^{\frac{4}{2s+1}}.$$

В статье [10] доказано, что при условии  $b > 0$  итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ , если число итераций  $n$  выбирать из условия  $\sqrt[8]{n} \delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . В энергетической норме без знания истокообразной представимости точного решения найден априорный момент останова  $n_{\text{опт}} = 2^{-6} b \|x\|^4 \delta^{-4}$  и получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства  $H$ . Также в [10] в случае неединственного решения уравнения (1) доказано, что процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

## 2. Правило останова по малости невязки

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод итераций (3) становится неэффективным, т. к. тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова в исходной норме гильбертова пространства. Тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки [3–4; 12–15]. Здесь и ниже будем считать, что  $A$  – ограниченный линейный самосопряженный оператор.

Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon = b_1 \delta$ ,  $b_1 > 1$  и момент  $m$  останова итерационного процесса (3) условием

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Предположим, что при начальном приближении  $x_{0,\delta}$  невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т. е.  $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$ . Ниже метод (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$ . Покажем возможность применения правила (4) к методу (3). Рассмотрим семейство функций

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right] \geq 0. \text{ Используя результаты [9], нетрудно показать, что при } b > 0$$

для  $g_n(\lambda)$  выполняются следующие условия:

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 4 \left( \frac{n}{b} \right)^{1/(4)}, \quad n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, \quad n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in [-M, M], \quad (7)$$

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} \left| \lambda^{2s} (1 - \lambda g_n(\lambda)) \right| \leq \left( \frac{bs}{4n} \right)^{s/2}, \quad 2n > s, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (8)$$

Справедлива

**Лемма 1.** Пусть  $A$  – ограниченный оператор,  $A = A^*$ . Тогда для любого  $\omega \in H$   $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Используя интегральное представление самосопряженного оператора  $A = \int_{-M}^M \lambda dE_\lambda$ , где  $M = \|A\|$  и  $E_\lambda$  – спектральная функция оператора  $A$ , получим

$$(E - Ag_n(A))\omega = \int_{-M}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{-M}^0 (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = I_1 + I_2.$$

Первый из полученных интегралов разобьем на два интеграла

$$I_1 = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega.$$

Так как  $1 - \lambda g_n(\lambda) = \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \leq q^n(\varepsilon_0) < 1$  для всех  $\lambda \in [\varepsilon_0, M]$ , то получим

$$\left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\omega\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \text{ Из условия (6) имеем}$$

$$\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \omega\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0 \text{ в силу свойств спектральной функ-}$$

ции [11]. Аналогично,  $I_2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Лемма 1 доказана.

Имеет место

**Лемма 2.** Пусть  $A$  – ограниченный оператор,  $A = A^*$ . Тогда для любого  $\vartheta \in \overline{R(A)}$  имеет место соотношение  $n^{s/2} \|A^{2s} (E - Ag_n(A)) \vartheta\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$ .

**Доказательство.** Так как верно (8), то

$$n^{s/2} \|A^{2s} (E - Ag_n(A))\| \leq n^{s/2} \sup_{-M \leq \lambda \leq M} |\lambda^{2s} (1 - \lambda g_n(\lambda))| \leq n^{s/2} \gamma_s n^{-s/2} = \gamma_s,$$

где  $\gamma_s = \left(\frac{bs}{4}\right)^{s/2}$ . Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [11, с. 151], по которой сходимость  $B_n u \rightarrow Bu$  при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $u \in H$  имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в  $H$  подмножестве и  $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$ , ограничены не зависящей от  $n$  постоянной.

Возьмем в качестве плотного в  $\overline{R(A)} = H$  множество  $R(A)$ . Положим  $s_1 = s + \frac{1}{2}$ . Тогда для каждого  $\vartheta = A\omega \in R(A)$  имеем

$$\begin{aligned} n^{s/2} \|A^{2s} (E - Ag_n(A)) \vartheta\| &= n^{s/2} \|A^{2s+1} (E - Ag_n(A)) \omega\| = \\ &= n^{s/2} \|A^{2s_1} (E - Ag_n(A)) \omega\| \leq \gamma_{s_1} n^{\frac{-(s_1-s)}{2}} \|\omega\| = \gamma_{s_1} \|\omega\| n^{-1/4} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т. к.  $s_1 < \infty$ . Лемма 2 доказана.

Справедлива

**Лемма 3.** Пусть  $A$  – ограниченный оператор,  $A = A^*$ . Если для некоторой последовательности  $n_p < \bar{n} = \text{const}$  и  $\vartheta_0 \in \overline{R(A)}$  при  $p \rightarrow \infty$  имеем  $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))\vartheta_0 \rightarrow 0$ , то  $\vartheta_p = (E - Ag_{n_p}(A))\vartheta_0 \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** В силу (6) последовательность  $\vartheta_p$  ограничена  $\|\vartheta_p\| \leq 1$ ,  $p \in N$ . Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность  $\vartheta_p \rightharpoonup \vartheta$ , ( $p \in N' \subseteq N$ ), тогда  $A\vartheta_p \rightharpoonup A\vartheta$ , ( $p \in N'$ ).

Но по условию  $\omega_p = A\vartheta_p \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$ , следовательно,  $A\vartheta = 0$ . Поскольку нуль не является собственным значением оператора  $A$ , то  $\vartheta = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|\vartheta_p\|^2 &= (\vartheta_p, (E - Ag_{n_p}(A))\vartheta_0) = (\vartheta_p, \vartheta_0) - (\vartheta_p, Ag_{n_p}(A)\vartheta_0) = \\ &= (\vartheta_p, \vartheta_0) - (A\vartheta_p, g_{n_p}(A)\vartheta_0) = (\vartheta_p, \vartheta_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A)\vartheta_0) \rightarrow (\vartheta, \vartheta_0) = 0, \quad (p \in N'), \end{aligned}$$

т. к.  $\vartheta = 0$ ,  $\omega_p \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$  и по условию (5)  $\|g_{n_p}(A)\| \leq 4\left(\frac{n_p}{b}\right)^{1/4} \leq 4\left(\frac{\bar{n}}{b}\right)^{1/4}$ . Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности  $\vartheta_p$  стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность  $\vartheta_p \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$ . Лемма 3 доказана.

Если  $A$  – ограниченный несамосопряженный оператор, то справедлива аналогичная лемма 3

**Лемма 4.** Пусть  $A$  – ограниченный несамосопряженный оператор. Если для некоторой последовательности  $n_p < \bar{n} = \text{const}$  и  $\vartheta_0 \in \overline{R(A)}$  при  $p \rightarrow \infty$  имеем  $\omega_p = A^*A(E - A^*Ag_{n_p}(A^*A))\vartheta_0 \rightarrow 0$ , то  $\vartheta_p = (E - A^*Ag_{n_p}(A^*A))\vartheta_0 \rightarrow 0$ .

Для доказательства леммы 4 следует перейти к оператору  $A = A^*A$  и использовать лемму 3.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – ограниченный оператор,  $A = A^*$  и пусть момент останова  $m = m(\delta)$  в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда  $x_{m(\delta), \delta} \rightarrow x$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** В [9] показано, что  $x_{n, \delta} = A^{-1}[E - (CB)^n]y_\delta$ , где  $C = (A^4 + B)^{-1}$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} x_{n, \delta} - x &= A^{-1}[E - (CB)^n]y_\delta - x = A^{-1}[E - (CB)^n](y_\delta - y) + A^{-1}[E - (CB)^n]y - A^{-1}y = \\ &= A^{-1}[E - (CB)^n](y_\delta - y) - (CB)^n x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x, \end{aligned} \quad (9)$$

следовательно,  $Ax_{n, \delta} - y = Ax_{n, \delta} - Ax = -A(E - Ag_n(A))x + Ag_n(A)(y_\delta - y)$ .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} Ax_{n,\delta} - y_\delta &= -A(E - Ag_n(A))x + (y - y_\delta) + Ag_n(y_\delta - y) = \\ &= -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \end{aligned} \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n^{1/4} \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 4\left(\frac{n}{b}\right)^{1/4} \delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда  $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b_1\delta$ ,  $b_1 > 1$ , и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b_1 + 1)\delta. \quad (15)$$

Для любого  $n < m$   $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$ , поэтому  $\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y_\delta - y)\| \geq (b_1 - 1)\delta$ . Итак, для  $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при  $n = m - 1$  получим  $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/4}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta$

или  $(m-1)^{1/4} \delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  (т. к. из (12)  $\sigma_m \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ ). Если при этом  $m \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то, используя (9), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 4\left(\frac{m}{b}\right)^{1/4} \delta \rightarrow 0.$$

При  $m \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , т. к. из (11)  $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ .

Если же для некоторых  $\delta_n \rightarrow 0$  последовательность  $m(\delta_n)$  окажется ограниченной, то и в этом случае  $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ . Действительно, из (15) имеем  $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b_1 + 1)\delta_n \rightarrow 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ . Отсюда по лемме 3 получаем, что  $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ . Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 4\left(\frac{m(\delta_n)}{b}\right)^{1/4} \delta_n \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

### 3. Оценка погрешности

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1, оператор  $A$  – положителен и пусть  $x = A^{2s}z$ ,  $s > 0$ . Тогда справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[ \frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + \frac{4}{b^{1/4}} \left\{ 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[ \frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}} \right\}^{\frac{1}{4}} \delta. \quad (17)$$

**Доказательство.** Так как  $x = A^{2s}z$ , то

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \|A^{2s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\| \int_0^M \frac{\lambda^{2s+1}b^{m-1}}{(\lambda^4+b)^{m-1}} dE_\lambda z \right\| \leq \left[ \frac{(2s+1)b}{8(m-1)} \right]^{\frac{2s+1}{4}} \|z\|.$$

Воспользовавшись (16), получим  $(b_1-1)\delta \leq \left[ \frac{(2s+1)b}{8(m-1)} \right]^{\frac{2s+1}{4}} \|z\|$ . Отсюда имеем

$$m \leq 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[ \frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &= \|A^{2s}(E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{2s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{\frac{2s}{2s+1}} \|(E - Ag_m(A))z\|^{\frac{1}{2s+1}} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} \leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + 4\left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{1}{4}} \delta \leq \\ &\leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + \frac{4}{b^{1/4}} \left\{ 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[ \frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}} \right\}^{\frac{1}{4}} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

**Замечание 1.** Порядок оценки (17) есть  $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$ , и, как следует из [3], он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

**Замечание 2.** Знание порядка  $2s > 0$  истокорпредставимости точного решения, используемое в теореме 2, не потребуется на практике, т. к. оно не содержится в правиле останова по малости невязки. В теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано число итераций  $m$ , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода.

### Заключение

В работе изучены некоторые свойства предложенного неявного итерационного метода решения некорректных задач: доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
5. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
7. Лаврентьев, М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
8. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
9. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 77–83.
10. Матысик, О. В. Метод итераций приближенного решения линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2021. – № 1. – С. 81–87.
11. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
12. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
13. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
14. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.

15. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr 467. – P. 271279.

## REFERENCES

1. Lavrient'jev, M. M. O niekotorykh niekorrektnykh zadachakh matematichieskoj fiziki / M. M. Lavrient'jev. – Novosibirsk : Izd-vo SO AN SSSR, 1962. – 92 s.
2. Bakushinskij, A. V. Odin obshchij prijom postrojenija riegularizujushchikh algoritmov dlja liniejnogo niekorrektnogo uravnenija v gilbiertovom prostranstvie / A. V. Bakushinskij // Zhurn. vychisl. matematiki i mat. fiziki. – 1967. – T. 7, № 3. – S. 672–677.
3. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorrektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Yu. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.
4. Yemielin, I. V. K teorii niekorrektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.
5. Yemielin, I. V. Pravilo ostanova v iteracionnykh procedurakh rieshenija niekorrektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Avtomatika i tieliemiekhanika. – 1978. – № 12. – S. 59–63.
6. Dienisov, A. M. Vviedienije v teoriju obratnykh zadach / A. M. Denisov. – M. : Izd-vo MGU, 1994. – 207 s.
7. Lavrient'jev, M. M. Teorija opieratorov i niekorrektnyje zadachi / M. M. Lavrient'jev, L. Ya. Saviel'jev. – Novosibirsk : Izd-vo In-ta matematiki, 1999. – 702 s.
8. Samarskij, A. A. Chisliennye mietody rieshenija obratnykh zadach matematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
9. Matysik, O. V. Mietod iteracij niejavnogo tipa dlja rieshenija liniejnykh uravnenij s nieogranichenym opieratorom / O. V. Matysik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 77–83.
10. Matysik, O. V. Mietod iteracij priblizhennogo rieshenija liniejnykh uravnenij s nieogranichenym opieratorom v gilbiertovom prostranstvie / O. V. Matysik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2021. – № 1. – S. 81–87.
11. Liustiernik, L. A. Eliemienty funkcional'nogo analiza / L. A. Liustiernik, V. I. Sobolev. – M. : Nauka, 1965. – 520 s.
12. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorrektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.
13. Matysik, O. V. Iteracionnaja riegularizacija niekorrektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.
14. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
15. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr 467. – P. 271279.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.02.2022*